「微分積分」(吉田伸生 著) 誤植の訂正と注釈の追加[1]

以下、「—」 → 「...」 は、 「—」を 「...」に訂正するという意味です.

- p. 6, 定義 1.2.3 の 4 行目.「$[a, b]$ を...」 → 「$[a, b] \cap \mathbb{R}$ を...」
- p. 10, (1.19) の右側の証明：「(1.17) の右辺で y を」 → 「(1.17) の右辺の $\sum_{k=0}^{n-1}$ の中で y を」
- p. 23, 問 2.3.1, 1 行目.「$\gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$」 → 「$\gamma \in (0, \infty)$」.
- p. 28, 命題 3.2.3 (a) の証明: 以下に述べるものに差し替え (本質的に同じだが，この方が読みやすい).

  $\varepsilon > 0$ を任意とする.

  (1) $a_n \to a$ より $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,

  (2) $c_n \to a$ より $\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$,

  (3) 仮定より $\exists n_3 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_3,\ a_n \leq b_n \leq c_n$.

  よって $\forall n \geq n_1 \vee n_2 \vee n_3$ に対し,

  $$a - \varepsilon \overset{(1)}{<} a_n \overset{(3)}{\leq} b_n \overset{(3)}{\leq} c_n \overset{(2)}{<} a + \varepsilon.$$

  これと極限の定義 (3.1) より $b_n \to a$.

- p. 29, 2 行目 (1) のすぐ下の説明：以下のものに差し替え (より詳しく分かりやすい).
  (実際, $a \in \mathbb{R}$ なら (3.1) で $\varepsilon = 1$ とし，$b = a - 1$ とできる．また $a = \infty$ なら (3.4) で $M = 1$ とし，$b = 1$ とできる).
- p. 29, (3.7), (3.8). それぞれ次に差し替え（より分かりやすい）.

  $$\{a, b\} \neq \{\infty, -\infty\} \text{ なら } a_n + b_n \longrightarrow a + b.$$
  $$\{|a|, |b|\} \neq \{0, \infty\} \text{ なら } a_n b_n \longrightarrow ab.$$

- p. 36, 命題 3.3.5 とその証明を以下のものに差し替え（単純化により分かりやすくした．本書内の応用にはこれで十分）.

  命題: $A, B \subset \mathbb{R}$ が空でない閉集合, かつ $A \cup B$ が区間なら，$A \cap B \neq \emptyset$.

  証明: $A, B \neq \emptyset$ より A, B からひとつずつ元をとり，$a \in A, b \in B$ とする．このとき $a = b$ なら $a \in A \cap B$. そこで $a \neq b$ としてよい. 以下，$a < b$ の場合を考えるが，$b < a$ でも同様である．A, $[a, b]$ は閉だから $A \cap [a, b]$ も閉である (問 3.3.1). また $A \cap [a, b]$ は有界である．さらに $A \cap [a, b]$ は a を含むので空でない．以上と命題 3.3.4 より $m \overset{\text{def}}{=} \max(A \cap [a, b])$ が存在する．このとき，最大値の定義から,

  (1) $m \in A \cap [a, b]$.

  したがって，次を言えば証明が終わる.

  (2) $m \in B$.

  以下，(2) を示す．$m \in [a, b]$ だが，$m = b$ なら $m \in B$．そこで $m \in [a, b)$ とする．$A \cup B$ は区間かつ二点 m, b を含むから，$[m, b] \subset A \cup B$. したがって特に,

[1] 2024 年 4 月 8 日更新

(3) $(m,b] \subset A \cup B$.

一方，$m = \max(A \cap [a,b])$ より，$A \cap (m,b] = \emptyset$. これと，(3) より $(m,b] \subset B$. したがって $[m,b] \overset{例\ 3.3.3}{=} \overline{(m,b]} \overset{問\ 3.3.1}{\subset} \overline{B} = B$. 以上より $m \in B$. \(^▫^)/

- p.41, 定理 3.4.7 の証明で n_3 を定めた直後のディスプレイ.「$\exists n_3 \in \mathbb{N}$」は不要.
- p.49, (c) $\Rightarrow$ (d) の証明: 冒頭から (2) までを以下のように修正する (もとのままでも正しいが，修正版の方が明解)：

  $A, B \neq \emptyset$ より A, B からひとつずつ元をとり，$a \in A$, $b \in B$ とする．このとき $a = b$ なら $a \in A \cap B$. そこで $a \neq b$ としてよい．以下，$a < b$ の場合を考えるが，$b < a$ でも同様である．
- p.49, (c) $\Rightarrow$ (d) の証明の最後の行: 「(2),(3) より $c \in A \cap B$.」とする (先に述べた命題 3.3.5 の単純化に対応).
- p.49, (d) $\Rightarrow$ (a) の証明は: 以下のように修正する (先に述べた命題 3.3.5 の単純化に対応)

  命題 3.3.4 を示せば連続公理も従う (3.3 節末の補足参照)．そこで $F \subset \mathbb{R}$ は空でなく，上に有界かつ閉とする．今 $F \neq \emptyset$ より $\mathbb{R}\backslash U(F) \neq \emptyset$, したがって $A \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathbb{R}\backslash U(F)} \neq \emptyset$. また，$F$ は上に有界なので $B \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R} \cap U(F) \neq \emptyset$. 更に B が閉であることは，連続公理を用いることなく $U(F)$ の定義から分かる．よって $\mathbb{R} = A \cup B$ と命題 3.3.5 より $\exists m \in \mathbb{R}$, $m \in A \cap B$. 以下 $m = \max F$ を示す．$m \in U(F)$ だから $m \in F$ を言えばよい．ところが $m \in A$ より，

  (4) $\exists a_n \in \mathbb{R}\backslash U(F)$, $a_n \longrightarrow m$.

  一方，$a_n \notin U(F)$ かつ，$m \in U(F)$ より，

  (5) $\exists x_n \in F$, $a_n < x_n \leq m$.

  (4),(5) より $x_n \to m$. F は閉なので $m \in F$.

- p.56, 1 行目：**(e)** $\longrightarrow$ **(d)**.
- p. 61, 命題 4.3.4. $d = 1$ かつ $a = \pm\infty$ の場合が抜けている．それを補うため，全体を以下のように修正する．

命題 4.3.4 記号は定義 4.3.1 の通り, $f(x) \overset{x \to a}{\underset{x \in A}{\longrightarrow}} \ell \in \mathbb{R}^k$ とする．このとき，ある $\delta > 0$ が存在し，f は集合 $A \cap B_d(a,\delta)$ 上で有界となる, ここで,

$$B_d(a,\delta) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^d \ ; |x - a| < \delta\}, & a \in \mathbb{R}^d, \\ (1/\delta, \infty), & d = 1,\ a = \infty, \\ (-\infty, -1/\delta), & d = 1,\ a = -\infty. \end{cases}$$

$B_d(a,\delta)$ を a の δ **近傍**という.

証明: 背理法による．結論を否定すると，任意の $n = 1, 2, ..$ に対し, f は $A \cap B_d(a, 1/n)$ 上で非有界である．従って次のような点列 a_n が存在する：

$$a_n \in A \cap B_d(a, 1/n), \quad |f(a_n)| \geq n.$$

この $a_n \in A$ について，$a_n \to a$ かつ $f(a_n) \not\longrightarrow \ell$. これは仮定に反する． \(^▫^)/

なお，上の修正で命題 4.3.5 で述べる (4.27) を先取りしたので，修正版の命題 4.3.5 では，それを引用すればよい．

- p.69, 定義 5.2.1, 1 行目「級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を考える」→「$a_n \in \mathbb{C}$ とし，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を考える」

- p.69, 命題 5.2.2, 証明の 2 行目「$|b_j|$」→「b_j」(2 箇所)

- p.70, 上から 2 行目末尾に「また，$n \geq m$ なら」を挿入.

