解析学演習[1]

出題者：吉田伸生

＜ 記号 ＞

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, $\mathbb{Z}=$ 整数全体, $\mathbb{Q}=$ 有理数全体, $\mathbb{R}=$ 実数全体, $\mathbb{C}=$ 複素数全体, $\mathbf{i}=$ 虚数単位.

＜ 問題の概要 ＞

数列・関数列 ([1] –)
不等式, 数列・関数列の極限, Abel の級数変形法の応用, Abel の定理, Tauber の定理, 無限和と無限積 , Euler の等式, 素数の逆数和, l^1 の Fourier 変換, 確率行列とその Green 関数

実 1 変数関数 ([45] –)
多項式近似定理, 全ての点で微分不可能な連続関数, $e \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$, 連続関数の Fourier 級数展開（Dirichlet 核, Fejer 核), 一様分布数列・Weyl の定理, 独立確率変数列の初等的方法による構成,（弱い意味での）大数の法則, 多項式近似定理の確率論的証明, Random walk

実多変数関数 ([83] –)
多重指数, 波動方程式, Hamiltonian formalism と正準変換, 球面上の Laplacian, 球の体積・表面積, (気体分子に関する) Maxwell の速度分布則, 双曲幾何への入門, 釣り鐘関数の構成, 与えられた閉集合を零点集合として持つ C^∞-関数, 「$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 f(x,y)dy \neq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ 」の例,「$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx \neq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$」 の例

常微分方程式 ([105] –)
線形常微分方程式の一般論（[105]）及びその応用

Norm の導入 ([109] –)
Banach 空間, Banach algebra, 指数関数（行列,Banach algebra）, 有界作用素, Gâteaux-微分と Fréchet-微分, 関数方程式：$f(x+y)=f(x)+f(y)$, 内積, 電圧と Dirichlet の原理, Hilbert 空間, Riesz の表現定理.

位相（距離）・連続性 ([139] –)
Dini の定理, 可分性, Stone-Weierstrass の定理, 一様連続性, 半連続性, 同程度連続性, Ascoli-Arzela の定理, 凸-関数, 局所凸位相の定義, Baire の定理と応用

複素 1 変数関数 ([190] –)
孤立特異点, 留数, Montel の定理, Vitali の定理

Lebesgue 積分 ([202] –)
σ-field, 極限と積分の交換, L^p-関数, 一様可積分性, Fubini の定理, convolution, 相関不等式 (FKG,GKS), 微分と積分の交換, δ-関数の近似, Gauss 核, Green 核, Poisson 核, Hermiten 多項式と Ornstein-Uhlenbeck 半群, spherical harmonics, Stokes の定理の応用, (静電場についての) Gauss の法則, 調和関数, complex measures,Fourier 解析,（強い意味での）大数の法則, 一般化された微積分の基本公式, 一般化された部分積分公式, 相対エントロピー, Helmholz 自由エネルギーの変分問題.

関数解析 ([310] –)
無限次元 Lebesgue 測度の非存在, 閉作用素, compact 作用素, w*-位相

初等整数論・パズル ([326] –)
部屋割り論法, 連分数, Dirichlet 級数, 素数定理, 平方剰余の相互法則

---
[1] 2018 年 8 月 8 日.

< 注意 >

数学にかかわる人間は研究者、教育者ともに数学的内容を正しく理解する能力に加えそれを他人に伝える能力が必須である。その意味で演習は、問題解決能力に加え、その結果を明快かつ簡潔に説明する能力を養う場でもある。

上記趣旨から、内容の正しさと説明の明快さを兼ね備えた口頭発表のみが単位認定の為の評価対象となる。そのような口頭発表をするためには**解答を十分吟味し、ノートに整理した上で臨む**必要があるが、多くの場合そのような過程を通じて問題の本質がより明らかとなり、深い理解に到達出来る。

< 「背理法」についての注意 >

背理法は基本的に「非存在」を示す為に有効な証明法であるが（例えば 「一意性」とは 2 つ以上存在しないこと、また「a が無理数である」ことは $a = p/q$ となる整数の非存在）背理法を使わず直接示せる場合にわざわざ背理法を用いることは好ましくない。直接証明法は実際の前提や状況を素直に使って結論を出すため、証明の過程で前提や状況そのものに対する理解も深まって行く。一方、背理法では証明すべき内容を否定して出発するため、論理が実際の状況と逆の世界で進行してしまい、背後にある数学的状況が読み取りにくくなる。とりあえず背理法を使って何かを証明した場合も、可能な限り直接証明法に書き換えた方が実際の前提や状況を素直に反映したわかりやすい証明になることが多い。

