「関数解析の基礎」(吉田伸生 著) 誤植の訂正と注釈の追加[1]

以下、「—」 → 「...」 は, 「—」を 「...」に訂正するという意味です.

• p. 37, 問 2.2.2, 「とするとき」 の直前に 「, $y \in L^1(\mathbb{R}^d)$」を挿入.

• p. 64, 上から 2 行目： 「$\exists y \in X^*$」 → 「$\exists y \in X$」.

• p. 77, 例 3.3.7 の証明：3 行目右辺 2 つ目の積分「S_1」 → 「S_2」. 4 行目右辺 2 つ目の積分「S_2」 → 「S_1」.

• p. 100, (AC) のすぐ下の行： 「p. 194」 → 「p. 233」.

• p. 115, 命題 4.3.5 c) で「X が回帰的」→ 「Y が回帰的」. また, c) の証明 (p.116) で「X の回帰性」→ 「Y の回帰性」.

• p. 115, 命題 4.3.5：より整理した形に書き直すと次のようになる.

命題 4.3.5 (**可閉性と共役作用素の関係**) X, Y はノルム空間, T は X から Y への作用素, $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ とし, 以下の 3 条件を考える.

a1) $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y^*$. **a2)** ${}^\perp\mathscr{D}(T^*) = \{0\}$. **a3)** T は可閉.

このとき,

a) a1) $\Rightarrow$ a2) $\Leftrightarrow$ a3). とくに Y が回帰的なら, a1) $\Leftrightarrow$ a2) $\Leftrightarrow$ a3).

b) a3) $\Rightarrow$ $(\overline{T})^* = T^*$.

c) a1) $\Rightarrow$ $\overline{T} = C_Y^{-1} T^{**} C_X$ (本命題直前の説明参照).

証明 a) a1) $\Rightarrow$ a2): a1) を仮定すると,

$$ {}^\perp\mathscr{D}(T^*) \overset{\text{補題 3.4.3 c)}}{=} {}^\perp\left(\overline{\mathscr{D}(T^*)}\right) \overset{\text{a1)}}{=} {}^\perp Y^* \overset{\text{系 2.6.2 c)}}{=} \{0\}. $$

Y が回帰的なら a1) $\Leftrightarrow$ a2): 補題 3.5.3 b) による.

a2) $\Leftrightarrow$ a3): 補題 4.2.9 より, $(\{0\} \times Y) \cap \overline{\mathscr{G}(T)} = {}^\perp\mathscr{D}(T^*)$. したがって,

1) $$\text{a2)} \iff (\{0\} \times Y) \cap \overline{\mathscr{G}(T)} = \{(0,0)\}.$$

ところが, 補題 4.3.1, 命題 4.3.2 より, 1) の右側の条件は a3) と同値である.

b) 定義 4.2.5 より, $(g, f) \in Y^* \times X^*$ に対し,

2) $$(g, f) \in \mathscr{G}(T^*) \iff \forall (x, y) \in \mathscr{G}(T),\ f(x) = g(y).$$

ところが $\mathscr{G}(\overline{T}) \overset{\text{命題 4.3.2 b)}}{=} \overline{\mathscr{G}(T)}$ より, 2) の右側の条件は T を $\overline{T}$ に置き換えても変わらない. ゆえに $\mathscr{G}((\overline{T})^*) = \mathscr{G}(T^*)$. これと問 A.1.2 i) より, $(\overline{T})^* = T^*$.

c) a1) を仮定する. このとき, T^{**} が定義でき, さらに, a) より a3) がしたがい, $\overline{\mathscr{G}(T)} \overset{\text{命題 4.3.2 b)}}{=} \mathscr{G}(\overline{T})$. そこで, 次をいえばよい.

3) $$\mathscr{G}(C_Y^{-1} T^{**} C_X) = \overline{\mathscr{G}(T)}.$$

実際,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \overline{\mathscr{G}(T)} &\overset{\text{補題 4.2.9}}{\iff} \forall g \in \mathscr{D}(T^*),\ (T^* g)(x) = g(y) \\
&\overset{\text{定義 3.5.1 b)}}{\iff} \forall g \in \mathscr{D}(T^*),\ (C_X x)(T^* g) = (C_Y y)(g) \\
&\overset{\text{定義 4.2.5}}{\iff} C_X x \in \mathscr{D}(T^{**}),\ T^{**} C_X x = C_Y y \\
&\overset{C_Y^{-1} T^{**} C_X \text{ の定義}}{\iff} (x, y) \in \mathscr{G}(C_Y^{-1} T^{**} C_X).
\end{aligned}$$

以上で 3) を得る. \(^▫^)/

• p. 116, 命題 4.3.5 の証明直後に次の注を挿入：

注: 命題 4.3.5 の設定で, 命題 4.3.5 と命題 6.2.8 b) を併せると以下の関係を得る.

$$\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y^* \implies \overline{\mathscr{D}(T^*)}^{\mathrm{w}*} = Y^* \iff {}^\perp\mathscr{D}(T^*) = \{0\} \iff T \text{ が可閉.}$$

• p. 116, 下から 2 行目： 「Δu」 → 「Δ」.