- p.70, 問 5.2.1 命題 (b) を次のように修正：「絶対収束級数は収束する．」→「実数列 b_n に対し，$\sum_{j=0}^{n} |b_j|$ が n について有界なら，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する.」(定義 5.2.1 の「絶対収束」の定義で，極限 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ の存在を保証するために単調列定理を使っている．一方，示すべき命題 (a) は本質的に単調列定理なので，(a) を示すための仮定の中に「絶対収束」という言葉を使うと混乱が生じる)

- p.72, 補題 5.3.4 について．$a_n \longrightarrow 0$ を仮定しなければ補題の結論は正しくない．実際 $a_n = (-1)^n$ に対し，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない．また，$a_{2n} + a_{2n+1} = a_{2n-1} + a_{2n} = 0$ より，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{2n} + a_{2n+1}) = 0$, $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n}) = 1$.

- p.73, 命題 5.3.5 の証明.「s_n」→「s_{2n+1}」(4 箇所) （元のままでも問題はないが，補題 5.3.4 と記号を合わせるため）

- p.74, 問 5.3.3, 2 行目.「$x, y \in \mathbb{R}^d$」→「$x, y \in \mathbb{C}$」

- p.74, 次の問 (**問 5.3.4**) を追加（将来の改訂で出版社と合意できれば）
  複素数列 a_n, b_n に関する以下の命題について，正しければ証明，正しくなければ反例をあげよ．(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束し，b_n が有界なら，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は絶対収束する．(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束し, $b_n \to 0$ なら，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は収束する.

  [略解] (i) は正しい. 実際, $M \in [0, \infty)$ を $|b_n|$ の上界とすると $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. (ii) は正しくない．実際，$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ は反例である (例 5.3.2, 命題 5.3.5 参照).

- p.77, (2) の最右辺：「$\leq$」→「$=$」

- p.83, (6.8)：証明の簡略化．まず次に注意する．$z > 0$ に対し

  $$\textbf{(1)} \qquad 1 < \frac{\exp z - 1}{z} < \exp z.$$

  実際,

  $$\exp z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + ...\right) \begin{cases} > z, \\ < z \exp z. \end{cases}$$

  1) で $z = x - y$ とし,

  $$1 < \frac{\exp(x-y) - 1}{x - y} < \exp(x - y).$$

  両辺に $\exp y$ を乗じ，(6.8) を得る.

- p.86, 問 6.1.2, (i) のヒントを次のように修正: 「$-1/2 \leq x \leq 1$ なら $|x|/2 \leq |\log(1+x)| \leq 2|x|$」.

- p.86, 問 6.1.6, 一行目.「$\gamma \in (0, \infty)$」→「$\gamma \in (0, 1)$」(元のままでも問題はないが，巻末の略解から $\gamma \in (0, 1)$ もわかるので)

- p.88, 命題 6.2.1. (6.20) の第一式，および証明中 (1) の第一式. 「$x \in \mathbb{R} \backslash (0, 1)$ なら」→「$x \in \mathbb{R} \backslash [0, 1]$ なら」

- p.88, (6.21) の直前：「$a \neq 0, 1$」→「$a \neq 1$」

- p. 102, 問 6.4.6. 1 行目 「$y \in \mathbb{C}$ に対し」→「$x \in \mathbb{C}$ に対し」
  4 行目 「ただし,」→「ただし，$y \in \mathbb{C}$ に対し」

- p. 107, 命題 6.5.6 の証明中 (2), 二つ目の矢印:「$\mapsto$」$\longrightarrow$「$\to$」.

- p. 107, 命題 6.5.6 の証明中 (3): 「$x \in [0,\pi]$ が存在し」に続くディスプレイで最右辺の絶対値不要．また，そのすぐ下で,「$\pm v \sin x \geq 0$」$\longrightarrow$「$\pm v \geq 0$」.

- p. 115. 問 6.6.4 (i) の等式右辺第一項「$\frac{2}{z}$」$\longrightarrow$ 「$\frac{1}{z}$」.

- p. 116. 右下の図で 1, -1 が逆.

- p.127, 定理 7.2.2 (b1)⇒(b2) の証明．$[\ell_n, r_n]$ を定義する式直後の数行を以下のように修正する．

$$[\ell_{n+1}, r_{n+1}] = \begin{cases} [\ell_n, m_n], & a_k \in [\ell_n, m_n] \text{ となる } k \text{ が無限個あるとき}, \\ [m_n, r_n], & a_k \in [\ell_n, m_n] \text{ となる } k \text{ が有限個であるとき}. \end{cases}$$

  このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_k \in [\ell_n, r_n]$ となる k が無限個存在する．特に,$a_{k(1)} \in [\ell_1, r_1]$ となる $k(1) \geq 1$ を任意に選ぶとき，この $k(1)$ に対し $k(2) > k(1)$ を $a_{k(2)} \in [\ell_2, r_2]$ となるように選ぶことができる．これを繰り返せば，自然数列 $0 = k(0) < k(1) < ...$ を

  (1) $a_{k(n)} \in [\ell_n, r_n], \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  となるように選ぶことができる. 一方, ...(以下同じ)

- p.128, 次の問 (**問 7.2.4**) を追加（将来の改訂で出版社と合意できれば）
  $A \subset \mathbb{R}$ は有界かつ閉，$f : A \to \mathbb{R}$ は次の条件をみたすとする.「任意の $a \in A$ に対し，$\delta > 0$ が存在し，f は $A \cap (a-\delta, a+\delta)$ 上で有界である」．このとき，f は A 上で有界であることを示せ.

  [略解] 背理法による．f が A 上非有界なら $|f(a_n)| \to \infty$ となる $a_n \in A$ が存在する．さらに，定理 7.2.2 より $a \in A$ および a_n の部分列 $a_{k(n)}$ で $a_{k(n)} \to a$ となるものが存在する．この $a \in A$ に対し，$\delta > 0$ が存在し，f は $A \cap (a-\delta, a+\delta)$ 上で有界である. 一方, $a_{k(n)} \to a$ より，$\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$, $a_{k(n)} \in (a-\delta, a+\delta)$. 以上より $|f(a_{k(n)})|$ は有界である．ところが, $a_{k(n)}$ は a_n の部分列なので $|f(a_{k(n)})| \to \infty$. これは矛盾である.

- p.135, 例 8.1.2 (b) の証明改良（本質的に同じだが, 少し読みやすくした).
  まず次に注意する．$z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $z \to 0$ なら

  (1) $$\frac{\exp z - 1}{z} \longrightarrow 1.$$

  実際[2],

$$|\exp z - 1 - z| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+2)!} \leq |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|^2 \exp|z|.$$

  ゆえに，$z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $z \to 0$ なら

$$\left| \frac{\exp z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \exp|z| \longrightarrow 0.$$

  $c \neq 0$ の場合に (b) を示せば十分である．このとき，$z \stackrel{\text{def}}{=} c(y-x) \neq 0$ に注意して，

$$\frac{\exp(cy) - \exp(cx)}{y-x} = c\exp(cx)\frac{\exp z - 1}{z} \stackrel{(1)}{\longrightarrow} c\exp(cx).$$

[2]次に述べる評価式のかわりに (6.16) を引用してもよいが，引用のために頁を繰るより，その場で計算する方がむしろ早い.

