# 7　共役作用素 (ヒルベルト空間の場合)

(2011 年 1 月 28 日更新)

作用素に対する" 共役作用素" は, 大雑把に言うと, 行列に対する転置行列に相当する. 特にヒルベルト空間での共役作用素は, 自己共役性という概念の前提として重要な上に, 共役空間の一般論を要さないという学習上の利点を持つ. そうした事情に鑑み, ここでは, ヒルベルト空間の場合に限り, 共役作用素, 対称作用素, 自己共役作用素の基本を述べる一般のノルム空間における共役作用素は 8.5 節で述べる.

## 7.1　共役作用素の定義と簡単な例

**命題 7.1.1** $X$,$Y$ は内積空間, $T : X \to Y$ は作用素, $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ とする。このとき $\mathscr{D}(T^*) \subset Y$ を次のように定める：

$$y \in \mathscr{D}(T^*) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists z \in X,\ \forall x \in \mathscr{D}(T),\ \langle\, Tx, y \,\rangle_Y = \langle\, x, z \,\rangle_X. \tag{7.1}$$

**a)** $y \in \mathscr{D}(T^*)$ に対し (7.1) の $z \in X$ は一意的. $z = T^*y$ と書くと, $(T^*, \mathscr{D}(T^*)) : Y \to X$ $(y \mapsto T^*y)$ は閉作用素. これを $T$ の**共役作用素** (adjoint operator) と言う. 特に $X$ がヒルベルト空間なら

$$y \in \mathscr{D}(T^*) \iff x \mapsto \langle\, Tx, y \,\rangle_Y\ (\mathscr{D}(T) \to \mathbb{K}) \text{ が連続} \tag{7.2}$$

**b)** $X$ がヒルベルト空間なら $T \in \mathscr{B}(\mathscr{D}(T) \to Y) \Leftrightarrow T^* \in \mathscr{B}(Y^* \to X)$ かつ

$$\|T^*\|_{Y \to X} = \|T\|_{\mathscr{D}(T) \to Y}. \tag{7.3}$$

また $X$ が内積空間, $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y$ なら $T \in \mathscr{B}(\mathscr{D}(T) \to Y) \Leftrightarrow T^* \in \mathscr{B}(\mathscr{D}(T^*) \to X)$ かつ

$$\|T^*\|_{\mathscr{D}(T^*) \to X} = \|T\|_{\mathscr{D}(T) \to Y}. \tag{7.4}$$

特に

**証明：**a): $z$, $\widetilde{z}$ が共に (7.1) の $z$ に対する条件を満たすとする。このとき, $\forall x \in \mathscr{D}(T)$ に対し

$$\langle\, Tx, y \,\rangle_Y = \langle\, x, z \,\rangle_X = \langle\, x, \widetilde{z} \rangle_X, \quad \text{よって}\ \langle\, x, z - \widetilde{z} \,\rangle_X = 0.$$

$\mathscr{D}(T)$ は稠密だから $z = \widetilde{z}$. 次に $T^*$ が閉であることを言うため $y_n \in \mathscr{D}(T^*)$, $(y_n, T^*y_n) \to (y, z)$ とする. このとき, $\forall x \in \mathscr{D}(T)$ に対し

$$\langle\, Tx, y_n \,\rangle_Y = \langle\, x, T^*y_n \,\rangle_X, \quad \text{よって}\ n \to \infty\ \text{で}\ \langle\, Tx, y \,\rangle_Y = \langle\, x, z \,\rangle_X.$$

故に $y \in \mathscr{D}(T^*)$, $z = T^*y$.
(7.2): $\Rightarrow$ は (7.1) から明らかなので $\Leftarrow$ を示す. $f_0(x) = \langle Tx, y \,\rangle_Y$ $(x \in \mathscr{D}(T))$ が連続なら $f \in \mathscr{B}(X \to \mathbb{K})$ に一意的に拡張できる (命題 4.2.3). 更に 定理 4.3.4 より $f = \langle \cdot, z \rangle_X$

なる $z \in X$ が存在する．故に $y \in \mathscr{D}(T^*)$, $z = T^*y$.
b): 内積空間で $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y$ を仮定する．(2.16) と $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y$ より

$$\|Tx\|_Y = \sup_{\substack{y \in \mathscr{D}(T^*) \\ \|y\|_Y = 1}} |\langle\, Tx, y \,\rangle_Y| = \sup_{\substack{y \in \mathscr{D}(T^*) \\ \|y\|_Y = 1}} |\langle\, x, T^*y \,\rangle_X|.$$

両辺に $\sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ \|x\|_X = 1}}$ を施し, 右辺に現れる二つの sup を順序交換すると,

$$\|T\|_{\mathscr{D}(T) \to Y} = \sup_{\substack{y \in \mathscr{D}(T^*) \\ \|y\|_Y = 1}} \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ \|x\|_X = 1}} |\langle\, x, T^*y \,\rangle_X| = \sup_{\substack{y \in \mathscr{D}(T^*) \\ \|y\|_Y = 1}} \|T^*y\|_X = \|T^*\|_{\mathscr{D}(T^*) \to X}.$$

特に $X$ がヒルベルト空間,$T \in \mathscr{B}(\mathscr{D}(T) \to Y)$ なら (7.2) より $\mathscr{D}(T^*) = Y$. □

**注：1)** $T$,$T^*$ の関係は次のように図式化すると分かりやすく，記憶にも留めやすい：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ X & \xleftarrow{T^*} & Y \end{array}, \quad \langle\, Tx, y \,\rangle_Y = \langle\, x, T^*y \,\rangle_X, \ \ \forall x \in \mathscr{D}(T), \ \forall y \in \mathscr{D}(T^*). \tag{7.5}$$

**2)** 命題 7.1.1 で, $X, Y$ は単に内積空間としたが, $X, Y$ がヒルベルト空間なら, ここに述べた共役作用素はより一般的なノルム空間での共役作用素 (命題 8.5.1) の特別な場合になる.

**問 7.1.1** $X$,$Y$ は内積空間, $T_j : X \to Y$ は作用素, $\overline{\mathscr{D}(T_j)} = X$ とする $(j = 0, 1)$. $T_0 \subset T_1 \ \Rightarrow\ T_0^* \supset T_1^*$ を示せ.