• p. 117, 補題 4.4.1 のすぐ上の行： 「p. 105」 → 「p. 165」.

• p. 126, 補題 5.1.4 の証明中の 2) の 3 行下：「2) をみたす x_n をとれる」について, さらに詳しく説明する. $\alpha_n \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{S}(X)} p_n(x) \geq 4^n > 0$ と, 2) の 2 行下の不等式より

$$(3/4) 3^{-n} \alpha_n < 3^{-n} \alpha_n \leq \sup_{x \in \mathbb{S}(X)} p_n(x_{n-1} + 3^{-n} x).$$

[1] 2024 年 4 月 1 日更新

上式より，

$$\exists x \in \mathbb{S}(X), \ \ (3/4)3^{-n}\alpha_n \le p_n(x_{n-1} + 3^{-n}x).$$

そこで $x_n = x_{n-1} + 3^{-n}x$ として所期の x_n を得る．
• p. 127, 定理 5.1.1 の証明直後に次の注を挿入：
注:補題 5.1.4 において $\forall x \in X$, $\sup_{p\in\mathscr{P}} p(x) < \infty$ を仮定すると $x \mapsto \sup_{p\in\mathscr{P}} p(x)$ は X 上の半ノルムである．したがってとくに $\dim X < \infty$ なら，補題 5.1.4 (したがって定理 5.1.1 も) 問 1.4.1 から直接したがう．
• p. 128, 補題 5.2.2 の証明直後に次の注を挿入：
注: 補題 5.2.2 において $\mathscr{N}(T)$ が閉部分空間とするとき，条件 b) は $TQ^{-1} : X/\mathscr{N}(T) \to \mathscr{R}(T)$ (問 4.1.10 参照) の逆作用素が連続であることと同値である (問 4.1.2 参照)．したがって，すべての階数有限作用素は開写像である．
• p. 129, 例 5.2.4 の証明：\(^_{□}^)/ の 3 行上：「δ」 $\to$ 「$1/\delta$」.
• p. 147, 命題 6.2.4：2 行目：「するとき」 $\to$ 「とするとき」.
• p. 188, 補題 7.3.6 a) ($\Leftarrow$) の別証明 (K の対称性は不要)．$\langle Ke, e \rangle = \sigma\|K\|$ は実数なので，$\langle e, Ke \rangle = \langle Ke, e \rangle = \sigma\|K\|$. ゆえに

$$\begin{aligned}\|Ke - \sigma\|K\|e\|^2 &= \|Ke\|^2 - 2\sigma\|K\|\langle Ke, e \rangle + \|K\|^2 \\ &= \|Ke\|^2 - \|K\|^2 \le 0.\end{aligned}$$

上式より $Ke = \sigma\|K\|e$.
• p. 200, 脚注*10, 下から 3 行目：「命題 7.5.1 c)」 $\to$ 「命題 7.5.1 d)」.
• p. 204, 上から 5 行目：「b)」 $\to$ 「c)」.
• p. 206, 最終行：「b)」 $\to$ 「c)」.
• p. 217, 命題 8.1.8 の証明直後に次の注を挿入：
注: 命題 8.1.8 において T が全単射かつ連続な逆作用素をもつとする．このとき，a) は命題 7.5.1 からしたがう．その際，X, Y は任意のノルム空間でよく，仮定 $T \in \mathscr{C}(X,Y)$, $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ も不要である．また，b) は問 7.2.1 と問 4.1.10 iii) からしたがう実際，問 7.2.1 から $T + B$ は全単射かつ連続な逆作用素をもち，問 4.1.10 iii) より $\mathscr{R}(T + B)$ は閉である．
• p. 237, 定義 A.3.1 b), 1 行目：「$x \in A$ に対し」 $\to$ 「$x \in X$ に対し」.
• p. 239, 2 行目：「$x \in A$ に対し」 $\to$ 「$x \in X$ に対し」.
• p. 269, 最終行：「$\|T_n x\|_X$」 $\to$ 「$\|T_n x\|_Y$」.
• p. 271, 1 行目：「$\|Tx\|_X$」 $\to$ 「$\|Tx\|_Y$」.
• p. 280, 問 3.1.5 iii) の 1 行目：「$k(z, w)$」 $\to$ 「$e(z, w)$」.
• p. 282, 問 3.3.4 の 1 行目：「$X \to \ell^2(E)$」 $\to$ 「$\ell^2(E) \to X$」.
• p. 292, 5 行目：「$y \in E$」 $\to$ 「$x \in E$」.
• p. 301, 問 7.5.1 iii) の冒頭：「b)」 $\to$ 「c)」.