- p.141, (2) の分数式分子：「$\varphi_2(y)$」→「$\varphi_2(z)$」
- p.142, (8.3) の最後の式「(x)」→「$f(x)$」.
- p.168, 補題 8.7.1 の別証明 (こちらの方が見通しがよいので，改訂の機会があれば差し替えたい).
  まず次を示す.

  1) $c \in \mathbb{C}$ に対し，$|c^n - 1 - n(c-1)| \le \frac{1}{2}n(n-1)(1 \vee |c|)^{n-2}|c-1|^2$.
  $$c^n - 1 - n(c-1) = (c-1)\sum_{m=0}^{n-1}(c^m - 1) = (c-1)^2 \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} c^j.$$
  上式右辺で $|c|^j \le (1 \vee |c|)^j \le (1 \vee |c|)^{n-2}$ より，
  $$|c^n - 1 - n(c-1)| \le (1 \vee |c|)^{n-2}|c-1|^2 \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} 1.$$
  さらに，
  $$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} 1 = \sum_{m=0}^{n-1} m = \tfrac{1}{2}n(n-1).$$
  以上より 1) を得る.
  次に，1) を用い補題の不等式を示す．$x = 0$ なら補題の不等式は自明なので $x \neq 0$ としてよい．このとき，$c \stackrel{\text{def}}{=} y/x$ に対する 1) の両辺に $|x|^n$ をかければ，
  $$|y^n - x^n - nx^{n-1}(y-x)| \le \tfrac{1}{2}n(n-1)(|x| \vee |y|)^{n-2}|y-x|^2.$$
  以上で補題の不等式を得る. \(^□^)/
- p.175, 問 8.7.4 の末尾に「ただし $0 \log 0 = 0$ とする」を書き足す.
- p.183, 問 9.1.4 (iii). 「したがって, 特に...」として付け足した部分を削除. (付け足し部分は正しくない．実際 $U = [0,\infty)$, $V = [0,1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ とすると $f : U \to V$ は全単射連続かつ $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ も V から U への連続関数である．さらに $A = U = [0,\infty)$ に対し $\overline{A} = A = U, f(\overline{A}) = [0,1)$. 一方，$f(A) = [0,1)$ より $\overline{f(A)} = [0,1]$.)
- p.183, 次の問 (**問 9.1.5**($\star$)) を追加（将来の改訂で出版社と合意できれば）
  $U \subset \mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ とする．以下の条件 (i),(ii) はそれぞれ，f の連続性と同値であることを示せ：(i) $x \in U$, および点列 $x_n \in U$ が $x_n \to x$ かつ $f(x_n) \neq f(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすとき, $f(x_n) \to f(x)$. (ii) 任意の $A \subset U$ に対し $f(\overline{A} \cap U) \subset \overline{f(A)}$. [ヒント：(i) と補題 9.4.5]

  [略解] (i): 条件の必要性は明らか (定義 4.4.1 直後の注). 十分性を言う．$x \in U$, および点列 $y_n \in U$ が $y_n \to x$ をみたすとし，$f(y_n) \to f(x)$ ならよい．有限個の n を除き $f(y_n) = f(x)$ なら自明に $f(y_n) \to f(x)$ なので, $f(y_n) \neq f(x)$ となる n が無限個あるとしてよい．そこで $\{n \ge 1\ ;\ f(y_n) \neq f(x)\} = \{p(1) < p(2) < ...\}$ とすると，仮定から $f(y_{p(n)}) \to f(x)$. これより容易に $f(y_n) \to f(x)$ を得る. (ii): 条件の必要性は既知 (問 9.1.4). 十分性を言う. $x, x_n \in U$ を (i) の条件を満たすようにとり，$x_{k(n)}$ を x_n の任意の部分列，$A = \{x_{k(n)}\}_{n\ge1}$ とする．このとき，$x \in \overline{A} \cap U$ と仮定より $f(x) \in \overline{\{f(x_{k(n)})\}_{n\ge1}}$. これと $f(x_{k(n)}) \neq f(x)$ $(\forall n \ge 1)$ より，$x_{k(n)}$ の部分列 $x_{\ell(n)}$ が存在し，$f(x_{\ell(n)}) \to f(x)$. これと補題 9.4.5 より $f(x_n) \to f(x)$.
- p.186, 問 9.3.2. $U = \overline{A}$ の場合だけで十分．そこで，問題文を次のように単純化する.「$A \subset \mathbb{R}^d$ は有界かつ $f \in C(\overline{A} \to \mathbb{R}^m)$ とする. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ を示せ.」なお，略解 (p.452) はそのままでよい.

- p.187–, 9.4 節を通じ，関数 f の定義域の記号が D だったり, K だったりするが，9.1 節–9.3 節との統一感という観点ですべて A に統一.

- p.187, 定義 9.4.1：「**一様連続**という」→「**一様連続**であるという」

- p.187, 次の問 (**問 9.3.5**) を追加（将来の改訂で出版社と合意できれば）
  $A \subset \mathbb{R}^d$ は有界かつ閉，$f : A \to \mathbb{R}$ は次の条件をみたすとする.「任意の $a \in A$ に対し，$\delta > 0$ が存在し，f は $\{x \in A\,;\, |x-a| < \delta\}$ 上で有界である」．このとき，f は A 上で有界であることを示せ.

  [略解] 問 7.2.4 と同様（定理 7.2.2 の代わりに定理 9.3.1 を用いる）.

- p.189 2 3 行目.「(UC2) を否定すると」の直後を次のように補う (記号 D は A に).
  (UC2) を否定すると,

  $$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists(x,y) \in D \times D,\ |x-y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

  したがってある $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対し,

  $$C_{\delta,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in D \times D\,;\, |x-y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

- p.190, 補題 9.4.5 (b)⇒(a) の証明を以下に差し替え
  (b) ⇒ (a): 対偶を示す．(a) を否定すると, $\exists\varepsilon > 0$, $\forall\ell \in \mathbb{N}$, $\exists k \geq \ell$, $|a_k - a| \geq \varepsilon$. つまり $|a_k - a| \geq \varepsilon$ をみたす $k \in \mathbb{N}$ が無限個存在する．それらを $k(0) < k(1) < \ldots$ とするとき, $a_{k(n)}$ のいかなる部分列 $a_{\ell(n)}$ も $|a_{\ell(n)} - a| \geq \varepsilon$ をみたすので．$a_{\ell(n)}$ は収束しない．よって (b) は成立しない.

- p.190, 定理 9.4.4 の証明 6 行目：「$a \in K$ に」→「ある $a \in K$ に」

- p.190, 定理 9.4.4 の証明．7 行目 「部分列 $(a_{\ell(n)})_{n\geq 1}$ を含む．」→「部分列 $(a_{\ell(n)})_{n\geq 1}$ を含む (定理 9.3.1)．」(根拠明示のため).

- p.191, 次の問 (**問 9.4.7**($\star$)) を追加（将来の改訂で出版社と合意できれば．その場合は例 9.4.2 末尾で本問に言及.）次の関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は一様連続だがヘルダー連続でないことを示せ．$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

  [略解] $f(x) \to 0$ $(x \to 0)$ より $f \in C([0,1])$．したがって定理 9.4.4 より $f \in C_{\mathrm{u}}([0,1])$. 一方, 任意の $p > 0$ に対し $x^{-p}f(x) = \exp\left(p\log\frac{1}{x} - \sqrt{\log\frac{1}{x}}\right) \to \infty$ $(x \to 0)$．よって $f(x) - f(0) \leq Lx^p$ $(\forall x \in (0,1])$ をみたす $p \in (0,1]$, $L \in [0,\infty)$ は存在しない.

- p.193, (10.3): $I \neq \emptyset$ も仮定する.