**問 7.1.2** 記号は 命題 7.1.1 の通り, $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$, $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y$ とする．このとき, $T^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (T^*)^*$ が定義される．このとき, 以下を示せ：i) $T \subset T^{**}$. ii) $T$ が有界なら $T = T^{**}$. なお、命題 7.4.3 でこの問を精密化する.

**定義 7.1.2** $X$ は内積空間とする．次の条件を満たす作用素 $T : X \to X$ を**対称作用素** (symmetric) と言う：

$$\langle\, Tx, y \,\rangle = \langle\, x, Ty \,\rangle \ \ x, y \in \mathscr{D}(T) \tag{7.6}$$

特に $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ のとき $T^* : X \to X$ の定め方（命題 7.1.1）から容易に分かるように、

$$(7.6) \iff T \subset T^*.$$

$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ かつ $T = T^*$ を満たす $T$ を**自己共役作用素** (self-adjoint) と言う．従って $T$ が有界かつ対称なら自己共役である.

**例 7.1.3** (**定数倍**) $X$ を内積空間、$Tx = cx$, $x \in X$ ($c \in \mathbb{K}$ は定数) のとき、$T^*y = c^*y$, $y \in X$. 実際、$x, y \in X$ に対し

$$\langle\, Tx, y \,\rangle = \langle\, cx, y \,\rangle = \langle\, x, c^*y \,\rangle.$$

従って, $T$ が自己共役 $\iff$ $c \in \mathbb{R}$.

**例 7.1.4** (**行列**) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$ とする。$k = (k_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ を $(n, m)$ 行列、$T : X \to Y$ を $Tx = kx$ と定めると、$T^* y = k^* y$, 但し $k^*$ は $(m, n)$ 行列 で、その $(i, j)$ 成分 $= k_{ji}^*$. 実際、

$$\langle\, Tx, y \,\rangle_Y = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n k_{ji} x_i \right) y_j^* = \sum_{i=1}^n x_j \left( \sum_{j=1}^m k_{ji}^* y_j \right)^* = \langle\, x, T^* y \,\rangle_X.$$

従って, $T$ が自己共役 $\iff$ $m = n,\ k_{ij} = k_{ji}^*$.

**例 7.1.5** (**等長同型作用素**) $X$ を内積空間、$T : X \to X$ が等長同型作用素のとき、$T^* = T^{-1}$. 実際、$x, y \in X$ に対し $z = T^{-1} y$ とすると

$$\langle\, Tx, y \,\rangle = \langle\, Tx, Tz \,\rangle = \langle\, x, z \,\rangle = \langle\, x, T^{-1} y \,\rangle.$$

従って, $T$ が自己共役 $\iff$ $T^2 = 1$.

**例 7.1.6** (**射影**) $X$ を内積空間、$P \in \mathscr{B}(X \to X)$ とし, 次の条件を考える：

**a)** $PX \perp (1 - P)X$.

**b)** $P^2 = P$.

**c)** $P^* = P$.

このとき, a) $\iff$ b) & c). 従って, $P$ が直交射影 $\overset{\text{問 3.1.6}}{\iff}$ a) & b) $\iff$ b) & c).

**証明：** a) $\Rightarrow$ c): 任意の $x, y \in X$ で

$$\langle\, Px, y \,\rangle - \langle\, x, Py \,\rangle = \langle\, Px, (1-P)y \,\rangle - \langle\, (1-P)x, Py \,\rangle \overset{\text{a)}}{=} 0, \quad \text{よって } P^* = P.$$

a) & c) $\Rightarrow$ b) & c): 任意の $x, y \in X$ で $\langle\, Px, (1-P)y \,\rangle \overset{\text{c)}}{=} \langle\, x, (P - P^2) y \,\rangle$. よって, 仮定 c) のもとで, 更に a), b) いずれかを仮定すると他方が従う. □

**例 7.1.7** (**積分作用素**) $(S_j, \mathscr{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$ を $\sigma$-有限測度空間、$k \in L^2(\mu_1 \otimes \mu_2)$ とする。

$$Tx(s) = \int_{S_2} k(s, t) x(t) d\mu_2(t), \quad x \in L^2(\mu_2)$$

で定めた積分作用素 $T : L^2(\mu_2) \to L^2(\mu_1)$ に対し

$$T^* y(t) = \int_{S_1} k(s, t)^* y(s) d\mu_1(s), \quad y \in L^2(\mu_1).$$

特に $(S_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (S_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$, $k(s, t) = k(t, s)^*$ なら $T = T^*$, 即ち $T$ は対称である.

**証明：** $d\mu_1(s)$, $d\mu_2(t)$ を $ds$, $dt$ と略記する。

$$\begin{aligned} \langle\, Tx, y \,\rangle_{L^2(\mu_1)} &= \int_{S_1} y(s)^* ds \int_{S_1} k(s, t) x(t) dt \\ &= \int_{S_2} x(t) dt \left( \int_{S_2} k(s, t)^* y(s) ds \right)^* = \langle\, x, T^* y \,\rangle_{L^2(\mu_2)}. \end{aligned}$$ □

**例 7.1.8** (**かけ算作用素**) $(S, \mathscr{A}, \mu)$ を測度空間 $m : S \to \mathbb{C}$ を可測, また、 $S_n \in \mathscr{A}$ は次を満たすとする：

$$S_1 \subset S_2 \subset ..., \quad S = \bigcup_{n \geq 1} S_n,$$
$$\mu(S_n) < \infty, \quad \sup_{S_n} |m| < \infty, \quad \forall n \geq 1.$$

更に $X = L^2(\mu)$ とし，作用素 $T_m : X \to X$ を次で定める：

$$\mathscr{D}(T_m) = \{x \in X \; ; \; mx \in X\}, \quad T_m x = mx, \quad x \in \mathscr{D}(T).$$

このとき、$\overline{\mathscr{D}(T_m)} = X$, $T_m^* = T_{m^*}$. 従って, $T$ が自己共役 $\iff$ $m$ が実数値関数