(改訂の機会があれば) 追加したい問

問 1.4.1 有限次元ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ 上の全ての半ノルムは連続であることを示せ．

略解 $\{e_j\}_{j=1}^d$ を X の基底とし，$x \in X$ を $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j$ と表す．このとき，$\|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\le j\le d} |x_j|$ は X 上のノルムなので，命題 1.4.1 より，$\exists C \in (0,\infty)$, $\forall x \in X$, $\|x\|_\infty \le C\|x\|$. そこで X 上の半ノルム p に対し $M = \sum_{j=1}^d p(e_j)$ とおくと $|p(x)| \le M\|x\|_\infty \le CM\|x\|$. これより p の連続性を得る．

問 2.1.10 X, Y はノルム空間, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, $S \in \mathscr{B}(Y,X)$ とする．このとき，$1+ST \in \mathscr{B}(X)$ が全単射かつ連続な逆作用素をもつなら，$1+TS \in \mathscr{B}(Y)$ は全単射かつ連続な逆作用素をもつことを示せ．**ヒント** $U \in \mathscr{B}(X)$ が $U(1+ST) = (1+ST)U = 1$ をみたすとし，$V = 1+TUS \in \mathscr{B}(Y)$ を考える．
略解 ヒントの V が $V(1+TS) = (1+TS)V = 1$ をみたすことが容易にわかる．

問 2.6.5 X はノルム空間, X_2 はその有限次元線形部分空間とする．以下の命題は正しいか？**i)** 閉線形部分空間 $X_1 \subset X$ が存在し，$X = X_1 \oplus X_2$ をみたす．**ii)** $(\star)$ 線形部分空間 $X_1 \subset X$ が $X = X_1 \oplus X_2$ をみたせば X_1 は閉である．

略解 i) 正しい (例 2.6.3). **ii)** 正しくない．X を無限次元バナッハ空間とする．例 2.1.11 直後の注 ii) より，ある $e \in X$ に対し X から $X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}e$ への不連続な射影 P_e が存在する．このとき $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{N}(P_e)$ に対し $X = X_1 \oplus X_2$ だが，例 2.1.6 a) より X_1 は閉ではない．

問 2.6.6 ($\star$) X はノルム空間, q は X 上の半ノルムとする．以下を示せ．**i)** X 上の半ノルム p に対し，$p(x) \leq q(x)$ $(\forall x \in X) \iff \{x \in X\ ;\ q(x) \leq 1\} \subset \{x \in X\ ;\ p(x) \leq 1\}$. **ii)** (**半ノルムの最大表示**) 集合 $\{x \in X\ ;\ q(x) \leq 1\}$ が閉なら，

$$q(x) = \sup\{|f(x)|\ ;\ f \in X_q^*\},\ \ \forall x \in X,$$

ここで，X_q^* は，条件 $|f(x)| \leq q(x)$ $(\forall x \in X)$ をみたす $f \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ 全体を表す．

略解 i) $\Rightarrow$ は明らかなので $\Leftarrow$ を示す．$x \in X$, および $\alpha > q(x)$ を任意, とすると，$q(x/\alpha) = q(x)/\alpha < 1$ より $1 \geq |f(x/\alpha)| = |f(x)|/\alpha$. ゆえに $|f(x)| \leq \alpha$. $\alpha \searrow q(x)$ として $|f(x)| \leq q(x)$ を得る．**ii)** $q(x) = 0$ なら任意の $f \in X_q^*$ に対し $f(x) = 0$ なので所期等式は成立する．そこで以下，$q(x) > 0$ とする．$\geq$ は明らかなので $\leq$ を示す．そのためには $b \in X$, および $\alpha \in (0, q(b))$ を任意とし，$\exists f \in X_q^*$, $\alpha < |f(b)|$ を言えばよい．また q を q/α におきかえることにより $\alpha = 1$ としてよい．このとき，$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X\ ;\ q(x) \leq 1\}$ は閉凸集合なので問 2.6.4 より $\exists f \in X^*$, $\sup_{a \in A} |f(a)| \leq 1 < f(b)$. このとき i) より，$f \in X_q^*$ なので，この f が所期のものである．

