2022 年度 複素関数論[1]

$\delta(\hat{}_{\varepsilon}\hat{})\delta$

吉田伸生[2]

授業内容

以下，番号は教科書「複素関数の基礎」(吉田伸生著) のものとします.

- 4 月 14 日 (木)：全体の展望
- 4 月 21 日 (木)：1.4, 1.5, 2.1, 2.2 節
- 4 月 28 日 (木): 2.3 節
- 5 月 12 日 (木): 2.4, 3.1, 3.2 節
- 5 月 19 日 (木): 3.2, 3.3 節
- 5 月 26 日 (木): 3.4, 3.6 節
- 6 月 2 日 (木): 4.1, 4.2 節
- 6 月 9 日 (木): 4.3, 4.4 節
- 6 月 16 日 (木): 5.1, 5.2 節
- 6 月 23 日 (木): 5.3, 5.4 節
- 7 月 7 日 (木): 5.4 節 (続き), 6.1 節
- 7 月 14 日 (木): 6.2, 6.3 節

課題

以下，問の番号は教科書「複素関数の基礎」(吉田伸生著) のものとします.

- 4 月 21 日 (木) 締め切り：問 2.2.1 に解答せよ.
- 4 月 28 日 (木) 締め切り：問 2.2.2 の (2.20), (2.21) を示せ.
- 5 月 12 日 (木) 締め切り：問 2.3.1 i) に解答せよ.
- 5 月 19 日 (木) 締め切り：問 2.4.1 に解答せよ.

[1] 2022 年 7 月 10 日.

[2] [e-mail] noby@math.nagoya-u.ac.jp, [URL] http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~noby, [ツイッター]@noby_noby

- 5 月 26 日 (木) 締め切り：問 3.2.1 に解答せよ．

- 6 月 2 日 (木) 締め切り：問 3.6.1 に解答せよ．

- 6 月 9 日 (木) 締め切り：問 4.2.1 に解答せよ．なお，教科書に誤植があるので次のように訂正します．
  $D \subset \mathbb{C}$ は開，$C \subset D$ は区分的 C^1 級曲線，$h : D \to \mathbb{C}$ は正則とする．また，C を $g : [\alpha, \beta] \to D$ と表すとき，$h \circ g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ と表される曲線を $h(C)$ と記す．このとき，$h(C)$ は区分的 C^1 級であり，連続関数 $f : h(C) \to \mathbb{C}$ に対し次の等式をみたすことを示せ:
  $$\int_{h(C)} f = \int_C (f \circ h)h'.$$

- 6 月 16 日 (木) 締め切り：問 4.4.5 i) に解答せよ．

- 6 月 23 日 (木) 締め切り：問 3.6.4 に解答せよ (5 月 26 日の授業範囲からの出題).

- 6 月 30 日 (木) 締め切り：問 5.3.1 に解答せよ．

- 7 月 14 日 (木) 締め切り：問 6.1.2 ii) に解答せよ (i) は証明なしで用いてよい).

- 7 月 21 日 (木) 締め切り：問 6.3.4 に解答せよ (問 2.4.3 の結果は証明なしで用いてよい).

注意:

- できるだけ巻末の略解を見ず, 自分の頭と手を動かして考えましょう．その上で, どうしても解答の手がかりが得られないときは, 巻末の略解を参考にしても構いません．最終的には自分で理解し，自分の言葉で答案を書きましょう．略解の丸写しは 0 点とします．

- 一般に質問は歓迎ですが，締め切り前の課題の解答を誘導するような質問に限ってはお答えできません（答えたいのは山々ですが, 特定受講生だけの課題提出を手助けするのは公平性の観点から問題です）．締め切り後に改めて質問して下さい．

- 課題は pdf ファイルで提出して下さい．必要ならネット上のファイル変換ソフトを利用するといいでしょう．

- 採点者は多くの答案を読まなければなりません．採点者に余分な負担をかけないために，鮮明で読みやすい画像を添付してください．**特に横向きや，逆さ向きの画像は極めて迷惑です．必ず正しい向きに回転してから添付して下さい**．

- 　課題の採点に関する問い合わせは採点者の松永光浩さん (ティーチングアシスタント: mitsuhiro.matsunaga.e6@math.nagoya-u.ac.jp) に連絡して下さい．

複素関数論概観

複素関数論はひと言でいうと「正則関数の解析学」である．

• **複素数** (定義 1.1.1)

▶ $\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) $(x, y \in \mathbb{R})$ を記号 $z = x + \mathbf{i}y$ と表し，複素数とよぶ．また複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と記す．

▶ 複素数 $z = x + \mathbf{i}y$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z &\stackrel{\mathrm{def}}{=} x, \ \ \mathrm{Im}\, z = y \ \ (z \text{ の}\textbf{実部・虚部}), && (0.1) \\ \overline{z} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} x - \mathbf{i}y \ \ (z \text{ の}\textbf{共役}), && (0.2) \\ |z| &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}. && (0.3) \end{aligned}$$

