0　序

本書は，主に大学理科系学部生を対象とした関数解析への入門書である．著者の講義録を出発点に，教科書，自習書としての汎用性を高めるため加筆した．執筆方針は次の 2 点に集約できる．

- 定理や命題は可能な限り自然で一般的仮定のもとで証明する．
- 抽象的な定義や命題が出てくる毎に, それらの意味を, 具体例を通じて一歩一歩踏み固めながら進む．練習問題を通じ, 手を動かしながら概念や定理の使い方に慣れ親しめるようにする．

まず上記方針一つ目について説明する．既刊の教科書には，定理・命題に過剰な仮定を課すものが多い (例えば一般のノルム空間で成り立つ命題で，ヒルベルト空間であることを仮定するなど)．確かにそれによって証明が簡単になる場合もあるが，多くの場合において仮定を必要最小限にとどめる方が論理の本質が見やすくなる．この理由により，本書では定理・命題の仮定はできるだけ本質的なものに限定した．

次に上記方針二つ目について補足する．関数解析は，その抽象性ゆえ，その教程において定義 $\to$ 命題 $\to$ 証明... という単調な流れだけから面白味を感じとることは難しい．本書では，具体例をできるだけ多く取り入れ，それらを通じ理論の有用性を実感できるように工夫した．また，数学の学習には与えられた情報を受け取るだけではなく，それらを自らの手で使ってみる作業が不可欠である．本書ではそれを手伝うため, 適切な難易度の練習問題 (問) を適所に配置した．

なお，本書は標準的内容を分かりやすく述べることに徹し，独自性にはこだわらなかった．その中においても証明法や具体例に本書なりの特色が出た箇所もあるのでいくつか紹介したい．

● 第 5 章で述べる，一様有界性原理，開写像定理，閉グラフ定理（いわゆる「関数解析 3 大定理」と呼ばれる一連の重要定理）の証明には，ベールの範疇定理と呼ばれる位相的抽象論を用いるのが一般的である．これに対し近年，これら一連の重要定理に対し，ベールの範疇定理を経由しない初等的・直接的証明法が発見された．そこで本書ではこの新しい証明を採用する．これにより本書読者にとっては，上に述べた一連の重要定理の学習がより容易になると期待している．

● 関数解析の手法は解析学の様々な分野に応用される．本書では，できる限りそうした応用を紹介した．例えば複素関数論への応用としてハーディ空間 (問 1.2.4, 問 2.2.5, 問 2.3.8, 問 2.4.8), ベルグマン空間 (問 1.2.5, 問 3.1.3, 問 3.1.4, 問 3.1.5) を紹介した．また，偏微分方程式への応用としてディリクレ問題に一節を設けた他 (4.4 節)，バナッハ・アラオグルの定理の応用例として非線形偏微分方程式にも言及した (例 6.3.8)．

● 本書最終節 (8.2 節) では，テープリッツの指数定理を詳しく述べた．テープリッツの指数定理はテープリッツ作用素のフレドホルム指数という解析学的対象を，閉曲線の回転数という幾何学的対象を繋ぐ定理であり，20 世紀後半の数学の中でも屈指の重要

結果であるアティヤ・シンガーの指数定理のひな形ともなった．この節を通じ，解析学の垣根をも超えて広がる関数解析の応用を味わって頂きたい．

予備知識: 本書で仮定する予備知識は，大学初年度程度の微積分 (例えば [吉田 1]), 線形代数, さらに距離空間論 (例えば [松坂, 第 6 章]) とルベーグ積分論の初歩 (例えば [吉田 2] 第 6 章まで) である．とは言え，これらを習得してからでないと，本書が読めない訳ではない．本書を読み進む中で必要に応じて予備知識を補充していくのが現実的である．本書では必要な予備知識を，付録 A 章 (線形代数, 距離空間), 付録 B 章 (ルベーグ積分) で解説した．特にルベーグ積分論は，一般には関数解析学習のハードルにもなりうるが，本書においてはルベーグ積分論未習の読者も付録の活用により既習の読者と遜色なく学習を進めることができるだろう．

($\star$) 印について: 本書の内容を必修部分と，より進んだ内容とに区分し，後者には ($\star$) 印をつけた．応用を主目的とする読者，手早く概要を知りたい読者は ($\star$) 印つきの項目は飛ばして読んで頂いて差し支えない．

証明について: 証明では，できるだけその論理構造を明確に提示した．また，証明中の多くの等式や不等式に，その根拠を式の番号などで説明した．例えば $A \stackrel{\text{命題 1.1.6 a)}}{=} B$ と書いてあれば，$A = B$ となる理由を命題 1.1.6 a) に求めることができることを意味する．さらに長い証明に対しては段階ごとに補題に分けた．この場合，読者はまず，個々の補題の証明を飛ばして読むことにより証明全体の構造を把握してから興味に応じて個々の補題の証明を読まれるとよいだろう．なお,「証明終わり」は，\(^▫^)/ で表す．

問について: 本書には多くの練習問題 (問) を収めた．($\star$) 印なしの問は比較的標準的, ($\star$) 印つきの問はやや発展的である．理解度を試すため，ひとまずは自力解答を試みられることを勧めるが，自力解答にこだわるあまり学習が停滞しては意味がない．適宜巻末の略解を活用されたい．また一部の問は，本来なら本文に挿入すべき簡単な補題を，問として分離することにより，本文の流れをよくする役割を兼ねている (本文証明中に引用される問)．その場合は略解を本文の延長と考えて頂いて構わない．

読者用ウェブサイトについて：本書出版後に発見された誤植の訂正や注釈の追加用に，著者のウェブサイト内のページが開設されている [吉田 4]．また，著者開設のツィッターのアカウント (`@noby_leb`) で本書を含む拙著読者どうし交流したり，著者に質問することもできる．ぜひ，活用されたい．

最後に話が逸れるようではあるが，モーツァルトの音楽は，一般愛好家の耳を楽しませる一方，専門家をその技術で驚愕させるという．著者はこれを教科書執筆の際の範としている．初学者にとって理解しやすい一方，専門家までもが目を見張る水準まで定式化の美しさ，証明の切れ味を磨きぬく．それをどれだけ本書に具現できたかのご審判は読者諸賢に委ねたい．

謝辞: 劔持智也氏, 寺澤祐高氏, 中野史彦氏, 原啓介氏, 福泉麗佳氏, 福島竜輝氏, は本書原稿にお目通しの上, 貴重なご意見を寄せて下さいました．また本書出版に際し，裳華房の久米太郎氏に大変お世話になりました．以上の方々に感謝申し上げます．

目 次