問 4.1.14 X, Y はノルム空間, $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ はそれぞれ線形部分空間，$T : X_1 \to Y_1$ を有界同型作用素とする．以下を示せ．**i)** $\mathscr{D}(T) = X_1$ とするとき，T は X から Y_1 への閉作用素である．**ii)** i) と同じく $\mathscr{D}(T) = X_1$ とするとき，T は X_1 から Y への閉作用素である．

注 X はヒルベルト空間, E はその完全正規直交系, $\mathscr{F} : X \to \ell^2(E)$ を E についてのフーリエ係数とする (定義 2.4.1 参照)．このとき $\mathscr{F}$ は $\mathrm{span}\, E$ から $\ell_{\mathrm{f}}^\infty(E)$ への等長同型作用素なので $Y = \ell^2(E)$, $X_1 = \mathrm{span}\, E$, $Y_1 = \ell_{\mathrm{f}}^\infty(E)$ として問 4.1.14 の仮定がみたされる．$\mathrm{span}\, E$ が X の閉集合でないことに注意すると， 問 4.1.14 i) により，X, Y_1 がノルム空間，Y_1 がバナッハ空間でない場合に「$T \in \mathscr{C}(X, Y_1) \cap \mathscr{B}(\mathscr{D}(T), Y_1) \not\Longrightarrow \mathscr{D}(T)$ が閉」が例示される (命題 4.1.4 c) 参照)．また $\ell_{\mathrm{f}}^\infty(E) \subset Y$ が閉集合でないことに注意すると，問 4.1.14 ii) により，X_1, Y がノルム空間，X_1 がバナッハ空間でない場合に「$T : X_1 \to Y$ は単射，$T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{R}(T), X_1)$, $T \in \mathscr{C}(X_1, Y) \not\Longrightarrow \mathscr{R}(T)$ が閉」が例示される (命題 4.1.4 d) 参照)．

略解 i) $x_n \in X_1$, $x \in X$, $y \in Y_1$, $(x_n, Tx_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y)$ と仮定し $x \in X_1$, $Tx = y$ を導く．$y \in Y_1$ より $T^{-1}y \in X_1$. すると $T^{-1} : Y_1 \to X_1$ の連続性と仮定より $x_n = T^{-1}Tx_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T^{-1}y$. したがって $x = T^{-1}y \in X_1$. $Tx = TT^{-1}y = y$. **i)** $x_n \in X_1$, $x \in X_1$, $y \in Y$, $(x_n, Tx_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y)$ と仮定し $Tx = y$ を導く．実際，$x \in X_1$ と $T : X_1 \to Y_1$ の連続性より $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n$

問 5.1.1 ノルム空間 X, Y, および X から Y への作用素 T について $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ とするとき，$T \in \mathscr{B}(\mathscr{D}(T), Y) \Leftrightarrow \mathscr{D}(T^*) = Y^*$ を示せ．

略解 $\Rightarrow$ は明らかなので逆を示す．$C_Y : Y \to Y^{**}$ を自然な等長同型作用素とするとき，任意の $u \in \mathbb{S}(\mathscr{D}(T))$, $g \in Y^*$ に対し，

$$|C_Y(Tu)g| = |g(Tu)| = |(T^*g)(u)| \leq \|T^*g\|_{X^*} < \infty.$$

そこで，$\{C_Y(Tu)\ ;\ u \in \mathbb{S}(\mathscr{D}(T))\} \subset Y^{**}$ に対し一様有界性原理を適用し，

$$\sup_{u \in \mathbb{S}(\mathscr{D}(T))} \|Tu\|_Y = \sup_{u \in \mathbb{S}(\mathscr{D}(T))} \|C_Y(Tu)\|_{Y^{**}} < \infty.$$

したがって，$T \in \mathscr{B}(\mathscr{D}(T), Y)$.

問 5.1.2 線形空間 $\ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})$ (問 1.1.2 参照) に $\ell^\infty(\mathbb{N})$ の部分空間としてのノルムを付与する．また，$x \in \ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(x) = \sum_{s=0}^\infty x(s)$, $f_n(x) = \sum_{s=0}^n x(s)$ と定める．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})^*$, $f \not\in \ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})^*$ かつ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束することを示せ (これから，X が一般のノルム空間の場合には定理 5.1.1 が成立しないことがわかる)．

略解 $x \in \ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $|f_n(x)| \leq (n+1)\|x\|_\infty$ より $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})^*$. $x_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}\{s \leq n\}$ に対し，$x_n \in \mathbb{S}(\ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N}))$ かつ $f(x_n) = n + 1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. ゆえに $f \not\in \ell_{\mathrm{f}}^\infty(\mathbb{N})^*$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に各点収束することは明らかである．