< 問題 >

[1] $0 < p < \infty,\ x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ とするとき、次を示せ；

$$\min\{1,\ n^{p-1}\} \sum_{j=1}^{n} x_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^p \leq \max\{1,\ n^{p-1}\} \sum_{j=1}^{n} x_j^p.$$

(3.28.92-2)

[2] 集合 A, B と実数値関数 $f : A \times B \to \mathbb{R}$ とする。以下の命題が正しければ証明、さもなくば反例を与えよ；(i) $\sup_{a\in A} \sup_{b\in B} f(a,b) = \sup_{b\in B} \sup_{a\in A} f(a,b) = \sup\{f(a,b);\ (a,b) \in A \times B\}$.
(ii) $\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} f(a,b)$. (iii) (a_0, b_0) が次の条件：

$$f(a, b_0) \leq f(a_0, b_0) \leq f(a_0, b),\ \forall (a,b) \in A \times B$$

を満たすなら、$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} f(a,b) = \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} f(a,b) = f(a_0, b_0)$.

(3.30.92-1)

[3] 二重数列 $\{a_{ij} \in \mathbb{R}; i, j = 1, 2, \cdots\}$ が 2 条件；「$a_{ij} = a_{ji} \leq 0 \quad \text{if}\ i \neq j$,」「$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \in [0, \infty), \quad \forall i = 1, 2, \cdots$」を満たせば、任意の $n = 1, 2, \cdots$ 及び $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ に対し、$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j} \geq 0$ であることを示せ。

(3.5.92-1)

[4] 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $p_n \in (0,1)$, $q_n \in [0,1)$, $r_n = 1 - p_n - q_n$ とする。$i \in \mathbb{Z}$ を固定するとき、関数 $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ についての次の 2 条件 (a), (b) が同値であることを示せ；

(a) $\varphi(n) = p_n\varphi(n+1) + r_n\varphi(n) + q_n\varphi(n-1)$ if $n \neq i$

(b)

$$\varphi(n) = \begin{cases} \varphi(i) + (\varphi(i+1) - \varphi(i)) \sum_{m=i}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{m} \frac{q_j}{p_j} & \text{if } n > i+1, \\ \varphi(i) + (\varphi(i-1) - \varphi(i)) \sum_{m=n+1}^{i} \prod_{j=m}^{i-1} \frac{p_j}{q_j} & \text{if } n < i+1. \end{cases}$$

(9.22.98-1)

[5] $\delta > 0$ に対し数列 $S_n = n^{\delta} \sum_{j=1}^{n-1} j^{-(1+\delta)}(n-j)^{-\delta}$, $n = 1, 2, ...$ が有界であることを示せ。

(7.27.06)

[6] 収束する複素数列 $a_n \longrightarrow a, b_n \longrightarrow b$ に対し $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = ab$ を示せ。

(1.14.92-3)

[7] $a_1 > b_1 > 0$ とし、実数列 a_n, b_n $(n = 2, 3, \cdots)$ を $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ によって順次定める。このとき、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ が共に存在して等しいことを示せ。

(10.30.91-2)

[8] 実数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が全ての $m, n \geq 1$ に対し「$a_{m+n} \leq a_m + a_n$」を満たすとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = \inf\limits_{n\geq 1} a_n/n$ （両辺 $= -\infty$ も許す）を示せ。

ヒント； $m \geq 1$ を任意に固定し、$n \geq m$, $n = mq + r$ (q は n/m の整数部分) とすると $a_n \leq qa_m + a_r$. 従って $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n/n \leq a_m/m$.

(10.24.91-3)

[9] 実数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\lim\limits_{n\to\infty} c_n/n = 0$ かつ全ての $m, n \geq 1$ に対し $a_{m+n} \leq a_m + a_n + c_n$ を満たすとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = \inf\limits_{n\geq 1}(a_n + c_n)/n$ （両辺 $= -\infty$ も許す）を示せ。

(2.23.98-1)

[10] 数列 $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$ が $\inf\limits_{n\geq 1} n^{-1/2} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k > 0$ をみたすとき，$\inf\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$ を示せ.