**証明：1)** $\overline{\mathscr{D}(T_m)} = X$:

$$\mathscr{D}_n = \{x : X \to \mathbb{C} \; ; \; \text{有界，可測}, \; S \backslash S_n \text{ 上 } x \equiv 0\}, \quad \mathscr{D} = \bigcup_{n \geq 1} \mathscr{D}_n$$

とすると，$\mathscr{D} \subset \mathscr{D}(T_m) \subset X$, $\overline{\mathscr{D}} = X$.
**2)** $T_{m^*} \subset T_m^*$: $y \in \mathscr{D}(T_{m^*})$ と仮定し，$y \in \mathscr{D}(T_m^*)$, $T_{m^*}y = T_m^* y$ を言う．仮定より $\forall x \in \mathscr{D}(T_m)$ に対し $x, mx \in X$ より $mxy \in L^1(\mu)$,

$$\int T_m x \cdot y^* d\mu = \int mx \cdot y^* d\mu = \int x \cdot (m^* y)^* d\mu = \int x \cdot (T_{m^*} y)^* d\mu$$

よって $y \in \mathscr{D}(T_m^*)$, $T_{m^*} y = T_m^* y$.
**3)** $T_m^* \subset T_{m^*}$: $y \in \mathscr{D}(T_m^*)$, $T_m^* = z$ と仮定し，$y \in \mathscr{D}(T_{m^*})$, $T_{m^*} y = z$ を言う．仮定より $\forall x \in \mathscr{D}(T_m)$ に対し

$$\int T_m x \cdot y^* d\mu = \int x \cdot z^* d\mu \;\; \text{従って} \;\; \int (m^* y - z) x^* d\mu = 0.$$

特に

$$x = \begin{cases} \frac{m^* y - z}{|m^* y - z|} & \{s \in S_n \; ; \; m^*(s) y(s) \neq z(s)\} \text{ の上で,} \\ 0 & \text{上記集合の外で.} \end{cases}$$

とすると,

$$\int_{S_n} |m^* y - z| d\mu = 0.$$

$n$ は任意だから，$z = m^* y$. 従って $y \in \mathscr{D}(T_{m^*})$, $T_{m^*} y = z$. □

### 7.2　共役作用素に関する一般論とその応用例

7.1 節の具体例で共役作用素イメージがつかめてきたところで、一般論を述べよう．なお，本小節の内容は 8.6 節の内容の特別な場合なので，8.6 節を先に述べれば，この節に述べる事柄を改めて証明する必要は無くなる．一方，ヒルベルト空間の場合は特に重要な上，共役空間の知識が不必要という学習中の利点もある．そこで敢えてヒルベルト空間の場合を独立に述べることにする．

**命題 7.2.1** $X, Y, Z$ を内積空間とする．

**a)** $T, S : X \to Y$ が作用素, $\overline{\mathscr{D}(T) \cap \mathscr{D}(S)} = X$ なら，$T^* + S^* \subset (T+S)^*$. 更に

$$\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(S), \quad \mathscr{D}((S+T)^*) \subset \mathscr{D}(S^*) \tag{7.7}$$

なら $T^* + S^* = (T+S)^*$.

**b)** $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ が作用素, $\overline{\mathscr{D}(T)} = \overline{\mathscr{D}(ST)} = X$, $\overline{\mathscr{D}(S)} = Y$ なら，$T^* S^* \subset (ST)^*$. 更に

$$\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(ST), \quad \mathscr{D}((ST)^*) \subset \mathscr{D}(S^*) \tag{7.8}$$

なら $T^* S^* = (ST)^*$.

**証明：** a):前半を示すために，次の二条件について 1)⇒2) を言う：

**1)** $y \in \mathscr{D}(T^* + S^*)$，$T^* y + S^* y = x'$.

**2)** $y \in \mathscr{D}((T+S)^*)$, $(T+S)^* y = x'$.

$x \in \mathscr{D}(T+S) = \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{D}(S)$ を任意とする．$\mathscr{D}(T^* + S^*) = \mathscr{D}(T^*) \cap \mathscr{D}(S^*)$ を思い出すと，1) より

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad \langle Sx, y \rangle = \langle x, S^* y \rangle.$$

よって

$$\langle (T+S)x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle + \langle x, S^* y \rangle = \langle x, x' \rangle.$$

これで 2) が言えた．後半を示すために (7.7) を仮定し，2)⇒1) を言う．(7.7) より $y \in \mathscr{D}(S^*)$. 従って任意の $x \in \mathscr{D}(T+S) = \mathscr{D}(T)$ に対し

$$\langle x, x' \rangle = \langle (T+S)x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle x, S^* y \rangle.$$

つまり

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, x' - S^* y \rangle.$$

よって $y \in \mathscr{D}(T^*)$ かつ $T^* y = x' - S^* y$. これで 1) が言えた.
b):まず状況を図式化して見やすくしておく：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{S} & Z \\ X & \xleftarrow{T^*} & Y & \xleftarrow{S^*} & Z. \end{array}$$

前半を示すために，次の二条件について 3)⇒4) を言う：

**3)** $z \in \mathscr{D}(T^* S^*)$，$T^* S^* z = x'$.

**4)** $z \in \mathscr{D}((ST)^*)$, $(ST)^* z = x'$.

$x \in \mathscr{D}(ST)$ を任意とすると，3) より

$$\langle\, STx, z \,\rangle = \langle\, Tx, S^*z \,\rangle = \langle\, x, x' \,\rangle.$$

これで 4) が言えた．次に後半を示すために (7.8) を仮定し，4)⇒3) を言う．任意の $x \in \mathscr{D}(ST) = \mathscr{D}(T)$ に対し 4) より $\langle\, STx, z = \langle\, x, x' \,\rangle$. ところが (7.8) より $z \in \mathscr{D}(S^*)$ だから $\langle\, Tx, S^*z \,\rangle = \langle\, x, x' \,\rangle$. よって $S^*z \in \mathscr{D}(T^*)$ かつ $T^*S^*z = x'$. これで 3) が言えた．□