▶ 複素数 $z_j = x_j + \mathbf{i}y_j$ $(j = 1, 2)$ に対し, それらに関する演算を以下のように定める[3]：

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &\stackrel{\mathrm{def}}{=} (x_1 \pm x_2) + \mathbf{i}(y_1 \pm y_2), && (0.4) \\ z_1 z_2 &\stackrel{\mathrm{def}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathbf{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2), \quad \frac{z_1}{z_2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}, && (0.5) \end{aligned}$$

ただし商 z_1/z_2 は $z_2 \neq 0$ の場合に限り定義する．(0.5) で $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$ として次が得られる：

$$\mathbf{i}^2 = -1. \tag{0.6}$$

• **今後よく使う記号・用語** (定義 1.1.4, 定義 1.6.1)

▶ $a \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned} D(a, r) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{|z - a| < r\}, \ \ r \in (0, \infty], && (0.7) \\ \overline{D}(a, r) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{|z - a| \leq r\}, \ \ r \in [0, \infty), && (0.8) \\ C(a, r) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{|z - a| = r\}, \ \ r \in [0, \infty). && (0.9) \end{aligned}$$

$D(a, r)$, $\overline{D}(a, r)$, $C(a, r)$ をそれぞれ**開円板**, **閉円板**, **円周**, また，それらについて a を**中心**, r を**半径**とよぶ．半径 ∞ の開円板は全複素平面，また半径 0 の閉円板は中心のみからなる一点集合である．

▶ $A \subset \mathbb{C}$ が次の性質を持つとき A は**開**であるという:

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対し } D(a, r) \subset A \text{ をみたす } r > 0 \text{ が存在する．} \tag{0.10}$$

集合が開であるとは，直観的には「境界を含まない」ことである．例えば，$\mathbb{C}$ や開円板は開であり，半径が有限な閉円板は開でない．

• **正則関数の定義** (定義 3.2.1)

$D \subset \mathbb{C}$ は開集合, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \in D$ とする．

▶ 次のような $\gamma \in \mathbb{C}$ が存在するとき, f は z で**複素微分可能**であるという：

$$w \in D \backslash \{z\}, \ w \to z \implies \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \longrightarrow \gamma. \tag{0.11}$$

---

[3] 複号は全て同順.

このとき γ を，f の z における**複素微分係数** $f'(z)$ と記す．

▶ f が D の各点で複素微分可能なら，f は D 上**正則** であるという．

- **正則関数の例**

▶ $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $z \in \mathbb{C}$ に対し次の形の級数を**べき級数**という：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{0.12}$$

べき級数が $z \in D(0,r)$ の範囲で絶対収束すれば $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ は正則である (命題 3.4.1). 特に以下の関数は $z \in \mathbb{C}$ について正則である．

$$\begin{aligned} \exp z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{指数関数}) \\ \cosh z &= \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}, \quad \sinh z = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} \quad (\text{双曲余弦・双曲正弦}) \\ \cos z &= \frac{\exp(\mathbf{i}z)+\exp(-\mathbf{i}z)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(\mathbf{i}z)-\exp(-\mathbf{i}z)}{2} \quad (\text{余弦・正弦}). \end{aligned}$$

指数関数は次の性質をもつ (命題 2.1.2). $z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\exp(z+w) = \exp z \exp w, \quad |\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z). \tag{0.13}$$

- **コーシー・リーマン方程式** (命題 3.6.1)

$D \subset \mathbb{C}$ は開，$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $z \in D$ とする．

a) f が z において x, y について偏微分可能なら，以下の等式 (0.14) と，等式の組 (0.15) は同値である．

$$f_x(z) + \mathbf{i} f_y(z) = 0, \tag{0.14}$$

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z). \tag{0.15}$$

等式 (0.14), または等式の組 (0.15) を**コーシー・リーマン方程式** とよぶ．

b) f は z において複素微分可能なら，f は z においてコーシー・リーマン方程式をみたす．

- **複素線積分** (定義 4.2.1)

$D \subset \mathbb{C}$ は開集合, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ は連続とする．また，$I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$，$g : I \to D$ を区分的 C^1 級曲線とし，g を大文字 C であらわす．

▶ 関数 f の, 曲線 C に沿った**複素線積分** $\int_C f$ ($\int_C f(z)dz$ とも記す) を次のように定める．

$$\int_C f = \int_C f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt. \tag{0.16}$$

- **コーシーの定理** (系 4.3.3, 定理 4.6.6, 定理 7.3.1, , 定理 7.5.4)

$g : [\alpha, \beta] \to C$ で表される曲線 C において $g(\alpha) = g(\beta)$ なら，C は**閉曲線**であるという．