問 5.2.10 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ はバナッハ空間，$g : Y \to \mathbb{K}$ は不連続な線形写像 (例 2.1.11 参照)，$\|y\|_{Y,g} = \|y\|_Y + |g(y)|$ $(y \in Y)$ と定める．このとき，$(Y, \|y\|_{Y,g})$ から $(Y, \|y\|_Y)$ への恒等写像 T は連続

な全単射，かつ T^{-1} は不連続な閉作用素であることを示せ (これから，定理 5.2.3 の X を一般のノルム空間におきかえると，開写像定理，可逆定理が成立しないこと，また，Y を一般のノルム空間におきかえると閉グラフ定理が成立しないことがわかる).

略解 T が連続な全単射であることは明らかである．また，命題 4.1.4 b) より T^{-1} は閉作用素である．一方，T^{-1} が連続と仮定すると，$\exists C \in (0,\infty)$, $\forall y \in Y$, $\|y\|_{Y,g} \le C\|y\|_Y$．これは $g \in Y^*$ を意味し，不合理である．ゆえに T^{-1} は不連続である．

問 7.1.15 例 7.1.4 のかけ算作用素 T_m および $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し以下を示せ．**i)** $\mathscr{N}(\lambda - T_m) = \{x \in L^p(\mu)\ ;\ x\mathbf{1}\{m \neq \lambda\} = 0 \text{ a.s.}\}$ **ii)** μ が非原子的，すなわち $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) > 0 \Rightarrow \exists A_1 \in \mathscr{A}$, $A_1 \subset A$, $\mu(A_1) > 0$, $\mu(A\backslash A_1) > 0$ なら $\forall \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\dim \mathscr{N}(\lambda - T_m) = \infty$.

略解 i) $x \in L^p(\mu)$ に対し，$(\lambda - m)x = 0$, a.s. $\Leftrightarrow (\lambda - m)x\mathbf{1}\{m \neq \lambda\} = 0$ a.s. $\Leftrightarrow x\mathbf{1}\{m \neq \lambda\} = 0$ a.s. **ii)** $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ と例 7.1.4 より $B \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S\ ;\ m = \lambda\}$ は正の測度をもつ．また，μ の半有限性から $\exists A \in \mathscr{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) \in (0,\infty)$．さらに μ の非原子性から帰納法により，非交差，可測，かつ測度正の $A_n \subset A$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在する．このとき，$\mathbf{1}_{A_n} \in \mathscr{N}(\lambda - T_m)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\{\mathbf{1}_{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 1 次独立である．

問 7.1.16 X はノルム空間，$T : X \to X$ は作用素，$\lambda \in \rho(T)$，$n \in \mathbb{N}$ とする．以下を示せ．**i)** $\mathscr{D}(T^n) = \mathscr{R}((\lambda - T)^{-n})$. **ii)** $\overline{\mathscr{D}(T)} = X \Rightarrow \forall n \ge 1$, $\overline{\mathscr{D}(T^n)} = X$.

略解 $T_\lambda = \lambda - T$, $S_\lambda = T_\lambda^{-1}$ とする．**i)** n に関する帰納法による．$n = 1$ なら $\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(T_\lambda) \stackrel{(A.1)}{=} \mathscr{R}(S_\lambda)$．$\mathscr{D}(T^n) = \mathscr{R}(S_\lambda^n)$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
x \in \mathscr{D}(T^{n+1}) &\iff x \in \mathscr{D}(T),\ Tx \in \mathscr{D}(T^n) \\
&\iff \exists y, \exists z \in X,\ x = S_\lambda y,\ \ T_\lambda x = S_\lambda^n z \\
&\iff \exists z \in X,\ x = S_\lambda^{n+1} z \\
&\iff x \in \mathscr{R}(S_\lambda^{n+1}).
\end{aligned}
$$

ii) $\mathscr{N}(S_\lambda^*) \stackrel{\text{命題 4.2.8 a)}}{=} \mathscr{R}(S_\lambda)^\perp \stackrel{\text{i)}}{=} \mathscr{D}(T)^\perp = \{0\}$．ゆえに S_λ^* は単射，したがって $(S_\lambda^n)^* = (S_\lambda^*)^n$ は単射である．ゆえに $\mathscr{D}(T^n)^\perp \stackrel{\text{i)}}{=} \mathscr{R}((S_\lambda^n)^*))^\perp \stackrel{\text{命題 4.2.8 a)}}{=} \mathscr{N}(S_\lambda^n) = \{0\}$．これと命題 3.4.2 b) より $\overline{\mathscr{D}(T^n)} = X$.