**注：**(7.7),(7.8) は共に $S$ が有界なら成立する．

次の命題は共役作用素のスペクトルを論じる際に有用である：

**命題 7.2.2** $X, Y$ をヒルベルト空間、$T : X \to Y$ を作用素、$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ とする。

$$\mathscr{N}(T^*) = (TX)^{\perp},\ \ \mathscr{N}(T^*)^{\perp} = \overline{TX}, \tag{7.9}$$

$$\mathscr{N}(T) \subset (T^*Y^*)^{\perp},\ \ \mathscr{N}(T)^{\perp} \supset \overline{T^*Y^*}. \tag{7.10}$$

従って

$$\overline{TX} = Y \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \text{ が単射}, \tag{7.11}$$

$$\overline{T^*Y} = X \quad \Longrightarrow \quad T \text{ が単射}. \tag{7.12}$$

なお，以上のうち (7.9) 第二式と (7.11) の $\Leftarrow$ 以外は内積空間でも正しい．また，

$$T \text{ が単射かつ } T^{-1} \in \mathscr{B}(TX \to X) \implies T^*Y = X. \tag{7.13}$$

更に $T$, $T^*$ が共に単射なら $\mathscr{D}(T^{-1}) = TX$ は稠密（従って $(T^{-1})^*$ が定義可能）かつ

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}. \tag{7.14}$$

**証明：**a):(7.9) 第二式は、第一式と 系 3.1.6 から出るので、第一式を示せばよい。所が、

$$\begin{aligned}
y \in \mathscr{N}(T^*) \quad &\Longleftrightarrow \quad y \in \mathscr{D}(T^*),\ T^*y = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad y \in \mathscr{D}(T^*),\ \langle\, Tx, y \,\rangle = 0,\ \forall x \in \mathscr{D}(T) \\
&\Longleftrightarrow \quad y \in Y,\ \langle\, Tx, y \,\rangle = 0,\ \forall x \in \mathscr{D}(T) \ \Longleftrightarrow\ y \in (TX)^{\perp}.
\end{aligned}$$

(7.10): $\forall x \in \mathscr{N}(T)$, $\forall y \in \mathscr{D}(T^*)$ に対し $\langle\, x, T^*y \,\rangle = \langle\, Tx, y \,\rangle = 0$. よって $\mathscr{N}(T) \subset (T^*Y^*)^{\perp}$, $\mathscr{N}(T)^{\perp} \supset T^*Y^*$. 更に $\mathscr{N}(T)^{\perp}$ は閉集合だから (7.10) を得る．
(7.11), (7.12): それぞれ (7.9), (7.10) による．
(7.13): $x' \in X*$ を任意とする．仮定より $g_0 : y \mapsto \langle\, T^{-1}y, x' \,\rangle_X$ は $(TX)^*$ の元．従って $\exists g \in Y^*$, $g|_{TX} = g_0$ (問 4.3.3)，更に $\exists y' \in Y$, $g = \langle\, \cdot, y' \,\rangle_Y$ (定理 4.3.4)．このとき $\forall x \in \mathscr{D}(T)$ に対し

$$\langle\, Tx, y' \,\rangle_Y = g(Tx) \overset{g|_{TX}=g_0}{=} g_0(Tx) = \langle\, T^{-1}Tx, x' \,\rangle_X = \langle\, x, x' \,\rangle_X.$$

故に $y' \in \mathscr{D}(T^*)$, $T^*y' = x'$.
(7.14): $T$, $T^*$ が共に単射なら (8.32) より $\mathscr{D}(T^{-1}) = TX$ は稠密．また

$$\begin{aligned} x' \in \mathscr{D}((T^{-1})^*),\ (T^{-1})^*x' = y' &\iff \forall y \in \mathscr{D}(T^{-1}) = TX,\ \langle\, T^{-1}y, x' \,\rangle_X = \langle\, y, y' \,\rangle_Y \\ &\iff \forall x \in \mathscr{D}(T),\ \langle\, x, x' \,\rangle_X = \langle\, Tx, y' \,\rangle_Y \\ &\iff y' \in \mathscr{D}(T^*),\ T^*y' = x' \\ &\iff x' \in \mathscr{D}((T^*)^{-1}),\ (T^*)^{-1}x' = y'. \end{aligned}$$

よって $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. □

**注：1)**$T \in \mathscr{B}(X \to Y)$ なら (7.10) の第一式で（従って第二式でも）等号が成立する（問 7.2.1）.
**2)** 次のようにして (8.34) の逆も示せる (但し定理 10.5.5 を用いる). $T^*$ を全射とする．このとき，(7.11) より $T$ は単射．また，$\forall x \in X$, $\exists y \in \mathscr{D}(T^*)$, $x = T^*y$. よって任意の $b \in TX$ に対し

$$\langle\, T^{-1}b, x \,\rangle = \langle\, T^{-1}b, T^*y \,\rangle = \langle\, TT^{-1}b, y \,\rangle = \langle\, b, y \,\rangle.$$

従って任意の有界集合 $B \subset TX$ に対し：

$$\sup_{b \in B} |\langle\, T^{-1}b, x \,\rangle| = \sup_{b \in B} |\langle\, b, y \,\rangle| < \infty.$$

以上と定理 10.5.5 より $T^{-1}B$ は有界，よって $T^{-1} \in \mathscr{B}(TX \to X)$.

**問 7.2.1** $X, Y$ をヒルベルト空間、$T : X \to Y$ を作用素、$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$, $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y$ とするとき、以下を示せ：i) $\mathscr{N}(T) = \mathscr{D}(T) \cap (T^*Y)^\perp$ ii) 特に $T \in \mathscr{B}(X \to X)$ なら $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \iff \overline{(\lambda^* - T^*)Y} \neq X$.

**命題 7.2.3** $X, Y$ をヒルベルト空間、$T : X \to Y$ は作用素，$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ とし，以下の条件を考える：

**a)** $T$ が全単射，$T^{-1} \in \mathscr{B}(Y \to X)$.

**b)** $T$ が単射，$\overline{TX} = Y$, $T^{-1} \in \mathscr{B}(TX \to X)$.

**c)** $T^*$ が全単射,$(T^*)^{-1} \in \mathscr{B}(X \to Y)$.

このとき，a) $\Rightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c). また，b) から (7.14) が従う. 更に $T$ が閉なら，a)–c) は同値.