コーシーの定理は，ごく大雑把には次のように述べることができる．$D \subset \mathbb{C}$ が開，$f : D \to \mathbb{C}$ が正則とするとき，区分的 C^1 級閉曲線 $C \subset D$ に対し，

$$\text{「}C \text{ が } D \text{ に属さない点を囲まない」} \tag{0.17}$$
$$\Longrightarrow \int_C f = 0. \tag{0.18}$$

より厳密には「」つきの条件 (0.17) の定式化が問題となり，この部分の定式化に応じ，コーシーの定理にもいくつかの種類がある (系 4.3.3, 定理 4.6.6, 定理 7.3.1, , 定理 7.5.4)．

- **コーシーの積分表示・テイラー展開** (定理 5.1.1)

$D \subset \mathbb{C}$ が開，$f : D \to \mathbb{C}$ が連続なら以下の命題 a), b), c) は同値である．

a) $f : D \to \mathbb{C}$ は正則である．

b) (**円板に対するコーシーの積分表示**) $a \in D$, $r > 0$, $\overline{D}(a, r) \subset D$ なら，任意の $b \in D(a, r)$ に対し，

$$f(b) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z - b} dz. \tag{0.19}$$

c) (**任意回複素微分可能性 ・テイラー展開**) f は D 上で任意回複素微分可能である．したがって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し n 階導関数 $f^{(n)}$ は D 上正則である．さらに, $a \in D$, $R > 0$, $D(a, R) \subset D$ なら, 任意の $z \in D(a, R)$ に対し $f(z)$ は次のようにテイラー展開できる：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \ \ (\text{右辺は絶対収束}). \tag{0.20}$$

- **留数** (定義 6.1.1, 命題 6.1.2)

$a \in \mathbb{C}$, $R \in (0, \infty]$, $f : D(a, R) \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ は正則とする．

▶ 次の線積分は $r \in (0, R)$ について定数である：

$$\mathrm{Res}\,(f, a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{C(a,r)} f. \tag{0.21}$$

この線積分を，a における f の**留数** とよぶ.

▶ 次の条件をみたす $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ および正則関数 $h : D(a, R) \to \mathbb{C}$ が存在するとき，孤立特異点 a は**極** であるという：$h(a) \neq 0$ かつ,

$$f(z) = (z - a)^{-m} h(z), \ \ \forall z \in D(a, R) \backslash \{a\}. \tag{0.22}$$

また，m を極 a の**位数**という．a が f の m 位の極なら，

$$\mathrm{Res}\,(f, a) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} (z - a)^m f(z). \tag{0.23}$$

したがって，a が f の一位の極なら，

$$\mathrm{Res}\,(f,a) = \lim_{\substack{z\to a\\ z\neq a}}(z-a)f(z). \tag{0.24}$$

上記 (0.23), (0.24) は留数を求めるためによく用いられる．

• **留数定理** (定理 6.2.1)

$D \subset \mathbb{C}$ は開，$A \subset D$ は D 内の有限集合，$f : D\backslash A \to \mathbb{C}$ は正則とする．また，区分的 C^1 級閉曲線 $C \subset D\backslash A$ と $A_1 \subset A$ に対し，次を仮定する：

- C は A_1 の各点を反時計回りに一度囲む.
- また，C は $\mathbb{C}\backslash D$, および $A\backslash A_1$ のどの点も囲まない.

このとき，

$$\int_C f = 2\pi\mathbf{i}\sum_{a\in A_1}\mathrm{Res}\,(f,a). \tag{0.25}$$

(0.23),(0.24), (0.25) は，定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f$ の計算に応用される (6.3 節).

出席するか？サボるか？それが問題だ．

大学の授業では多くの場合，出席を求められません．そのため数か月もすると出席者が半減することも珍しくありません．私自身も大学 1,2 年生の頃はクラブ活動に明け暮れ，数学を含むほとんどの授業をサボっていました．ところが 3 年生になって本格的に数学を学ぶために授業に出席してみると，独学よりはるかに効率よく学べることに改めて気付きました．

そういう訳で個人的には出席を奨励します．もちろん，奨励であり強制ではありません．そもそも大学 1,2 年生のときに授業をサボっていた私の言葉には説得力ゼロですね (笑)．そのかわり，出席した人には「出席して得をした」と思ってもらえる授業を心がけます.

余談になりますが，私は若い頃スキーが大好きで，毎年冬になるとスキー学校に泊まり込んでレッスンを受けていました．凹凸のある急斜面は難敵でしたが，インストラクターさんの後をついていくと不思議とうまく滑れたのを思い出します．インストラクターさんが滑りやすいコースを選んでくれる上に，インストラクターさんを真似て滑っていると滑降姿勢も矯正されます．今度は私がみなさんにとって，あのときのインストラクターさんの役割を果たせればよいな，と思います.