問 7.3.3 ($\star$) X はヒルベルト空間，$T \in \mathscr{B}(X)$ は自己共役とし以下を示せ．**i)** $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$ なら $\|T^n\| = \|T\|^n$．**ヒント** 問 7.3.1．**ii)** $\|T\| = \max\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \sigma(T)\}$．**ヒント** p.178 の脚注および命題 7.2.7.

略解 i) $m = 1$ なら $\|T^2\| = \|TT^*\| \stackrel{\text{問 7.3.1}}{=} \|T\|^2$. で正しい．さらに m に関する帰納法で所期等式を得る．**ii)** 所期等式右辺を $r_0(T)$, $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$ とする．$\|T\| \stackrel{\text{i)}}{=} \|T^n\|^{1/n}$．また p.178 の脚注および命題 7.2.7 より $\|T^n\|^{1/n} \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} r_0(T)$．よって $\|T\| = r_0(T)$.

問 7.3.4 ($\star$) (問 7.3.3 の一般化) X はヒルベルト空間，$T \in \mathscr{B}(X)$, $TT^* = T^*T$ とし，問 7.3.3 の i), ii) を示せ．**ヒント** i) を示せばよい (問 7.3.3 の略解参照)．一方，問 7.3.3 より自己共役作用素 $S \stackrel{\text{def}}{=} T^*T$, $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$ に対し $\|S^n\| = \|S\|^n$．これと問 7.3.1 より所期等式を導く．

略解 ヒントの続き: T, T^* の可換性より $(T^*)^n T^n = S^n$．よって $\|T^n\|^2 \stackrel{\text{問 7.3.1}}{=} \|(T^n)^* T^n\| = \|(T^*)^n T^n\| = \|S^n\| = \|S\|^n \stackrel{\text{問 7.3.1}}{=} \|T\|^{2n}$.

問 7.3.5 X はバナッハ空間，$T \in \mathscr{C}(X)$, $\lambda \in \sigma(T)$, $\mathscr{R}(\lambda - T)$ は閉とする．以下を示せ．**i)** $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. **ii)** 特に X がヒルベルト空間，T が自己共役なら $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ かつ $\lambda \notin \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)\backslash\{\lambda\}}$.

略解 i) $\mathscr{R}(\lambda - T)$ は閉かつ $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$ とする．$\mathscr{N}(\lambda - T) = \{0\}$ かつ $\mathscr{R}(\lambda - T) = \overline{\mathscr{R}(\lambda - T)} = X$. さらに，$\lambda - T \in \mathscr{C}(X)$ と可逆定理 (定理 5.2.3 b)) より $(\lambda - T)^{-1} \in \mathscr{B}(X)$. 以上より $\lambda \in \rho(T)$ (矛盾). **ii)** i) と系 7.3.2 より $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. 以下，$\lambda \notin \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)\backslash\{\lambda\}}$ を背理法で示す．$\mathscr{R}(\lambda - T)$ が閉であることと開写像定理 (定理 5.2.3 a)) より

1) $\exists c > 0$, $\forall x \in X$, $\|(\lambda - T)x\| \ge c\rho(x, \mathscr{N}(\lambda - T))$.

ここで背理法の仮定より $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_n \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)\backslash\{\lambda\}$, $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$．したがって，$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in \mathbb{S}(\mathscr{N}(\lambda_n - T))$. また，この x_n に対し，

2) $(\lambda-T)x_n=(\lambda-\lambda_n)x-(\lambda_n-T)x_n=(\lambda-\lambda_n)x\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
一方，$\lambda,\lambda_n\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\lambda\neq\lambda_n$ と命題 7.3.1 d) より $x_n\in\mathscr{N}(\lambda-T)^{\perp}$. したがって $\rho(x_n,\mathscr{N}(\lambda-T))=\|x_n\|$. これと 1), 2) より

$$1=\|x_n\|=\rho(x_n,\mathscr{N}(\lambda-T))\leq c^{-1}\|(\lambda-T)x_n\|\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ (\text{矛盾}).$$