**証明：**a), b) の関係は補題 5.2.10 で既知.
b) $\Rightarrow$ c), (7.14): (7.11) より $T^*$ は単射で (7.14) が成立．(7.13) より $T^*$ は全射．また，$\mathscr{D}(T^{-1}) = TX \subset Y$ は稠密かつ $T^{-1} \in \mathscr{B}(TX \to X)$. よって命題 7.1.1 より $(T^{-1})^* \in \mathscr{B}(X \to Y)$. 所が (7.14) より $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
c) $\Rightarrow$ b): (7.12) より $T$ は単射. 従ってまた (8.35) が成立. $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} \in \mathscr{B}(X \to Y)$ と命題 7.1.1b より $T^{-1} \in \mathscr{B}(TX \to X)$. □

**命題 7.2.4** (**共役作用素のスペクトル**) $X$ をヒルベルト空間、$T : X \to X$ を作用素、$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。このとき、

$$\mathscr{N}(\lambda^* - T^*) = ((\lambda - T)X)^\perp, \ \ \mathscr{N}(\lambda^* - T^*)^\perp = \overline{(\lambda - T)X}. \tag{7.15}$$

特に

$$\mathscr{N}(\lambda^* - T^*) = 0 \iff \overline{(\lambda - T)X} = X. \tag{7.16}$$

なお，(7.15) 第一式は内積空間でも正しい．また，

$$\rho(T^*) = \rho(T)^*, \ \text{即ち} \ \ \sigma(T^*) = \sigma(T)^*. \tag{7.17}$$

かつ $\lambda \in \rho(T)$ に対し

$$(T^* - \lambda^*)^{-1} = [(T - \lambda)^{-1}]^*. \tag{7.18}$$

**証明：**(7.15):(7.9) から従う.
(7.17)–(7.18): 次を言えばよい：

**1)** $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T^* - \lambda^*$ が全単射かつ $(T^* - \lambda^*)^{-1} = [(T - \lambda)^{-1}]^*$

所がこれは命題 7.2.3 より分かる． □

**注**：命題 7.2.3 より $\rho_0(T^*) \supset \rho_0(T)^*$ も分かる．次に述べる命題は，与えられた作用素の共役を求める際にも有用である：

**命題 7.2.5** $X$ を内積空間，$S, T : X \to X$ を作用素，$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$, $T^* \supset S$ とする．更に，以下の条件のどれかが成立すれば $T^* = S$.

**a)** ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\overline{(T - \lambda)X} = X$, $(S - \lambda^*)X = X$.

**b)** ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\lambda \in \rho(T)$, $\lambda^* \in \rho_0(S)$ ((6.2) 参照).

**c)** $X$ はヒルベルト空間，$S$ は閉作用素，かつある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\lambda \in \rho(T)$, $\lambda^* \in \rho(S)$.

**証明：**a): (7.15) 第一式は内積空間でも正しい. そこで：

$$\mathscr{N}(T^* - \lambda^*) \stackrel{(7.15)}{=} ((T - \lambda)X)^\perp = \left(\overline{(T - \lambda)X}\right)^\perp = X^\perp = 0.$$

故に

$$T^* - \lambda^* \text{ は単射}, \ S - \lambda^* \subset T^* - \lambda^*, \ (S - \lambda^*)X = X.$$

よって $S - \lambda^* = T^* - \lambda^*$ (全射の真の拡張は単射であり得ない), 即ち $S = T^*$.
b):$\lambda \in \rho(T)$ より $\overline{(T - \lambda)X} = X$. また $\lambda^* \in \rho_0(S)$ より $(S - \lambda^*)X = X$. 以上から a) に帰着.
c):仮定より $\rho(S) = \rho_0(S)$(命題 6.1.2). よって b) に帰着. □

**例 7.2.6** (**一階微分**) $X = L^2(\mathbb{R})$ とし, 作用素 $T : X \to X$ を次で定める：

$$\mathscr{D}(T) = \{x \in X \cap AC(\mathbb{R}), \ x' \in X\}, \ \ Tx = x'.$$

このとき、

**a)** $T^* = -T$. 従って $\mathbf{i}T$ は自己共役.

**b)** $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{c}}(T) = \mathbf{i}\mathbb{R}$.

**証明：** a): $-T \subset T^*$: $x, y \in \mathscr{D}(T)$ とする.

$$(xy^*)' = x'y^* + x(y')^*, \ \text{a.e.}$$

従って，$s < t$ に対し

$$\int_s^t x'y^* = [xy^*]_s^t - \int_s^t x(y')^*.$$

所で $xy^* \in L^1(\mathbb{R})$ より $\underline{\lim}_{s\to\infty} xy^*(\pm s) = 0$. よって、

$$\int_{\mathbb{R}} x'y^* = -\int_{\mathbb{R}} x(y')^* \ \text{即ち} \ \langle\, Tx, y \,\rangle = -\langle\, x, y' \,\rangle.$$

故に $y \in \mathscr{D}(T^*)$, $T^*y = -y'$.
$T^* \subset -T$:$X$ はヒルベルト空間かつ $T$ は (従って $-T$ も) 閉作用素 (例 5.2.7). また $\sigma(T) \stackrel{(6.4)}{=} \mathbf{i}\mathbb{R}$ より $1 \in \rho(T) \cap \rho(-T)$. 以上より $T, -T$ は命題 7.2.5c の $T, S$ に対する条件を満たす.
b): $\sigma(T) = \mathbf{i}\mathbb{R}$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$ (例 6.1.4). 従って $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset$ を言えばよい．ところが $T^* = -T$ より $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$\overline{(\lambda - T)X} \stackrel{(7.15)}{=} \mathscr{N}(\lambda^* + T)^{\perp} = 0^{\perp} = X. \ \text{よって} \ \sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset. \qquad \Box$$

**例 7.2.7** (**二階微分**) $X = L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{D}(T) = \left\{x \in X \cap AC^2(\mathbb{R})\ ;\ x', x'' \in X\right\}, \ \ Tx = x'' \ \ (\text{定義 5.2.6 参照}).$$

とする．このとき，$T^* = T$.