- p.193, (10.5): 「$(c_{k-1}, c_k) \subset D_k \subset [c_{k-1}, c_k]$」→ 「$(c_{k-1}, c_k) \subset D_k \subset [c_{k-1}, c_k] \cap I$」更に $D_k \neq \emptyset$ も仮定する.

- p.194, 注１：「各 D_k を (10.5) をみたすように選ぶ方法は」→ 「各 D_k を選ぶ方法は,(10.5) をみたす限りにおいて」

- p.194, 注 2：1 行目と 2 行目の「$\emptyset$ または」を削除．3 行目末尾のカッコ内に「例 10.2.2(b)」を追加.

- p.194, (10.6): 「$c_{k-1} \leq \gamma_k \leq c_k$」→ 「$\gamma_k \in D_k$」

- p.194, 定義 10.1.2 の後に次の注を追加（10.2 節以後の記号に対する違和感軽減のため）
  区間分割 Δ を区間の集合 $\{D_1, ..., D_N\}$ とみなし，代表 γ を Δ から I への写像 $D \mapsto \gamma_D$

とみなすことができる．さらに区間 D の長さを $|D|$ とすれば，リーマン和を次のように書くこともできる．

$$s(f,\Delta,\gamma)=\sum_{D\in\Delta} f(\gamma_D)|D|.$$

特に, リーマン和を多次元で考える際には，この書き方が便利である（10.2 節以後）.

- p.195, 定義 10.1.3 :「**リーマン可積分**という」→「**リーマン可積分**であるという」
- p.196, 定理 10.1.5 の証明, 1 行目 :「任意の分点 (10.4) と, 対応する区間分割 Δ をとる.」→「分点 (10.4) を $c_{k-1}<c_k$ $(k=1,...,N)$ となるようにとり, 対応する区間分割 Δ をとる.」
- p.200 の図で $D_{i,j}$ の添え字 i,j が逆.
- p.200, 注 : 末尾のカッコ内に「例 10.2.2(b)」を追加.
- p.200, 例 10.2.2(b). 冒頭を「I を閉区間とする．各辺 $I_j=[a_j,b_j]$ の...(以下同じ)」とする．
- p.201, 定義 10.2.3, 4 行目 :「$\gamma_D\in\overline{D}$」→「$\gamma_D\in D$」
- p.201, 定義 10.2.4 :「**リーマン可積分**という」→「**リーマン可積分**であるという」
- p.203, 命題 10.2.6 の証明冒頭に,「記号を簡単にするために，$d_1=d_2=1$ の場合を述べるが，一般の場合でも同様である.」を挿入.
- p.207, 系 10.3.7 の証明，1–2 行目.「I の区間分割 $\Delta=\{D_1,D_2,...\}$ で $D_1=\mathring{I}$, $|D_k|=0$ $(k\ge 2)$ なるものが存在する (例 10.2.2(b) 参照).」→「例 10.2.2(b) と同様に考えて，I の区間分割 $\Delta=\{D_1,D_2,...\}$ で $D_1=\mathring{I}$, $|D_k|=0$ $(k\ge 2)$ なるものが存在する．」
- p.208, 問 10.3.6, 2 行目: 「連続する」→「連続とする」
- p.210, 命題 10.4.4. 条件「$\mathring{I}$ 上 $g\not\equiv 0$」は不要 (もし $\mathring{I}$ 上 $g\equiv 0$ なら I 上 $g\equiv 0$ でもあり, (10.18) は自明に成立する).
- p.212, 振動の定義 :「ocs」→「osc」(以下，同じ誤植が度々現れる)
- p.212, (10.24). 次のように，両端に不等式を追加 ((10.27) で引用するため).

$$\left(\inf_I f\right)|I|\le \underline{s}(f,\Delta)\le s(f,\Delta,\gamma)\le \overline{s}(f,\Delta)\le\left(\sup_I f\right)|I|.$$

- p.213, (10.27). 次のように，両端に不等式を追加 (補題 10.6.3 の証明中で引用するため. 該当箇所の説明追加参照).
  定義と (10.24) より,

$$\left(\inf_I f\right)|I|\le \underline{s}(f,\Delta)\le \underline{s}(f),\ \ \overline{s}(f)\le \overline{s}(f,\Delta)\le\left(\sup_I f\right)|I|.$$

- p.214, 補題 10.5.6, 2 行目.「... の分点に含まれるとする」→「... の分点に含まれ, かつ任意の $D\in\widetilde{\Delta}$ は，ある $J\in\Delta$ に含まれるとする 」
- p.214, (10.30) 「$D\subset\overline{J}$」→「$J\subset\Delta$ 」
- p.215, (2) 式 :「$\sum_{D\in\widetilde{\Delta}}$」→「$\sum_{D\in\widetilde{\Delta}_J}$」
- p.215, 補題 10.5.7, 4 行目 :「Δ_0 と Δ の分点を併せて得られる区間分割を $\widetilde{\Delta}$ とし」→「$\widetilde{\Delta}$ は Δ_0 と Δ の分点を併せることにより両者を細分した区間分割とし」

- p.215, 下から 1 行目：「内部に含む」→ 「含む」(c_{ik} は J_i の端点である可能性もある)
- p.216, 1 行目：「c_{ik} を第 i 辺の内部に含むような $J \in \Delta$」→ 「$c_{ik} \in J_i$ をみたす $J \in \Delta$」
- p.216 (2) のすぐ下：「Δ_0 と Δ の分点を併せて得られる区間分割を $\widetilde{\Delta}$ とし」→ 「$\widetilde{\Delta}$ は Δ_0 と Δ の分点を併せることにより両者を細分した区間分割とし」
- p.220, 命題 10.3.2 の最後のディスプレイ．(2) を使う部分を次のように補うとより分かりやすい．

$$\begin{aligned} r(\varphi \circ f, \Delta) &\stackrel{(10.23)}{=} \sum_{D \in \Delta} |D| \operatorname*{osc}_D (\varphi \circ f) \\ &\stackrel{(2)}{\le} K \sum_{D \in \Delta} |D| \operatorname*{osc}_D f + \frac{\varepsilon}{2|I|} \sum_{D \in \Delta} |D| = Kr(f, \Delta) + \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

- p.222, (3) の最初の不等号を「$\stackrel{(10.27)}{\le}$」にする（根拠明示のため．(10.27) に追加した不等式を用いる）．
- p.223, 定義 11.1, 2 行目．冒頭に ▶ を挿入．
  4 行目，▶ の後,「f が I 上で不定積分を持つとき,」を挿入．
- p.224, 補題 11.1.2. 1行目を次に差し替え (定義 11.1.1 の引用部分を明示的にした).「$I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{C}$ は I 上で不定積分を持つとする ((11.1) 参照)．このとき，$x, y, z \in I$ に対し」
- p.225, 命題 11.1.3. 冒頭の一文を次に差し替え (定義 11.1.1 の引用部分を明示的にした).
  「$I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{C}$ は I 上で不定積分を持つとする ((11.1) 参照).」
- p.225, 命題 11.1.3 の証明．最終行二つ目の「$=$」を「$\stackrel{(11.5)}{=}$」に（根拠明示のため）．
- p.226, 定理 11.2.1 の証明．次のように，少し書き足すとより分かりやすい．
  証明：(i) $y < x$ の場合: 定理 10.1.5 を区間 $[y, x]$ に適用して示すべき等式を得る (定理 10.1.5 証明後の注参照).
  (ii) $x < y$ の場合:(11.3) により，(i) に帰着する． \(^▫^)/
- p.226, 系 11.2.2, 一行目：「$\forall x \in I$」→「$\forall x \in \overset{\circ}{I}$」．
- p.226, 例 11.2.3 の証明．3 行目のディスプレイを次の 2 行に差し替え．

$$\begin{aligned} |F(t)| &\stackrel{(6.19)}{=} \exp(t \operatorname{Re} z + (1-t) \operatorname{Re} w) \le \exp(\operatorname{Re} z \vee \operatorname{Re} w), \\ |F'(t)| &= |(z-w)F(t)| = |z-w||F(t)| \stackrel{\text{上式}}{\le} |z-w| \exp(\operatorname{Re} z \vee \operatorname{Re} w). \end{aligned}$$