問 8.1.7 X, Y はバナッハ空間，$T\in\mathscr{C}(X,Y)$, $B\in\mathscr{B}(X,Y)$ とし，$\mathscr{D}(T)$ にグラフノルムを付与する．以下を示せ．**i)** $T\in\mathscr{F}_0(X,Y)\Leftrightarrow T\in\mathscr{F}_0(\mathscr{D}(T),Y)$. また $T\in\mathscr{F}_0(X,Y)$ としての $\mathrm{ind}T$ と $T\in\mathscr{F}_0(\mathscr{D}(T),Y)$ としての $\mathrm{ind}T$ は等しい．**ii)** (**命題 8.1.8 a) の一般化**) $T\in\mathscr{F}_0(X,Y)$, $B|_{\mathscr{D}(T)}\in\mathscr{K}(\mathscr{D}(T),Y)\Rightarrow T+B\in\mathscr{F}_0(X,Y)$, $\mathrm{ind}T=\mathrm{ind}(T+B)$. **iii)** (**命題 8.1.8 b) の一般化**) $T\in\mathscr{F}_0(X,Y)$, $B|_{\mathscr{D}(T)}\in\mathscr{B}(\mathscr{D}(T),Y)$ とするとき，ある $\varepsilon>0$ が存在し，$\|B\|_{\mathscr{D}(T)\to Y}<\varepsilon\Rightarrow T+B\in\mathscr{F}_0(X,Y)$, $\mathrm{ind}T=\mathrm{ind}(T+B)$. **vi)** (**問 8.1.6 ii) の一般化**) $X=Y$, $B|_{\mathscr{D}(T)}\in\mathscr{K}(\mathscr{D}(T),X)$ なら，$\sigma_{\mathrm{ess}}(T)=\sigma_{\mathrm{ess}}(T+B)$, $\sigma_{\mathrm{W}}(T)=\sigma_{\mathrm{W}}(T+B)$.
略解 i) $\mathscr{N}(T),\mathscr{R}(T)$ は X を $\mathscr{D}(T)$ に取り替えても同じである．**ii)** 仮定と i) より命題 8.1.8 a) に帰着する．**iii)** 仮定と i) より命題 8.1.8 b) に帰着する．**iv)** $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)=\sigma_{\mathrm{ess}}(T+B)$ を示すには $\rho_{\mathrm{ess}}(T)=\rho_{\mathrm{ess}}(T+B)$ ならよい．そこでまず $\lambda\in\rho_{\mathrm{ess}}(T)$ とする．このとき $\lambda-T\in\mathscr{F}_0(X)$ だから ii) より $\lambda-T-B\in\mathscr{F}_0(X)$. ゆえに $\lambda\in\rho_{\mathrm{ess}}(T+B)$. 以上で $\rho_{\mathrm{ess}}(T)\subset\rho_{\mathrm{ess}}(T+B)$ を得るが，$\rho_{\mathrm{ess}}(T+B)\subset\rho_{\mathrm{ess}}(T)$ も全く同様にわかる．$\sigma_{\mathrm{W}}(T)=\sigma_{\mathrm{W}}(T+B)$ の証明も同様である．

問 8.1.8 X はバナッハ空間，$T\in\mathscr{C}(X)$ とするとき，以下を示せ．**i)** $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ は閉．**ii)** $\overline{\sigma_{\mathrm{c}}(T)}\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$.
略解 i) 命題 8.1.8 b) より $\rho_{\mathrm{ess}}(T)$ は開，すなわち $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ は閉である．**ii)** i) より $\sigma_{\mathrm{c}}(T)\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ なら十分である．そこで $\sigma_{\mathrm{c}}(T)\not\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$, すなわち $\exists\lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ と仮定して矛盾を導く．実際，このとき $\lambda-T$ は単射かつ $\mathscr{R}(\lambda-T)$ は閉集合だから可逆定理 (定理 5.2.3 b)) より $(\lambda-T)^{-1}\in\mathscr{B}(\mathscr{R}(\lambda-T),X)$. これは $\lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ に矛盾する．