**証明：** a): $T \subset T^*$: $x, y \in \mathscr{D}(T)$,$s < t$ とする.

$$\int_s^t x''y^* = [x'y^*]_s^t - \int_s^t x'(y')^* = [x'y^*]_s^t - [x(y')^*]_s^t + \int_s^t x(y'')^*.$$

所で $x'y^*, x(y')^* \in L^1(\mathbb{R})$ より $\underline{\lim}_{s\to\infty} x'y^*(\pm s) = \underline{\lim}_{s\to\infty} x(y')^*(\pm s) = 0$. よって、

$$\int_{\mathbb{R}} x''y^* = \int_{\mathbb{R}} x(y'')^* \ \text{即ち} \ \langle\, Tx, y \,\rangle = \langle\, x, Ty \,\rangle.$$

故に $y \in \mathscr{D}(T^*)$, $T^*y = Ty$.
$T^* \subset T$:$X$ はヒルベルト空間, $T$ は閉作用素 (例 6.1.5 の後の注). また $\sigma(T) \stackrel{(6.6)}{=} (-\infty, 0]$ より $1 \in \rho(T)$. 以上と命題 7.2.5c より $T^* = T$. $\Box$

## 7.3　対称作用素・自己共役作用素の性質

対称作用素・自己共役作用素の定義と例は 7.1–7.2 節で与えたが, ここでは, そのスペクトルを中心に一般論を論じよう。

**命題 7.3.1** $X$ は内積空間, 作用素 $T : X \to X$ は対称とするとき、以下が成立する：

**a)** $x, y \in \mathscr{D}(T)$ に対し

$$\langle Ty, x \rangle = \langle Tx, y \rangle^*. \ \text{特に} \ \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}. \tag{7.19}$$

**b)** $x \in \mathscr{D}(T)$, $\lambda = \xi + \mathbf{i}\eta$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$ に対し

$$\|(\lambda - T)x\|^2 = \|(\xi - T)x\|^2 + \eta^2\|x\|^2. \tag{7.20}$$

**c)** $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset \mathbb{R}$.

**d)** $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_j \in \mathscr{N}(\lambda_j - T)$ $(j = 1, 2)$ なら $x_1 \perp x_2$.

**e)** $T$ が有界なら,

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| = \|T\|. \tag{7.21}$$

**証明：** a): $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = \langle Tx, y \rangle^*$.
b):

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - T)x\|^2 &= \|(\xi - T)x + \mathbf{i}\eta x\|^2 \\
&= \|(\xi - T)x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\underbrace{\langle (\xi - T)x, \mathbf{i}\eta x \rangle}_{(*)} + \eta^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

所が $\xi - T$ は対称なので、a) より上の内積 $(*)$ は純虚数、従って $\mathrm{Re}(*) = 0$.
c): $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ なら $x \in \mathscr{N}(\lambda - T)\backslash\{0\}$ がとれる。これに (7.20) を適用し $\eta = 0$.
d): $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle - \langle x_1, Tx_2 \rangle = 0$.
e): 等式を $\leq$ と $\geq$ に分けて考える. $\leq$ はシュワルツの不等式から明らかなので, $\geq$ を示す。左辺の上限を $s$ とする. 任意の $x \in X$, $\|x\| = 1$ に対し $s \geq \|Tx\|$ を言えばよい. その際, $Tx \neq 0$ としてよい. 今, $u, v \in X$ に対し

$$\begin{aligned}
4\,\mathrm{Re}\langle Tu, v \rangle &\overset{(7.19)}{=} 2\langle Tu, v \rangle + 2\langle Tv, u \rangle \\
&= \langle T(u + v), u + v \rangle - \langle T(u - v), u - v \rangle \\
&\leq s\left(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2\right) = 2s\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).
\end{aligned}$$

そこで $u = \|Tx\|^{1/2}x$, $v = \|Tx\|^{-1/2}Tx$ とすると、上の不等式から

$$4\|Tx\|^2 \leq 2s\left(\|Tx\| + \|Tx\|\right), \ \text{即ち} \ \|Tx\| \leq s. \qquad \square$$

**問 7.3.1** $X$ はヒルベルト空間, $T \in \mathscr{B}(X \to X)$ とするとき, $T^*T$, $TT^*$ の対称性および $\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$ を示せ.

$X$ がヒルベルト空間なら, 対称作用素 $T$ の自己共役性は, 性質: $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho_0(T)$ で特徴付けられる：

**命題 7.3.2** (**自己共役作用素のスペクトル**) $X$ は内積空間, $T : X \to X$ は対称作用素とし，以下の条件を考える：

**a)** $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho_0(T)$.

**b)** ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $(T-\lambda)X = (T-\lambda^*)X = X$.

**c)** $T = T^*$.

このとき a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). また，$X$ がヒルベルト空間なら a)–c) は同値.

**証明：**a) $\Rightarrow$ b): 明らか.
b) $\Rightarrow$ c): 命題 7.2.5a の条件が $S = T$ で満たされる.
c) $\Rightarrow$ a) ($X$ がヒルベルト空間): $T = T^*$ より $T$ は閉．よって $\rho_0(T) \stackrel{\text{命題 6.1.2}}{=} \rho(T)$．従って $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(T)$ を言えば十分．そこで $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ とする。(7.20) より $\lambda - T$ は単射かつ $(\lambda - T)^{-1}$ は $(\lambda - T)X$ 上連続。またこれは $\lambda$ を $\lambda^*$ に置き換えても同じだから

$$\overline{(\lambda - T)X} \stackrel{(7.15)}{=} \mathscr{N}(\lambda^* - T)^{\perp} = 0^{\perp} = X.$$

よって $\lambda \in \rho(T)$. □

**注：**対称であって自己共役でない作用素の例は境界条件を持つ微分作用素を適当な境界条件のもとで考えることにより与えられる（問 10.4.1, 問 10.4.3）

**問 7.3.2** $X$ はヒルベルト空間、$T : X \to X$ は自己共役作用素とする. $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T) \iff \overline{(\lambda - T)X} = X$ を示せ. このことから $\sigma(T) = \emptyset$ が分かる.