(5.8.03-1)

[11] $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \sqrt{\varepsilon} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\varepsilon n^2} = \sqrt{\pi}$ を示せ。(12.7.91-1)

[12] 次を示せ； $\lim\limits_{n\to\infty} \sharp\{n$ の正の約数$\}/n^{\varepsilon} = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$

(2.29.92-3)

[13] $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $C_k = \{0,1,\cdots,k\}^d$ $(k=0,1,\cdots)$ に対して、$N_k^-(\Lambda) = \sharp\{x \in \mathbb{Z}^d;\ x + C_k \subset \Lambda\}$, $N_k^+(\Lambda) = \sharp\{x \in \mathbb{Z}^d;\ (x+C_k) \cap \Lambda \neq \phi\}$ と置く（ただし、$x + \Lambda = \{x + y \in \mathbb{Z}^d; y \in \Lambda\}$, また $\sharp\{\cdots\}$ は 集合 $\{\cdots\}$ に属する点の個数）。集合列 $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$ $(n \geq 1)$ が $\forall k \geq 0$ に対し $N_k^-(\Lambda_n) \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$, $\dfrac{N_k^-(\Lambda_n)}{N_k^+(\Lambda_n)} \stackrel{n\to\infty}{\to} 1$ を満たすとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{N_k^{\pm}(\Lambda_n)}{\sharp(\Lambda_n)} = 1$, $\forall k \geq 0$. を示せ。

(9.9.92-1)

[14] 有界複素数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し、$S_n = x_1 + \ldots + x_n$ と置く。ある自然数列：$N_1 < N_2 < \cdots$ が $\displaystyle\lim_{l\to\infty} \frac{N_{l+1}}{N_l} = 1$, $\displaystyle\lim_{l\to\infty} \frac{S_{N_l}}{N_l} = x$ を満たすとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = x$ を示せ。

(1.1.92-1)

[15] 次を示せ; (i) 非減少自然数列 $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 及び数列 $\{a_{n,m} \in \mathbb{C}\}$ $(n = 1,2,\cdots,\quad m = 1,\cdots,p(n))$ は $p(n) \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$, $\sum_{m=1}^{p(n)} a_{n,m} \stackrel{n\to\infty}{\to} a$, $\sum_{m=1}^{p(n)} |a_{n,m}|^2 \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$ を満たすとする。このとき、
$\displaystyle\prod_{m=1}^{p(n)} (1 + a_{n,m}) \stackrel{n\to\infty}{\to} e^a$. (ii) $a, a_n \in \mathbb{C}$ $(n = 1,2,\cdots)$, $a_n \stackrel{n\to\infty}{\to} a$ ならば $\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\to} e^a$.

(i) のヒント：先ず次に注意：$a_j, b_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ が絶対値 $\leq M$ なら、
$|\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j| \leq M^{n-1} \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|$.
これを用いれば、$\displaystyle\prod_{m=1}^{p(n)} (1 + a_{n,m}) - \exp\left(\sum_{m=1}^{p(n)} a_{n,m}\right) \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$. がわかる。

(4.15.94-1)

[16] $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n} \to 0$ のとき、次を示せ[2]:
$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \sim \exp(a_n)$, $\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \sim \exp(-a_n)$.

(3.23.07-1)

[17] $b \geq 0$ とする。$n \to \infty$ のとき、$e^b - \sum_{m=0}^n \frac{b^m}{m!} \sim \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$ を示せ。

(3.29.07-1)

[18] $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。任意の $m > 1$ に対し $0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}$ を満たす $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ が存在するとき、α を **Liouville の超越数**と言う。Liouville の超越数は、超越数である（整数を係数とする多項式の零点にならない）ことが知られている。以下を示すことにより、Liouville の超越数を具体的に与えよ：
(i) $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k!}\right| < 2^{-(n+1)!}$
(ii) $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k!}$, $p_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{n!-k!}$, $q_n = 2^{n!}$ とする。任意の $m > 1$ に対し n が十分大きければ、$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^m}$.

(3.13.07)

[2] 一般に $a_n \sim b_n$ とは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ という意味とする。

[19] 非負実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について次を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n \downarrow 0 \text{ となる全ての } (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ に対して} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty, \end{cases}$$

(10.31.91-0)

[20] 非負実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について次を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n \uparrow \infty \text{ を満たす } (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ が存在して} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty, \end{cases}$$

(10.31.91-1)

[21] $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ をみたすなら、次を満たす $y_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が存在する；$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^p = \infty, \quad \forall p > 1.$

(8.1.92-1)

[22] X を集合, $f_n : X \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は一様 Cauchy 列とする：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m \ge n} \sup_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| = 0$$

このとき f_n はある $f : X \to \mathbb{C}$ に一様収束することを示せ。

(4.21.98-1)

[23] (i) X は集合, $g_n : X \to [0, \infty)$, $h_n : X \to \mathbb{C}$ は全て有界とする．更に X の各点で，以下を仮定する．

(a) $g_n \searrow 0$ (n について単調減少し，0 に収束).

(b) $H_n \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{n} h_j$ が n について有界.

