解析学特論 II（2009 年後期） 受講案内

題名：「Navier-Stokes Equations with Random Forcing」

月曜 10:30 –12:00 ・理学部６号館 302 (10 月 5 日開講)

担当教員: 吉田伸生

$G \subset \mathbb{R}^d$ （$d \geq 2$）を適当な集合とし、G 内で「流体」を考える。流体力学によると、妥当な物理的仮定のもと、流体の速度場：

$$u = u(t,x) = (u_j(t,x))_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d, \ \ t > 0, \ x \in G$$

及び圧力

$$p = p(t,x) \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \ x \in G$$

は次の **Navier-Stokes 方程式**を満たす：

$$\mathrm{div}\ u = 0, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \nu \Delta u - \nabla p + F, \tag{0.2}$$

ここで、$\nu > 0$ は動粘性係数、$F = F_t(x) \in \mathbb{R}^d$ は外力 (所与) である。この方程式は数学においても、偏微分方程式論、力学系等の分野に重要な話題を提供する。一方、この方程式の解析は決して容易でなく、$d = 3$ での時間大域的な古典解の一意的存在証明に多額の懸賞金がかかっていることも有名である。

この講義では、外力項 F が適当な L^2 空間に値をとる有色雑音 (trace class の共分散作用素を持つ Brown 運動を「時間微分」したもの) の場合を考え、その場合に時間大域的な弱解を構成することをひとつの目標とする。これは、有名な J. Leray の結果を確率的外力項をつけて再現することに対応する。

証明には確率解析、確率微分方程式が必要となるが、これらにはできるだけ入門的解説を試み、確率論を専門としない受講者も楽しめるよう配慮する。