- p.227, 定理 11.2.4. 冒頭の一文を次に差し替え (定義 11.1.1 の引用部分を明示的にした).
  「$I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{C}$ は I 上で不定積分を持つとする ((11.1) 参照).」
- p.228, 定理 11.2.4 の証明．2 行目のディスプレイを次に差し替え．

$$x_0 < x < y < y_0 \implies |F(y) - F(x)| \le M(y - x),$$

  4 行目のディスプレイを次に差し替え．

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \stackrel{(11.4)}{\le} \int_x^y |f| \le M(y - x).$$

- p.229, 系 11.2.4 の証明．次のように，少し丁寧に述べるとより分かりやすい．

  証明：($\Rightarrow$) 仮定より，$F \in C(I) \cap D(\overset{\circ}{I})$, かつ $f = F'$ は I 上で不定積分をもつ．ゆえに定理 11.2.1 より $\Rightarrow$ を得る．

  ($\Leftarrow$) 仮定より，$f \in C(\overset{\circ}{I})$ かつ f は I 上で不定積分をもつ．ゆえに定理 11.2.4(c) より $\Leftarrow$ を得る． \(^□^)/

- p.238, 11.4 節導入部分の $\cos x$ の展開式右辺第 3 項「x^2」→「x^4」．

- p.245, 定義 12.1.5, 1 行目.「$[a,b] \subset \mathbb{R}$」→「$[a,b] \cap \mathbb{R}$」

- p.243, 例 12.1.2. 図の下にある四つの積分全てで dx がひとつ余計（→ 二つ目を削除）．

- p.247, 1 行目ディスプレイの変数 x をすべて u に（x のままでも問題ないが，次に続く 2 式にあわせるため）．同様に 9 行目ディスプレイの変数 x をすべて v に．

- p.248, 例 12.1.9. 示すべき等式に含まれる文字 c は別の文字（例えば t）に変える．（証明中に引用する (12.3) の c との区別のため）また，次の脚注を追加する「例 12.1.9 は，例 12.3.7, 例 15.7.8 の証明でも用いる．また，関連した積分として例 15.7.11 も参照されたい.」さらに証明中，下から 2 行目のディスプレイを次に差し替え (後半部分で符号の訂正)．

$$\int_u^0 \frac{dx}{c^2+x^2} = \left[\frac{1}{c}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{c}\right]_u^0 = -\frac{1}{c}\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{c} \stackrel{u\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2c}.$$

- p.255, 例 12.2.7 の証明，5〜6 行目：「可積分」→「広義可積分」

- p.277, 補題 12.5.8 は，次のように少しだけ精密化できる．$f(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) f\left(\frac{t+1}{2}\right)$, $\forall t \in (0,1)$ で $t \to 0$ として $f(1/2) = 1$ を得る．これと $f(t) = f(0)^{1-t} f(1)^t$, $\forall t \in [0,1]$ より $f(0)f(1) = 1$ を得る．以上より $f(t) = f(0)^{1-2t}$, $\forall t \in [0,1]$.

- p.284, 命題 3.1.5 の証明 4 行目：「また」を削除.

- p.284, 命題 3.1.5 の証明 4 行目：「$h = e_j$ ($j = 1,...,d$ は任意)」→「$h = e_j$ ((4.1) 参照, $j = 1,...,d$ は任意)」．

- p.284, 命題 3.1.5 の証明 8 行目：「行列の」→「行列と」．

- p.286, 問 13.1.2. (i) の末尾：「$\overset{\circ}{A} \subset B$」→「$A \subset \overset{\circ}{B}$」．その後，問題番号 (iii),(iv), (v) はそれぞれ正しくは (ii),(iii),(iv).

- p.292, 系 13.2.2, 1 行目：「$a, h \in D$, かつ全ての $0 < t < 1$ に対し」→「$a, h \in \mathbb{R}^d$, かつ全ての $0 \le t \le 1$ に対し」．

- p.293, 3 行目：左側に「$f(a+h) - f(a) =$」を書き加える (より分かりやすくするため).

- pp.293–294, (13.16), (13.17) の直観的説明．偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ をそれぞれ，あるベクトルに関する方向微分とみなすとき，作用素とベクトルの対応関係は次のとおりである：

  1) $\dfrac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow e_1$, $\dfrac{\partial}{\partial y} \longleftrightarrow e_2$, $\dfrac{\partial}{\partial r} \longleftrightarrow e(\theta)$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta} \longleftrightarrow re(\theta)^\perp$

  ここで，

$$e_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e(\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad e(\theta)^\perp \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

  明らかに

  2) $e(\theta) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, $e(\theta)^\perp = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$

2) を対応関係 1) により微分作用素に翻訳すると

2') $\dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial y}$

これで (13.16) が導けた．一方，2) は次のように行列の等式に書き直せる．

$$(e(\theta)\ \ e(\theta)^{\perp}) = (e_1\ \ e_2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

両辺の右側から，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を掛けて，

$$(e(\theta)\ \ e(\theta)^{\perp}) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (e_1\ \ e_2).$$

したがって，

3)
$$\begin{aligned} e_1 &= \cos\theta e(\theta) - \sin\theta e(\theta)^{\perp} = \cos\theta e(\theta) - \frac{\sin\theta}{r} r e(\theta)^{\perp}, \\ e_2 &= \sin\theta e(\theta) + \cos\theta e(\theta)^{\perp} = \sin\theta e(\theta) + \frac{\cos\theta}{r} r e(\theta)^{\perp}. \end{aligned}$$

3) を対応関係 1) により微分作用素に翻訳すると

3') $\dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta}, \quad \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta}.$

これで (13.17) が導けた．

- p.297, (2) の分数式分子：「$\varphi_2(y)$」→「$\varphi_2(z)$」
- p.300, 2 行目の「(1) の右辺のうち...」以降 (13.19) の証明部分は「(13.18) を x_i で偏微分し (13.19) を得る.」だけで十分.
- p.301, 例 13.3.5. (a) $\Rightarrow$ (b) の証明から分かるように (b) を「$f(x,y) = f(x,0) + f(0,y) - f(0,0)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$」に置き換えてもよい.
- p.302, 例 13.3.6 の証明, (1) 「$(x-ct, x+ct)$」→ 「$(x+ct, x-ct)$」.
- p.302, 例 13.3.6 の証明, (2) の 1 行下「$(x-ct, x+ct)$」→ 「$(x+ct, x-ct)$」.
- p.302, 例 13.3.6 の証明 (4) のすぐ上,「可微分な $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し」→「$(x,t) \mapsto f(x,t)$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) が可微分なら」
- p.302, 例 13.3.6 の証明 (4): 二式とも右辺第二項の符号が逆.
- p.302, 例 13.3.6 の証明 (5): 右辺第二項の符号が逆.
- p.302, 下から 2 行目：右辺第二項の符号が逆.
- p.303, (b) $\Rightarrow$ (a) で「$f_{\pm}$」→「$w_{\pm}$」(5 箇所全て).
- p.305, (13.21) の一行上：「$a, h \in D$, かつ全ての $0 < t < 1$ に対し」→「$a, h \in \mathbb{R}^d$, かつ全ての $0 \le t \le 1$ に対し」
- p.306, 1 行目：「$q_m(a+th, h)$」→「$q_m(f, a+th, h)$」
- p.313, 命題 13.5.1, 上から 7 行目のディスプレイ「(PS1) $\Longleftrightarrow$ (PS2)」→ 「(PS1) $\Longleftarrow$ (PS2)」

- p.313, 命題 13.5.1 直後に次の注を挿入.