このとき，$f_n = \sum_{j=1}^{n} g_j h_j$ は X の各点で収束すること, また特に， g_n の収束が X 上一様かつ H_n が X 上一様有界なら，f_n の収束は X 上一様であることを示せ.
ヒント：f_n が一様コーシー列 ([22] 参照) であることを言うために **Abel** 変形を用いる：
$x_j, y_j \in \mathbb{C}$, $1 \le m < n$ に対し
$\sum_{j=m}^{n} x_j y_j = S_n y_n - S_m y_{m-1} + \sum_{j=m}^{n-1} S_j (y_j - y_{j+1})$, ここで $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ $(n \ge 1)$.
(ii) $X_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, \ \ |z| \le 1, \ |1 - z| > \varepsilon\}$ $(\varepsilon \ge 0)$, このとき，非負実数列 $a_n \searrow 0$ に対し $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ $(z \in X_0)$ は各点収束し，X_ε $(\varepsilon > 0)$ 上一様収束することを示せ.

(12.27.91-1)

[24] a_n, b_n は実数列、$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j (b_j - b_{j-1})$, $t_n = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) b_j$ とする。以下を示せ：
(i) $s_n + t_n = a_n b_n - a_1 b_0$.
(ii) $a \in \mathbb{R}$, $0 = b_0 < b_1 < .... < b_n \to \infty$ のとき、

$$a_n \to a \iff s_n / b_n \to a \text{ かつ } t_n / b_n \to 0$$

上記 s_n/b_n を (a_n) の **Cesáro 平均**と言う（$b_n = n$ の場合が典型的)。また、「$a_n \to a \;\Rightarrow\; t_n/b_n \to 0$」を **Kronecker の補題**と言う。

(1.14.92-2)

[25] $\alpha \ge 1$, $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \le \alpha(1-|z|)\}$ とする。(i) D_α は 凸集合（i.e., $0 \le \lambda \le 1$, $z, w \in D_\alpha$ ならば $\lambda z + (1-\lambda)w \in D_\alpha$）であり、実軸上の区間 $[0,1]$ を含むこと、更に

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \bigcup_{\alpha \ge 1} D_\alpha \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$$

を示せ。また D_α の概形を描け。(ii) **Abel の定理**； $a_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対し級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ の収束を仮定する。このとき $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ は $z \in D_\alpha$ について一様収束することを示し、$f : D_\alpha \to \mathbb{C}$ の連続性を結論せよ。

ヒント；$S_{n,m} = \sum_{j=m+1}^n a_j$ とおく。仮定より $\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} |S_{n,m}| = 0$. また、$z \in D_\alpha$ に対し

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{n} a_j z^j\right| &= \left|S_{n,m} z^n + \sum_{j=m+1}^{n-1} S_{j,m}(z^j - z^{j+1})\right| \\ &\le |S_{n,m}| + |1-z| \sum_{j=m+1}^{n-1} |S_{j,m}|\,|z|^j.\end{aligned}$$

(10.19.98-1)

[26] $a_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対し $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ を仮定する。以下を示せ；(i) $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ ならば $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ は絶対収束する。(ii) **Tauber の定理**；極限 $\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(1-\frac{1}{n})$ が存在するなら級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ が収束し、その値は α に等しい。

ヒント： 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、N が十分大きければ $\sup_{j\ge N} j|a_j| < \varepsilon$. 次に $n \ge N$ とすると

$$\begin{aligned}\left|f(z) - \sum_{j=0}^n a_j\right| &\le \sum_{j=0}^n \left|a_j(z^j - 1)\right| + \sum_{j=n+1}^\infty |a_j z^j| \\ &\le |z-1| \sum_{j=0}^n j|a_j| + n^{-1} \sum_{j=n+1}^\infty j|a_j z^j| \\ &\le |z-1| \sum_{j=0}^n j|a_j| + \varepsilon n^{-1}(1-|z|)^{-1}.\end{aligned}$$

そこで $z = 1 - \frac{1}{n}$, $n \to \infty$ とする。

余談；Abel の定理 ([25]) では級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ の収束を仮定して $f(z)$ の $z = 1$ における連続性を結論したが、Tauber の定理は、付加条件 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ のもとで Abel の定理の逆も成立することを言っている。なお、Tauber の定理で a_n に対する付加条件を全く外してしまうと次のような反例がある；$(1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^n$ (左辺は $z \to 1$ で極限を持つが、右辺は $z = 1$ に対しては収束しない)。

(10.20.98-1)

[27] 集合 X と写像 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し、和：$\sum_{x\in X} f(x)$ を次のように定義する；