問 8.1.9 ヒルベルト空間 X から X への自己共役作用素 T，$\lambda\in\mathbb{R}$ に対し以下を示せ．**i)** $\lambda\in\sigma(T)\cap\rho_{\mathrm{ess}}(T)\Rightarrow\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\dim\mathscr{N}(\lambda-T)<\infty$, かつ $\lambda\notin\overline{\sigma(T)\backslash\{\lambda\}}$. **ii)** $\mathscr{R}(\lambda-T)$ が閉と仮定すれば i) の逆も成立する．
注 問 8.1.9 ii) における仮定「$\mathscr{R}(\lambda-T)$ が閉」は実は不要である (略解直後の注参照).
略解 i) $\lambda\in\rho_{\mathrm{ess}}(T)$ より $\dim\mathscr{N}(\lambda-T)<\infty$ かつ $\mathscr{R}(\lambda-T)$ は閉である．また $\lambda\in\rho_{\mathrm{ess}}(T)$ と i) より $\lambda\notin\overline{\sigma_{\mathrm{c}}(T)}$. さらに $\mathscr{R}(\lambda-T)$ が閉であることと問 7.3.5 ii) より $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ かつ $\lambda\notin\overline{\sigma(T)\backslash\{\lambda\}}$. 以上より i) を得る．**ii)** $\lambda\in\rho_{\mathrm{ess}}(T)$, すなわち $\lambda-T\in\mathscr{F}_0(X)$ ならよい．ところが，仮定より $\mathscr{R}(\lambda-T)$ は閉．また，$\mathscr{N}(\lambda-T)=\mathscr{N}(\lambda-T^*)\stackrel{\text{命題 4.2.8 a)}}{=}\mathscr{R}(\lambda-T)^{\perp}$. よって $\dim(X/\mathscr{R}(\lambda-T))\stackrel{\text{補題 7.5.3 a)}}{=}\dim\mathscr{R}(\lambda-T)^{\perp}=\dim\mathscr{N}(\lambda-T)<\infty$.
注 問 8.1.8 ii) における仮定「$\mathscr{R}(\lambda-T)$ が閉」は実は $\lambda\notin\overline{\sigma(T)\backslash\{\lambda\}}$ から次のように導くことができる．仮定より $\varepsilon\stackrel{\mathrm{def}}{=}\inf\{|\lambda-t|\,;\,t\in\sigma(T)\backslash\{\lambda\}\}>0$. そこで $T=\int_{\sigma(T)}tdP_t$ を T のスペクトル分解，$\widetilde{x}=x-P_{\{\lambda\}}x$ $(x\in X)$ とするとき，

$$\begin{aligned}\|(\lambda-T)x\|^2 &= \|(\lambda-T)\widetilde{x}\|^2=\int_{\sigma(T)\backslash\{\lambda\}}(\lambda-t)^2d\langle P_t\widetilde{x},P_t\widetilde{x}\rangle\\ &\geq \varepsilon^2\int_{\sigma(T)\backslash\{\lambda\}}d\langle P_t\widetilde{x},P_t\widetilde{x}\rangle=\varepsilon^2\|\widetilde{x}\|^2=\varepsilon^2\|x-P_{\{\lambda\}}x\|^2.\end{aligned}$$

これと問 4.1.10 ii) より $\mathscr{R}(\lambda-T)$ は閉集合である．

付記: 「一様有界性原理 $\Rightarrow$ 閉グラフ定理」の別証明[2]

定理バナッハ空間 X,Y，および $T\in\mathscr{C}(X,Y)$ に対し，$\mathscr{D}(T)=X$ なら $T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

証明: 問 5.1.1 (追加分) より $\mathscr{D}(T^*)=Y^*$ ならよい．以下，記号を見やすくするために $B=\mathscr{D}(T^*)\cap\overline{\mathbb{B}}(X^*)$ とする．まず次に注意する．

1) $C\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sup_{g\in B}\|T^*g\|_{X^*}<\infty$.

[2]匿名希望`@ibukii` さん (X のアカウント) による．

実際，任意に固定した $g \in B$, $x \in X$ に対し

$$|(T^*g)(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|_{Y^*}\|Tx\|_Y \le \|Tx\|_Y < \infty.$$

X はバナッハ空間だから，一様有界性原理より 1) を得る．

次に 1) を用い定理を示す．$T \in \mathscr{C}(X, Y)$ より $\overline{\mathscr{D}(T^*)}^{\mathrm{w}^*} = Y^*$ (命題 4.3.5 の改良版)．ゆえに $\mathscr{D}(T^*)$ が汎弱閉ならよい．またそのためには次を言えばよい．

2) $\overline{B}^{\mathrm{w}^*} \subset \mathscr{D}(T^*)$.

実際，Y はバナッハ空間なので，2) とクライン・シュムリアンの定理 [前田 p.104] より $\mathscr{D}(T^*)$ が汎弱閉であることがしたがう．2) を示すため $h \in \overline{B}^{\mathrm{w}^*}$ を任意とする．このとき，任意の $x \in X \backslash \{0\}$ に対し

$$V_{h,x} = \{g \in Y^* \, ; \, |h(Tx)| < |g(Tx)| + \|x\|_X\}$$

は h の w*-近傍なので．ある $\widetilde{h} \in B$ を含む．したがって，

$$\begin{aligned} |h(Tx)| &< |\widetilde{h}(Tx)| + \|x\|_X = |(T^*\widetilde{h})x| + \|x\|_X = (\|T^*\widetilde{h}\|_{X^*} + 1)\|x\|_X \\ &\overset{1)}{\le} (C+1)\|x\|_X. \end{aligned}$$

ゆえに $h \in \mathscr{D}(T^*)$．以上より 2) を得る． \\(^▫^)/