  注: 命題 13.5.1 において $f(0)=0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \text{(P2)} &\iff x=0 \text{ は } f(x) \text{ の狭義極小点}, \\ \text{(PS2)} &\iff x=0 \text{ は } f(x) \text{ の極小点}. \end{aligned}$$

  したがって命題 13.5.1 より, $x=0$ が $f(x)$ の (狭義) 極大点であるか否かを Δ_k ($k=1,...,d$) の符号で判定できる.

- p.315, 命題 13.5.1 証明の終わりから 2 行目:「(PS1) $\iff$ (PS2)」→「(PS1) $\Longleftarrow$ (PS2)」

- p.315, (13.28):「(NS1) $\iff$ (NS2)」→「(NS1) $\Longleftarrow$ (NS2)」

- p.315, (13.29):「(I) $\iff$ (PS1), (NS1) 共に不成立」→「(I) $\Longleftarrow$ (PS1), (NS1) 共に不成立」

- p.315, 系 13.5.3 直後に次の注を挿入.

  注: 系 13.5.3 において $f(0)=0$, および $f(tx)=t^2f(x)$ ($t\in\mathbb{R}$) に注意すると,

$$\begin{aligned} \text{(N2)} &\iff x=0 \text{ は } f(x) \text{ の狭義極大点}, \\ \text{(NS2)} &\iff x=0 \text{ は } f(x) \text{ の極大点}, \\ \text{(I)} &\iff x=0 \text{ は } f(x) \text{ の極値でない}. \end{aligned}$$

  したがって系 13.5.3 より, $x=0$ が $f(x)$ の (狭義) 極大点であるか否か, および $x=0$ が $f(x)$ の極値点であるか否か, を Δ_k ($k=1,...,d$) の符号で判定できる.

- p.320, 下から 3 行目:「$e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$」→「$e^{-(x^2+y^2)}$」

- p.321, 2 行目および 5 行目:「exp(1)」→「exp(−1)」

- p.321, 3 行目および 6 行目:「exp(1)」→「exp(−2)」

- p.323, 1 行目:「命題 13.5.1」→「系 13.5.3」.

- p.328, 問 13.7.2, 3 行目:「最大あり」→「最大であり」

- p.329, 命題 13.8.1 直後に次の注を追加:等式 (13.35) を, より明示的に書くと次のようになる.

$$(\partial_1 f(a)\dots\partial_{d+m}f(a)) = (\lambda_1,...,\lambda_m)\begin{pmatrix} \partial_1 g_1(a) & \dots & \partial_{d+m}g_1(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 g_m(a) & \dots & \partial_{d+m}g_m(a) \end{pmatrix}.$$

- p.329, 命題 13.8.1 証明の 5 行目:「$\mathbb{R}^d$」→「$\mathbb{R}^{d+m}$」.

- p.332, 例 13.8.4,
  ディスプレイ 2 つ目:
  「$g(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y+z-2k \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-k^2 \end{pmatrix}$」→「$g(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-k^2 \\ x+y+z-2k \end{pmatrix}$」
  ディスプレイ 3 つ目:「$g'(x,y,z)=\binom{1,1,1}{x,y,z}$」→「$g'(x,y,z)=\binom{x,y,z}{1,1,1}$」
  (2) の直前に次を挿入.

$$(yz,zx,xy)=(\lambda,\mu)\begin{pmatrix} x,y,z \\ 1,1,1 \end{pmatrix},$$

  すなわち

- p.355, 例 15.1.5 を次の一般化に差し替え:$[x_1, x_1], [y_2, y_2] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間, $I = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $u, v \in C^1(I)$ が微分方程式 $u_x = v_y$ をみたすとする．このとき,

$$\int_{x_1}^{x_2} (v(x, y_2) - v(x, y_1))dx = \int_{y_1}^{y_2} (u(x_2, y) - u(x_1, y))dy.$$

  証明:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (v(x, y_2) - v(x, y_1))dx &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} v_y(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} u_x(x, y)dy \\ &\overset{(15.3)}{=} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} u_x(x, y)dx = \int_{y_1}^{y_2} (u(x_2, y) - u(x_1, y))dy. \end{aligned}$$

  (現版の例 15.1.5 は上の一般化で，$[x_1, x_2] = [1, 0]$, $[y_1, y_2] = [a, b]$, $u(x, y) = \frac{x^{y+1}}{y+1}$, $v(x, y) = \frac{x^y}{\log x}$ としたもの).

- p.366, 命題 15.3.5 の証明，1 行目:「$A \cup B \subset I$」→「$\overline{A} \subset I$」

- p.376, 定理 15.5.1, 2 行目:「$U \cup A \subset D$」$\longrightarrow$「$U \cup \overline{A} \subset D$」そのかわり (b) の仮定のうち,「$g'$ が A 上有界」は不要 (p.388, 4–5 行目に対する訂正参照).

- p.386, 命題 15.6.2 の証明,(1) の第一式:「$\overset{\text{問 } 9.1.4}{=}$」→「$\overset{\text{問 } 9.3.2}{=}$」

- p.388, 4–5 行目:定理 15.5.1 の仮定「$U \cup A \subset D$」を「$U \cup \overline{A} \subset D$」に修正した上で，$g$ が A 上リプシッツ連続であることの詳しい証明 [杉浦 II, p.96, 命題 3.1 参照].

  g が $\overline{A}$ 上リプシッツ連続，すなわち $\sup\left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\ ;\ x, y \in \overline{A}, x \neq y\right\} < \infty$ ならよい．そこでこれを否定すると，$(x_n, y_n) \in \overline{A} \times \overline{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在し次をみたす.

  1) $\quad x_n \neq y_n,\ \ \dfrac{|g(x_n) - g(y_n)|}{|x_n - y_n|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

  g は $\overline{A}$ 上有界だから $\sup_{n\in\mathbb{N}} |g(x_n) - g(y_n)| < \infty$. これと 1) より

  2) $\quad |x_n - y_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

  ここで，$\overline{A} \times \overline{A}$ はコンパクトなので，必要なら部分列をとることにより $(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (a, a') \in \overline{A} \times \overline{A}$ としてよい．またこれと 2) より $a = a'$ を得る．以上から

  3) $\quad (x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (a, a).$

  $\overline{A} \subset D$ より，上の a に対し $\exists r > 0$, $\overline{B}(a, r) \subset D$. さらに，この $r > 0$ に対し 3) より, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $x_n, y_n \in \overline{B}(a, r)$. そこで $M = \sup\{|g'(x)|\ ;\ x \in \overline{B}(a, r)\}$ とすると, 平均値の定理より

  4) $\quad \forall n \geq n_0,\ |g(x_n) - g(y_n)| \leq M|x_n - y_n|.$

  1) と 4) は矛盾する.

- p.391, 例 15.7.3 証明 2 行目:「$K \subset J \subset I$」→「$K \subset J \subset A$」

- p.391, 命題 15.7.4 の証明は $(\star)$ 付きにする.

- p.392, 下から 5 行目．$I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^d$ の後に $(d = d_1 + d_2)$ を挿入.

- p.392, 下から 5 行目.「$y \in I_1$」→「$y \in I_2$」

- p.394, 例 15.7.7 の証明．S_k, S_{k-1} をそれぞれ I_k, I_{k-1} に訂正.