- $f : X \to [0,\infty)$ の場合；$\displaystyle\sum_{x\in X} f(x) = \sup\{\sum_{x\in F} f(x);\ \ F$ は X の有限部分集合。$\}$.
- $f : X \to \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{x\in X} |f(x)| < \infty$ の場合；$\displaystyle\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} f_+(x) - \sum_{x\in X} f_-(x)$, 但し $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$, $f_-(x) = -\min\{0, f(x)\}$.
- $f : X \to \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{x\in X} |f(x)| < \infty$ の場合；$\displaystyle\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} \mathrm{Re} f(x) + \mathbf{i} \sum_{x\in X} \mathrm{Im} f(x)$

(i) $f : X \to [0,\infty)$ の場合に以下を示せ;(a) $\sum_{x\in X} |f(x)| < \infty$ ならば　$S(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ は高々加算濃度。(b) X の有限部分集合列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ が $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \supset S(f)$ を満たすなら、$\displaystyle\sum_{x\in X} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{x\in F_n} f(x)$. (c) 任意の全単射 $\sigma : X \to X$ に対して、$\displaystyle\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} f(\sigma(x))$.

(ii) $f : X \to \mathbb{C}$, $\sum_{x\in X} |f(x)| < \infty$ の場合に (i) の (a)–(c) を示せ。

(iii) $f, g : X \to \mathbb{C}$, $\sum_{x\in X} |f(x)| < \infty$, $\sum_{x\in X} |g(x)| < \infty$ とするとき、$\sum_{x\in X}(f(x) + g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x)$ を示せ。 (12.10.91-1)

[28] 集合 X, Y と $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ について以下を示せ；

(i) $\displaystyle\sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in Y} |F(x,y)|\right) = \sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X} |F(x,y)|\right) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} |F(x,y)|.$

(ii) ; (i) の 3 つの和のいずれか 1 つ、(したがって全て) が有限なら、

$$\sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in Y} F(x,y)\right) = \sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X} F(x,y)\right) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} F(x,y).$$

(iii) $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C};\ \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)| < \infty\}$ とするとき、

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} |f(x-y)g(y)|\right) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)| \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} |g(y)|.$$

(iv) $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z}^d \to \mathbf{C})$ に対し和：$f * g(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f(x-y)g(y)$ は全ての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して絶対収束し 、$\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (f*g)(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x) \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} g(y)$.

(11.25.91)

[29] $a_n, b_n, b \in \mathbb{C}$, $c_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, 級数 $A = \sum_0^\infty a_n$ は収束, $b_n \to b$ とする．以下を示せ：
(i) $a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-p}$ $(0 < p < 1/2)$ は上の仮定を満たし，かつ $|c_n| \to \infty$.
(ii) 級数 $A = \sum_0^\infty a_n$ が絶対収束すれば $c_n \to bA$.

(4.24.12-1)

[30] $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $c_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ とし，級数 $A = \sum_0^\infty a_n$, $B = \sum_0^\infty b_n$ の収束を仮定する．このとき，級数 $C = \sum_0^\infty c_n$ に関して以下を示せ：
(i) $a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-p}$ $(0 < p < 1/2)$ は上の仮定を満たすが，C は収束しない．
(ii) A が絶対収束すれば C は収束し $C = AB$. ヒント：$B_n = \sum_{j=0}^n b_j$ に対し，$\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{j=0}^n a_j B_{n-j}$ を示し [29] に帰着させよ．
(iii) A,B がともに絶対収束すれば C も絶対収束する．
(iv) C が収束すれば $C = AB$.

(11.29.91-3)

[31] 問題 [30] の c_n を次の $c'_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_{n/d} b_d$ で置き換えても (ii) が成立することを示せ。但し $\displaystyle\sum_{d|n}$ とは n の約数 $d = 1, \cdots, n$ についての和である。

(2.26.92-1)

[32] $H = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im} z > 0\}$, $k = 4, 5, \cdots$ とする。以下を示せ；

(i) 級数 $G_k(z) = \displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} (m + nz)^{-k}$ は $z \in H$ について局所一様に絶対収束する。

(ii) $z \in H$, $a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$ ならば、$G_k\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k G_k(z)$.

(9.15.92-1)

[33] $\ell^1(\mathbb{Z}^d \to \mathbf{C})$ における演算 $*$ (cf. [28]) について結合律:$(f * g) * h = f * (g * h)$, 可換律: $f * g = g * f$ を示せ。また、演算 $*$ 関する単位元は何か？

(5.9.92-1)

[34] 0 を含まない複素数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ について、極限値 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^N a_n$ が存在して 0 でないとき、その値を $(a_n)_{n=1}^\infty$ の**無限積**といい、$\displaystyle\prod_{n=1}^\infty a_n$ で表す。$(a_n)_{n=1}^\infty$ が 0 を含めば、常に $\prod_{n=1}^\infty a_n = 0$ と定義する。以下を示せ；集合 X 上の有界関数列 $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \cdots$ について、