**問 7.3.3** $X$ はヒルベルト空間、$T_0, T_1 : X \to X$ は共に自己共役作用素かつ $T_0 \subset T_1$ のとき，$T_0 = T_1$ を示せ.

## 7.4 ($\star$) 可閉性と共役作用素の関係

命題 7.4.3 のための補題を述べる：

**補題 7.4.1** 記号は 命題 7.1.1 の通り, $\mathscr{G}(T^*) = \{(y, T^*y) \; ; \; y \in \mathscr{D}(T^*)\}$ ($T^*$ のグラフ), また $J(x,y) = (-y, x)$, $(x,y) \in X \times Y$ とする. このとき,

$$\mathscr{G}(T^*) = (J\mathscr{G}(T))^{\perp}, \tag{7.22}$$

但し上式右辺はヒルベルト空間 $Y \times X$ （定義 2.2.1, 問 2.3.3 参照）における直交補空間である.

**証明：**

$$\begin{aligned}(y,z)\in(J\mathscr{G}(T))^\perp &\iff \langle\,(y,z),(-Tx,x)\,\rangle_{Y\times X},\ \ \forall x\in\mathscr{D}(T)\\ &\iff \langle\,Tx,y\,\rangle_Y=\langle\,x,z\,\rangle_X,\ \ \forall x\in\mathscr{D}(T)\\ &\iff y\in\mathscr{D}(T^*),\ z=T^*y.\end{aligned}$$

□

**補題 7.4.2** $X,Y$ はヒルベルト空間, $T:X\to Y$ は閉作用素, $\overline{\mathscr{D}(T)}=X$ とする．このとき, $\overline{\mathscr{D}(T^*)}=Y$ かつ $T=T^{**}$.

**証明：** まず $\overline{\mathscr{D}(T^*)}=Y$, 即ち $\mathscr{D}(T^*)^\perp=0$ を示す．仮定より $\mathscr{G}(T)\subset X\times Y$ は閉部分空間, 従って $J\mathscr{G}(T)\subset Y\times X$ もそう．更に$Y\times X$ はヒルベルト空間 だから,

**1)**
$$\mathscr{G}(T^*)^\perp\stackrel{(7.22)}{=}(J\mathscr{G}(T))^{\perp\perp}\stackrel{(3.19)}{=}J\mathscr{G}(T).$$

よって,

$$\begin{aligned}y\in\mathscr{D}(T^*)^\perp &\iff 0=\langle\,y,z\,\rangle_Y=\langle\,(y,0),(z,T^*z)\,\rangle_{Y\times X},\ \ \forall z\in\mathscr{D}(T^*)\\ &\iff (y,0)\in\mathscr{G}(T^*)^\perp\stackrel{1)}{=}J\mathscr{G}(T)\implies y=0.\end{aligned}$$

次に $T^{**}=T$ を言う．問 7.1.2 より $T^{**}\subset T$ だけで十分. $x\in\mathscr{D}(T^{**})$, $y=T^{**}x$ なら

$$\forall z\in\mathscr{D}(T^*),\ \ 0=\langle\,z,y\,\rangle_Y-\langle\,T^*z,x\,\rangle_X=\langle\,(y,-x),(z,T^*z)\,\rangle^*_{Y\times X}$$

従って $(y,-x)\in\mathscr{G}(T^*)^\perp=J\mathscr{G}(T)$, 即ち $(x,y)\in\mathscr{G}(T)$. □

**命題 7.4.3** (**可閉性と共役作用素の関係**) $X,Y$ はヒルベルト空間, $T:X\to Y$ は作用素, $\overline{\mathscr{D}(T)}=X$ とする．このとき, 次は同値：

**a)** $T$ が可閉.

**b)** $\overline{\mathscr{D}(T^*)}=Y$.

また, a)–b) どちらか（従って両方）が成り立つなら

$$(\overline{T})^*=T^*,\ \ \overline{T}=T^{**}.$$

**証明：** a) $\Rightarrow$ b): 補題 7.4.2 から $\overline{\mathscr{D}((\overline{T})^*)}=Y$ かつ $\overline{T}=((\overline{T})^*)^*$. 故に $(\overline{T})^*=T^*$ を言えばよい. 所が, $J\mathscr{G}(\overline{T})=J\overline{\mathscr{G}(T)}=\overline{J\mathscr{G}(T)}$ より

$$\mathscr{G}((\overline{T})^*)=J\mathscr{G}(\overline{T})^\perp=J\mathscr{G}(T)^\perp=\mathscr{G}(T^*),\ \ \text{よって}\ \ (\overline{T})^*=T^*.$$

b) $\Rightarrow$ a): 問 7.1.2 による. □

## 7.5 $(\star)$ ヒルベルト-シュミットの展開定理

**命題 7.5.1** $X$ は内積空間、$T \in \mathscr{B}(X \to X)$ は対称、$e \in S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X\ ;\ \|x\| = 1\}$ とする。このとき、次は同値：

**a)** $e \in \mathscr{N}(\|T\| - T) \cup \mathscr{N}(-\|T\| - T)$.

**b)** $|\langle Te, e \rangle| = \|T\|$.

特に $T$ がコンパクトなら、上のような $e \in S$ が存在する。

**証明：** a) $\Longleftrightarrow$ b): $\Rightarrow$ は明らかなので、逆を示す。任意の $x \in X$ に対し

$$\langle (\|T\| \pm T)x, x \rangle = \|T\|\|x\|^2 \pm \langle Tx, x \rangle \geq 0.$$

従って、二次形式 $(x, y) \mapsto \langle (\|T\| \pm T)x, y \rangle$ に対し一般化されたシュワルツの不等式 (2.16) が成立：