- p.394, 例 15.7.8 の証明．ディスプレイ 3 行目の $\frac{1}{2}$ は不要．4 行目二つ目の「$=$」を「$\stackrel{\text{例 }12.1.9}{=}$」に（根拠明示のため）.

- p.400, 例 16.1.1 (a),3 行目のディスプレイ．最後の $(n \longrightarrow \infty)$ を削除.

- p.405, 定理 16.1.6 の証明．全体を通じ，m, n を入れ替える（現状でも問題ないが，定理の主張で f_n と書いたのでそれに合わせるため）.

- p.407, 例 16.2.2 (c)．最後の一文「また,...」を削除.

- p. 412, 問 16.2.2. **「カタラン数」**$\to$ **「カタラン定数」**

- p. 415, (16.12) の直前.「特に $\theta = 2\pi$ として」$\to$「特に $\theta = 2\pi$ に対し, (16.10),(16.11) の左辺は零なので」(より分かりやすくするための書き足し)

- p.436, 問 1.2.2. 3–4 行目.「$A \cap U(A) \neq \emptyset$」$\to$「$A \cap U(A) = \emptyset$」（二箇所）

- p.437, 問 2.2.1. 4 行目.「$[\infty, -\gamma m + \beta]$」$\to$「$[-\infty, -\gamma m + \beta]$」

- p.439, 問 3.4.1. より簡単な解答：条件式で $x = a$ とし，$f(a) = g(a)$．さらに $x \leq a$ なら $0 \leq f(a) - f(x) \leq g(a) - g(x)$. $x \geq a$ なら $0 \leq f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$. 以上から全ての $x \in I$ に対し $|f(x) - f(a)| \leq |g(x) - g(a)|$. したがって g が a で連続なら f も a で連続である.

- p.439, 問 3.4.5. 1 行目.「$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - b^2 + 4ac$」$\to$「$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$」

- p.440, 問 4.2.2: n は正しくは m.

- p.440, 問 5.2.1 「絶対収束級数である．」$\to$「(b) の仮定をみたす級数である」

- p. 443, 問 6.4.2. 「等式.... の実部・虚部.」$\to$「等式.... を利用する.」

- p. 448, 問 7.3.4 の別解（将来の改訂で出版社と合意できれば, 現版の解をこの別解に差し替え． その場合，現版のヒントは削除）
  背理法による．f が非有界なら $|f(c_n)| \to \infty$ となる $c_n \in [0, 1]$ が存在する．さらに，定理 7.2.2 より $c \in [0, 1]$ および c_n の部分列 $c_{k(n)}$ で $c_{k(n)} \to c$ となるものが存在する．このとき，次の (1),(2) のいずれかである．(1) $c_{k(n)} < c$ となる n が無限個存在する．(2) $c_{k(n)} > c$ となる n が無限個存在する．例えば (1) とする．このとき $c_{k(n)}$ の部分列 $c_{\ell(n)}$ ですべての n に対し $c_{\ell(n)} < c$ となるものが存在する．また $c_{\ell(n)}$ は $c_{k(n)}$ の部分列なので $c_{\ell(n)} \to c$, ゆえに $f(c_{\ell(n)}) \to f(c-)$. これは c_n の選び方に矛盾する．(2) でも同様である.

- p.453, 問 9.4.6 (ii) f の一様連続性を用いない別解（別解を採用すれば，問 9.4.6 そのものを 3.4 節に移動できる.）：任意に小さな周期が存在することから，周期の列 p_n で $p_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ をみたすものがとれる．このとき, $\forall x \in D \stackrel{\text{def}}{=} \{mp_n \ ; \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\}$ に対し $f(x) = f(0)$. よって D が $\mathbb{R}$ で稠密であればよいが，それは次のようにして分かる．$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ を任意とするとき，n が十分大きければ $1 < (b-a)/p_n$. ゆえに $a/p_n < m < b/p_n$, すなわち $a < mp_n < b$ をみたす $m \in \mathbb{Z}$ が存在する.

- p. 455, 問 11.2.4「$f'(x)$ 任意の...」$\to$「$f'(x)$ は任意の...」

- p. 456, 問 11.3.8 (ii):「$\prod_{j=2}^n$」$\to$「$\prod_{j=1}^n$」

- p. 456, 問 11.4.3「定理 11.4.1(b) より」$\to$「実部，虚部に分けることにより，f は実数値としてよい．このとき定理 11.4.1 より」

- p. 458, 問 12.4.3, (12.31): 「$B(u, v+1)$」$\to$「$B(s, t+1)$」

- p. 458, 問 13.1.3 (iii): 「反例とひとつして,」$\to$「反例として,」

- p. 459, 問 13.1.5 (vi) の $(2,1)$ 成分: 「$-\mathrm{ch}\,x \mathrm{sh}\,y$」→「$\mathrm{ch}\,x \mathrm{sh}\,y$」
- p. 466, 問 15.5.2 (ii), 1 行目: 「$\int_0^{\pi/2}$」→ 「$\int_{-\pi}^{\pi}$」. 2 行目: 「$\int_0^{2\pi}$」→ 「$\int_{-\pi}^{\pi}$」.
- p. 466, 問 15.5.3 (ii), 1 行目.「A は縦線集合なので,」→ 「命題 15.2.2 より A は面積確定な縦線集合なので,」
- p. 477. 「カタラン数 (Catalan number)」→ 「カタラン定数 (Catalan's constant)」

p.387, (3) の証明

以下，$x \in \mathbb{R}^d$, $S \in \mathbb{R}^{d,d}$ に対し $\|x\|$, $\|S\|$ を次のとおりとする:

$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|S\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |S_{ij}|.$$

補題 1 $x \in \mathbb{R}^d$, $S, T \in \mathbb{R}^{d,d}$ に対し, $\|Sx\| \le \|S\|\|x\|$, $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$.

証明

$$\begin{aligned}
\|Sx\| &= \max_{i=1}^{d} \left| \sum_{j=1}^{d} S_{ij} x_j \right| \le \max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |S_{ij} x_j| \le \left(\max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |S_{ij}| \right) \max_{k=1}^{d} |x_k| = \|S\|\|x\|. \\
\|ST\| &= \max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{k=1}^{d} S_{ik} T_{kj} \right| \le \max_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} |S_{ik}| \sum_{j=1}^{d} |T_{kj}| \\
&\le \left(\max_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} |S_{ik}| \right) \left(\max_{\ell=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |T_{\ell j}| \right) = \|S\|\|T\|.
\end{aligned}$$

\\(^□^)/

補題 2 $U \subset \mathbb{R}^d$ は開，$a, h \in \mathbb{R}^d$, $\{a + th \,;\, t \in [0,1]\} \subset U$, $f \in C^1(U \to \mathbb{R}^d)$ とするとき,

$$\|f(a+h) - f(a)\| \le \|h\| \int_0^1 \|f'(a+th)\| dt,$$

ただし，ベクトル，行列のノルムは補題 1 の直前に定めた通りとする.

証明

$$\begin{aligned}
|f_i(a+h) - f_i(a)| &\stackrel{(13.24)}{=} \left| \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{d} h_j \partial_i f(a+th) \right) dt \right| \\
&\le \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{d} |h_j| |\partial_j f_i(a+th)| \right) dt \\
&\le \|h\| \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{d} |\partial_j f_i(a+th)| \right) dt \\
&\le \|h\| \int_0^1 \left(\max_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |\partial_j f_i(a+th)| \right) dt \\
&= \|h\| \int_0^1 \|f'(a+th)\| dt.
\end{aligned}$$

上式より所期不等式を得る. \\(^□^)/

ここから先では，次の記号を用いる:

$$K \stackrel{\text{def}}{=} [-1,1]^d, \quad \gamma = \frac{(1-\alpha) \wedge (\beta - 1)}{2},$$
$$h_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} g'(c)^{-1}(g(c+x) - g(c)).$$

γ の定義より，$\alpha < 1 - \gamma < 1 + \gamma < \beta$.