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \text{ が } X \text{ 上一様収束} \quad &\Longleftrightarrow \quad \textstyle\prod_{n=1}^\infty (1 + |f_n(x)|) \text{ が } X \text{ 上一様収束} \\ &\Rightarrow \quad \textstyle\prod_{n=1}^\infty (1 + f_n(x)) \text{ が } X \text{ 上一様収束.} \end{aligned}$$

特に $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \cdots$ について $f_n(x) \equiv a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ を考えることにより、

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty \Longleftrightarrow \prod_{n=1}^\infty (1 + |a_n|) \text{ が収束} \quad \Rightarrow \prod_{n=1}^\infty (1 + a_n) \text{ が収束}$$

ヒント; $x \geq 0$ が十分小なら、$e^{\frac{x}{2}} \leq 1 + x \leq e^x$.

(3.4.92-1)

[35] $0 < a_0 < a_1 < ... < a_n$ とするとき,「$\sup_{n\geq 0} a_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < \infty$」を示せ.

(4.6.12-1)

[36] $\varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}$, $-1 \neq a_n \in \mathbb{R}$ （$n = 1, 2, \ldots$）, $a_n \to 0$ とする。以下を示せ ; (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{2k-1}(a_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{2k}$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ のうちいずれか 1 つが収束すれば残り 2 つの収束は互いに同値である。(ii) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するが $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は収束しない。(iii) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$ に対し $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は収束するが $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束しない。

(i) のヒント; $\lim_{|x|\to 0}\frac{\log(1+x)-\varphi_{2k-1}(x)}{x^{2k}} = -\frac{1}{2k} \neq 0$.
(ii) のヒント： (i) で $k = 1$ の場合を考えよ。
(iii) のヒント： (i) で $k = 2$ の場合を考えよ。

(12.25.97-1)

[37] 以下を示せ : (i) $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ は恒等的に 0 ではなく、次の (a),(b) を満たすとする:
(a) $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ が互いに素 $\Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$,
(b) $\sum_{p:\ 素数}\sum_{r=1}^{\infty}|f(p^r)| < \infty$.
このとき、$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)| < \infty$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}f(n) = \prod_{p:\ 素数}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}f(p^r)\right)$.
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} = \prod_{p:\ 素数}\frac{1}{1-p^{-s}}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. (**Euler の積公式**).
Euler の積公式 (1737 年) は、素数の配置に関する情報が Riemann の ζ-関数の中に秘められていることを示唆している。Riemann の ζ-関数の研究は 19 世紀になって Riemann に引き継がれた。その中で有名な予想「$\zeta(s)$ の非自明な零点の実部は 1/2 である」(1859 年) がなされ、また、 $\zeta(s)$ という記号も定着した。そうした研究の延長線上にある、最も有名な結果のひとつが、**素数定理:** $\lim_n \frac{\pi_n}{n/\log n} = 1$ であろう（π_n は n 以下の素数の個数）。素数定理は Gauss や Legendre が既に予想していたが、1896 年に de La Valée Poussin と Hadamard によって独立に証明された。

(12.12.91-2)

[38] 次を示せ ; $\sum_{p:\ 素数} p^{-1} = \infty$.

ヒント ; Euler の等式 ([37]) で $s \searrow 1$ とし、$\prod_{p:\ 素数}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \infty$ を示した上で無限和と無限積の関係（[34]）に注意せよ。

(3.2.92-1)

[39] $f \in \ell^1(\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対して $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\widehat{f}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) \exp(-2\pi \mathbf{i} x\theta).$$

以下を示せ；(i) $\widehat{f}$ は周期 1 をもつ連続関数. (ii) $|\widehat{f}(\theta)| \le \sum_{x \in \mathbb{Z}} |f(x)|$.
(iii) $f(x) = \int_0^1 \widehat{f}(\theta) \exp(2\pi \mathbf{i} x\theta) d\theta$.

(1.27.98-1)

[40] 問題 [39] の続き
以下を示せ；(i) $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$. (ii) $n = 0, 1, \ldots$ に対し $f^{*n}(x) = \int_0^1 \widehat{f}(\theta)^n \exp(2\pi \mathbf{i} x\theta) d\theta$, 但し $f^{*0}(x) \equiv \delta_{x,0}$, $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$, $(n \ge 1)$. (iii) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} |f(x)| < 1$ を仮定すると、$\sum_{n=0}^\infty f^{*n}(x) = \int_0^1 \frac{\exp(2\pi \mathbf{i} x\theta) d\theta}{1 - \widehat{f}(\theta)}$.