**1)** $$\langle (\|T\| \pm T)x, y \rangle^2 \leq \langle (\|T\| \pm T)x, x \rangle \langle (\|T\| \pm T)y, y \rangle.$$

今 $e$ が b) を満たすなら

$$\langle (\|T\| + T)e, e \rangle = 0,\ \text{ または }\ \langle (\|T\| - T)e, e \rangle = 0.$$

従って、1) より

$$\langle (\|T\| + T)e, y \rangle^2 = 0,\ \text{ または }\ \langle (\|T\| - T)e, y \rangle^2 = 0.$$

$y$ は任意なので、$(\|T\| + T)e = 0$ または $(\|T\| - T)e = 0$.
次に $T$ をコンパクトとし、b) を満たす $e \in S$ の存在を示す。(7.21) より $e_n \in S$ を

$$|\langle Te_n, e_n \rangle| \longrightarrow \|T\|$$

となるようにとれる。更に $T$ はコンパクトなので (部分列をとり直すことで) $Te_n$ が収束するとしてよい。$e_n$ が収束すれば、その極限 $e$ は求めるものである。所が

$$\|e_n - \|T\|^{-1}Te_n\|^2 = 1 - 2\|T\|^{-1}\langle e_n, Te_n\rangle + \|T\|^{-2}\underbrace{\|Te_n\|^2}_{\leq \|T\|^2} \leq 2 - 2\|T\|^{-1}\langle e_n, Te_n\rangle \longrightarrow 0.$$

よって $e_n$ は収束する。 □

**定理 7.5.2** $X$ は内積空間、$T \in \mathscr{K}(X \to X)$ は対称, $\dim X = \infty$, $r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim TX (\leq \infty)$ とする。このとき、正規直交系 $(e_n)_{n \geq 1}$ 及び実数列 $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ で次のようなものが存在する：

$$\|T\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots,\quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.23}$$

$$e_n \in \mathscr{N}(\lambda_n - T),\ \ n = 1, 2, \ldots \tag{7.24}$$

$$r < \infty \text{ なら } \lambda_r \neq \lambda_{r+1} = 0, \tag{7.25}$$

$$r = \infty \text{ なら } \lambda_n \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots \text{ かつ } \lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0, \tag{7.26}$$

$$Tx = \sum_{n=1}^{r} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n. \tag{7.27}$$

**証明：** $\lambda_n \in \mathbb{R}$ 及び $X$ の ONS $e_n$, $n = 1, 2, ...$ を次の手順で構成する：命題 7.5.1 の $e \in S$ を $e_1$ とすると、$e_1 \in \mathscr{N}(\lambda_1 - T)$, 但し $|\lambda_1| = \|T\|$. $(\lambda_j)_{j=1}^n$, $(e_j)_{j=1}^n$ が構成されたとき、$R_n = \oplus_{j=1}^n \mathbb{K} e_j$ とおく。$X, T$ の代りに $R_n^\perp$, $T|_{R_n^\perp}$ に対し命題 7.5.1 を適用し $e_{n+1} \in S \cap R_n^\perp$ を $e_{n+1} \in \mathscr{N}(\lambda_{n+1} - T)$, 但し $|\lambda_{n+1}| = \|T|_{R_n^\perp}\|$ なるようにとれる。$X$ は無限次元なので、この操作は無限に続けることができる。このとき、$(e_n)_{n \geq 1}$ は $X$ の ONS であり、(7.23)–(7.24) を満たす。次に (7.25)–(7.26) を示すため、以下の 1)–3) を言う：

**1)** $n < r + 1$ なら $\lambda_n \neq 0$,

**2)** $r < \infty$ なら $\lambda_{r+1} = 0$,

**3)** $r = \infty$ なら $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

1):$\lambda_n = 0$ とする．このとき，$\|T|_{R_{n-1}^\perp}\| = \lambda_n = 0$ より $T|_{R_{n-1}^\perp} = 0$. また，$\dim R_{n-1} < \infty$ と命題 3.1.5 より $X = R_{n-1} \oplus R_{n-1}^\perp$. 従って $TX = TR_{n-1} \subset R_{n-1}$. よって $r = \dim TX \leq n - 1$.
2): $\lambda_{r+1} \neq 0$ とする．上記 1) より $\lambda_1, .., \lambda_r$ も $\neq 0$. よって (7.24) より $e_1, ..., e_{r+1} \in TX$. これは $\dim TX = r$ に反する．
3): $e_n$ は無限個の正規直交系なので収束部分列を持たない（問 3.2.6)。また、上記 1) より 全ての $n = 1, 2, ..$ で $\lambda_n \neq 0$. 今、 $e_n = T(\lambda_n^{-1} e_n)$ 及び $T$ のコンパクト性から $|\lambda_n^{-1}| = \|\lambda_n^{-1} e_n\|$ は非有界。つまり $\inf_n |\lambda_n| = 0$.
最後に (7.27) を示す。

$$x_n = \sum_{j=1}^n \langle\, x, e_j \,\rangle e_j, \quad y_n = x - x_n$$

とすると $y_n \in R_n^\perp$ より

$$\|Ty_n\| \leq \|T|_{R_n^\perp}\| \|y_n\| = |\lambda_{n+1}| \|y_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \overset{(7.25)\text{–}(7.26)}{\longrightarrow} 0.$$

従って、

$$Tx - \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_n \langle\, x, e_j \,\rangle e_j = T(x - x_n) = Ty_n \longrightarrow 0. \qquad \square$$

**系 7.5.3 （固有関数展開）** 記号は 定理 7.5.2 の通りとする。$X$ がヒルベルト空間なら、任意の $x \in X$ を次のように表すことができる：

$$x = \sum_{n=1}^r \langle\, x, e_n \,\rangle e_n + x', \; x' \in (TX)^\perp = \mathscr{N}(T).$$

**証明：** 定理 7.5.2 で

$$x \mapsto \sum_{n=1}^r \langle\, x, e_n \,\rangle e_n$$

は $\overline{TX}$ への直交射影を与える。よって $X = \overline{TX} \oplus (TX)^\perp$ (直交分解) が成立。また，(7.9) より $(TX)^\perp = \mathscr{N}(T)$. $\square$