補題 3 $\delta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $\ell \in (0, \delta)$, $x \in \ell K$, および $c + \ell K \subset A_0$ をみたす $c \in A_0$ に対し

$$(1-\gamma)\|x\| \le \|h_c(x)\| \le (1+\gamma)\|x\|.$$

証明 まず次を示す．

1) $\delta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $\ell \in (0, \delta)$, $x \in \ell K$, および $c + \ell K \subset A_0$ をみたす $c \in A_0$ に対し $\|I_d - h_c'(x)\| < \gamma$, ただし $I_d \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_{ij})_{i,j=1}^d$.

$h_c'(x) = g'(c)^{-1}g'(c+x)$. そこで，$C = \sup_{y \in A_0} \|g'(y)^{-1}\|$ として，

$$\|I_d - h_c'(x)\| = \|g'(c)^{-1}(g'(c) - g'(c+x))\| \stackrel{\text{補題 1}}{\le} C\|g'(c) - g'(c+x)\|.$$

g' は A_0 上で一様連続であることから，上式より 1) を得る．

次に，1) を用い補題を示す．$\ell \in (0, \delta)$, $x \in \ell K$, $c + \ell K \subset A_0$ とする．$tx \in \ell K$ $(\forall t \in [0,1])$ と 1) より

2) $\displaystyle\sup_{t \in [0,1]} \|I_d - h_c'(tx)\| \le \gamma$.

ゆえに,

$$\begin{aligned} \|h_c(x)\| &\le \|x\| + \|x - h_c(x)\| \stackrel{\text{補題 2}}{\le} \|x\| + \sup_{t \in [0,1]} \|I_d - h_c'(tx)\| \|x\| \\ &\stackrel{2)}{\le} \|x\| + \gamma\|x\| = (1+\gamma)\|x\|. \end{aligned}$$

同様に，$\|h_c(x)\| \ge (1-\gamma)\|x\|$. \(^□^)/

補題 4 $A \subset \mathbb{R}^d$ はコンパクト，$G_1, \ldots, G_n \subset \mathbb{R}^d$ は開，$A \subset \bigcup_{j=1}^n G_j$ とする．このとき，ある $\delta > 0$ が存在し,「$\forall x \in A$, $\exists j = 1, \ldots, n$, $x + \delta K \subset G_j$」をみたす．

証明 $f_j(x) = \inf_{y \notin G_j} \|x - y\|$ は $x \in \mathbb{R}^d$ について連続，ゆえに $f(x) = \max_{j=1} r_j(x)$ も然り．また，仮定より $f|_A$ は正値である．そこで，$0 < \delta < \min_{x \in A} f(x)$ とすれば，$\forall x \in A$, $\exists j = 1, \ldots, n$, $f_j(x) > \delta$ (したがって $x + \delta K \subset G_j$). \(^□^)/

補題 5 $\delta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $c \in A_0$ に対し $c + \delta K \subset U$ かつ $h_c : \delta K \to h_c(\delta K)$ は同相写像である．

証明 任意の $c \in A_0$ に対し，$\det g'(c) \ne 0$. したがって逆関数定理より，ある $r(c) > 0$ が存在し，$B(c, r(c)) \subset U$ かつ $h_c : B(c, r(c)) \to h_c(B(c, r(c)))$ は同相写像である．このとき $A_0 \subset \bigcup_{c \in A_0} B(c, r(c))$ と A_0 のコンパクト性より，ある $c_1, \ldots, c_n \in A_0$ が存在し $A_0 \subset \bigcup_{j=1}^n B(c_j, r(c_j))$. これと補題 4 より，ある $\delta > 0$ が存在し,「$\forall c \in A_0$, $\exists j = 1, \ldots, n$, $c + \delta K \subset B(c_j, r(c_j))$」をみたす．このとき．任意の $c \in A_0$ に対し $c + \delta K \subset U$. また，$g : c + \delta K \to g(c + \delta K)$ は同相なので, $h_c : \delta K \to h_c(\delta K)$ も同相である． \(^□^)/

以上の準備のもとで，p.387, (3) を次の形で示す．

補題 6 $\delta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $\ell \in (0, \delta)$ および $c + \ell K \subset A_0$ をみたす $c \in A_0$ に対し次が成立する:

$$\alpha \ell K \subset h_c(\ell K) \subset \beta \ell K.$$

証明 $\delta > 0$ は補題 3,5 が成立するようにとる．

1) $h_c(\ell K) \subset \beta\ell K$.

実際，$x \in \ell K$ なら，$\|h_c(x)\| \overset{\text{補題 3}}{\leq} (1+\gamma)\|x\| \leq \beta\ell$.

2) $\partial h_c(\ell K) \cap \alpha\ell K = \emptyset$.

$y \in \partial h_c(\ell K)$ とする．補題 5 より h_c は δK 上で同相なので，$\partial h_c(\ell K) = h_c(\ell\partial K)$. ゆえに $\exists x \in \ell\partial K,\ y = h_c(x)$. すると，

$$\|y\| = \|h_c(x)\| \overset{\text{補題 3}}{\geq} (1-\gamma)\|x\| = (1-\gamma)\ell > \alpha\ell.$$

ゆえに $y \notin \alpha\ell K$.

3) $0 \in h_c(\ell K)^\circ$.

実際，補題 5 より h_c は δK 上で同相なので，$h_c(\ell K)^\circ = h_c(\ell K^\circ) \ni 0$.

4) $\alpha\ell K \subset h_c(\ell K)$.

一般に $F \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\mathbb{R}^d = F^\circ \cup \partial F \cup (\overline{F})^{\mathsf{c}}$. これを閉集合 $F \overset{\text{def}}{=} h_c(\ell K)$ に適用すると，$\mathbb{R}^d = F^\circ \cup \partial F \cup F^{\mathsf{c}}$. これと 2) より $\alpha\ell K \subset F^\circ \cup F^{\mathsf{c}}$. ところが $\alpha\ell K$ は連結，また F°, F^{c} は非交差開集合なので $\alpha\ell K \cap F^\circ = \emptyset$ または $\alpha\ell K \cap F^{\mathsf{c}} = \emptyset$. 一方，3) より $\alpha\ell K \cap F^\circ \ni 0$. したがって $\alpha\ell K \cap F^{\mathsf{c}} = \emptyset$, すなわち $\alpha\ell K \subset F$. \(^▫^)/

注 補題 6 の最初の包含関係 $\alpha\ell K \subset h_c(\ell K)$ はブラウアーの固定点定理を用いて示すこともできる．$y \in (1-\gamma)\ell K$ を任意に固定するとき，$x \mapsto h_c(y-x) - (y-x)$ は $\gamma\ell K$ からそれ自身への連続写像である．実際, $x \in \gamma\ell K$ に対し $y - x \in \ell K$. ゆえに補題 3 の証明より,

$$\|h_c(y-x) - (y-x)\| \leq \gamma\|y-x\| \leq \gamma\ell.$$

以上と，δK がコンパクト凸集合であることから，ブラウアーの固定点定理が適用できる．その結果，$\exists x_0 \in \gamma K,\ x_0 = h_c(y-x_0) - (y-x_0)$, したがって，$y \in h_c(y-x_0) \in h_c(\ell K)$.