(1.27.98-2)

[41] 問題 [39] の多次元への一般化；
$f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C})$ に対して $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\widehat{f}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(x) \mathbf{e}_{-x}(\theta), \quad \text{但し } \mathbf{e}_x(\theta) = \exp\left(2\pi \mathbf{i} \textstyle\sum_{j=1}^d x_j \theta_j\right).$$

以下を示せ；(i) $\widehat{f}$ は連続かつ $\delta_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^d \in \mathbb{Z}^d$ $(j = 1, \ldots, d)$, $\theta \in \mathbb{R}^d$ に対し、$\widehat{f}(\theta + \delta_j) = \widehat{f}(\theta)$. (ii) $|\widehat{f}(\theta)| \le \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |f(x)|$. (iii) $f(x) = \int_{[0,1]^d} \widehat{f}(\theta) \mathbf{e}_x(\theta) d\theta$.

(1.28.98-1)

[42] 問題 [41] の続き
以下を示せ；(i) $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z}^d \to \mathbf{C})$ に対し $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$. (ii) $n = 0, 1, \ldots$ に対し $f^{*n}(x) = \int_{[0,1]^d} \widehat{f}(\theta)^n \mathbf{e}_x(\theta) d\theta$, 但し $f^{*0}(x) \equiv \delta_{x,0}$, $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$, $(n \ge 1)$. (iii) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} |f(x)| < 1$ を仮定すると、$\sum_{n=0}^\infty f^{*n}(x) = \int_{[0,1]^d} \frac{\mathbf{e}_x(\theta) d\theta}{1 - \widehat{f}(\theta)}$.

(1.28.98-2)

[43] S を可算集合、$p : S \times S \to [0, 1]$ は条件；$\sum_{y \in S} p(x, y) = 1$, $\forall x \in S$ を満たすとする（このような関数 $p : S \times S \to [0, 1]$ を確率行列と呼ぶ）。更に $p^k : S \times S \to [0, 1]$ $(k = 0, 1, \ldots)$ を次式によって帰納的に定める；$p^0(x, y) = \delta_{xy}$, $p^{k+1}(x, y) = \sum_{z \in S} p^k(x, z) p(z, y)$. 以下を示せ；(i) p^k $(k = 0, 1, \ldots)$ は全て確率行列。(ii) 確率行列 p に対して、関数 $g = \sum_{k=0}^\infty p^k : S \times S \to [0, \infty]$ を p の Green 関数という。$c(x, y) = \sup_{k \ge 0} p^k(x, y)$ と置くと、$x, y, x', y' \in S$ に対し $g(x, y) \ge c(x, x') g(x', y') c(y', y)$.

余談：$S = \mathbb{Z}^d$ で $p(x, y)$ が関数 f を用いて $p(x, y) = f(x - y)$ と書けるとき、p^k は $p^k(x, y) = \underbrace{f * \cdots * f}_{n}(x - y)$ という形で convolution を使って表わせる。特に

$$f(x) = \begin{cases} 1/2d, & x \text{ が原点 } 0 \text{ と隣接} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

の場合が d-次元（単純）random walk に対応する（問題 [81] 参照）。

(2.20.93-1)

[44] 問題 [43] において S を有限集合とする。以下を示せ;(i) 任意の確率行列 p に対し $g(x,x)=\infty$ となる $x\in S$ が存在する。(ii) 確率行列 p が全ての $x,y\in S$ で、$c(x,y)=\sup_{k\geq 0} p^k(x,y)>0$ を満たすとする。このとき、全ての $x,y\in S$ で $g(x,y)=\infty$。

(2.20.93-2)

[45] **多項式近似定理;**
$f\in C([0,1]\to\mathbb{C})$ に対し $B_n(x;f)=\sum_{r=0}^n f\left(\frac{r}{n}\right)\frac{n!}{r!(n-r)!}x^r(1-x)^{n-r}$ を Bernstein 多項式という。$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq 1}|B_n(x;f)-f(x)|=0$ を示せ。

(4.27.92-1)

[46] **Dini の第 2 定理;**
$-\infty<a<b<\infty$, $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ とする。各 $n=1,2,\dots$ に対し $f_n:I\to\mathbb{R}$ は単調増加関数であり、各 $t\in I$ に対し $f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)$ が存在して連続と仮定する。このとき、$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}|f_n(t)-f(t)|=0$ を示せ。

(3.22.00)

[47] 関数 $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ が非減少 ($s<t\Rightarrow\varphi(s)\leq\varphi(t)$) なら、φ の不連続点は高々可算個しかないことを示せ。

ヒント;非加算無限個の正数の和は必ず発散する([27])。

(12.17.91-1)

[48] $-\infty\leq a<s<t<b\leq\infty$, $f\in C((a,b)\to\mathbb{R})$ とするとき次を示せ;

$$\inf_{a<x<b}\underline{D}^+f(x)\leq\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leq\sup_{a<x<b}\overline{D}^+f(x),$$

此処で、$\overline{D}^+f(x)=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\underline{D}^+f(x)=\underline{\lim_{h\to 0+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

ヒント;例えば不等式右側を示すには次が言えれば良い;$\exists s_n\in(a,b)$, $\exists h_n\downarrow 0$,

$$\sup_{a<s<t<b}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(s_n+h_n)-f(s_n)}{h_n}.$$

(1.2.92-5)

[49] $f\in C^2(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, $f(t)f''(t)\geq 0$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ とする。以下を示せ;(i) $c\in\mathbb{R}$, $f(c)>0$, $f'(c)>0$ なら任意の $t\in[c,\infty)$ に対し $f'(t)\geq 0$ かつ $f''(t)\geq 0$. (ii) $-\infty<a<b<+\infty$ とし,更に $f(a)\leq 0<f(b)$ あるいは $f'(a)\leq 0<f'(b)$ なら任意の $t\in[b,\infty)$ に対し $f'(t)\geq 0$ かつ $f''(t)\geq 0$. (3.2.98-1)

[50] $J\subset\mathbb{R}$ を長さ有限の閉区間、I を J を含む開区間とする。次を示せ;

(i) $f\in C^1(I\to\mathbb{C})$ ならば、$\lim_{h\to 0}\max_{x\in J}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=0$.

(ii) $f \in C^m(I \to \mathbb{C})$ ならば、$\lim_{h\to 0} \max_{x\in J} \left| h^{-m}\Delta^m f(x;h) - f^{(m)}(x)\right| = 0$, ここで、

$$\Delta^m f(x;h) = \begin{cases} f(x) & (m=0) \\ \Delta^{m-1} f(x+h;h) - \Delta^{m-1} f(x;h) & (m \geq 1.) \end{cases}$$

(1.4.92-1)

[51] $f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, f, f'' は共に有界とするとき、次を示せ:$\|f'\|_\infty^2 \leq 4\,(\sup(f) - \inf(f))\,\|f''\|_\infty$, 但し $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

ヒント $\varepsilon > 0$ $t \in \mathbb{R}$ に対し $c(t,\varepsilon) \in [t-\varepsilon, t]$ が存在して、$f(t) - f(t-\varepsilon) = \varepsilon f'(c(t,\varepsilon))$. 従って、$f'(t) = \frac{f(t)-f(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{c(t,\varepsilon)}^t f''$.

(10.26.91-1)

[52] 全ての点で微分不可能な連続関数の例：

$x \in \mathbb{R}$ に対し $g(x) = \min\{x-[x],\ 1-(x-[x])\}$,（$[x]$ は x の整数部分）$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} g(4^n x)$ とおく。以下を示せ。(i)：f は $\forall x \in \mathbb{R}$ で連続 (ii): f は $\forall x \in \mathbb{R}$ で微分不可能。

(ii) のヒント：$g_n(x) = 4^{-n} g(4^n x)$, また $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ に対し

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 4^{-k-1}, & \text{if } x \in \cup_{m\in\mathbb{Z}} \left[\frac{2m}{4^{k+1}},\ \frac{2m+1}{4^{k+1}}\right), \\ -4^{-k-1}, & \text{if } x \in \cup_{m\in\mathbb{Z}} \left[\frac{2m-1}{4^{k+1}},\ \frac{2m}{4^{k+1}}\right) \end{cases}$$

とおく。このとき、$|g_n(x + \delta_k(x)) - g_n(x)|$ の値は、$n \leq k$, $n > k$ に応じて各々 4^{-k-1}, 0 となることを示し、$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x+\delta_k(x))-f(x)}{\delta_k(x)}$ が存在しないことを結論せよ。

(5.8.92-2)

[53] 問題 [52] の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し次を示せ；$I \subset \mathbb{R}$ を空でない任意の開区間とするとき、$f : I \to \mathbb{R}$ は非減少でも非増加でもない。

ヒント；$k \in \mathbb{Z}$, $m = 0, 1, \ldots$ とするとき、

$$\frac{g\left(k4^{n-m} \pm 4^{n-(2m+1)}\right) - g\left(k4^{n-m}\right)}{4^n} \begin{cases} \geq -4^{-(2m+1)} & \forall n \geq 0 \ldots, \\ = 4^{-(2m+1)} & \text{if } m \leq n \leq 2m \\ = 0 & \text{if } 2m+1 \leq n. \end{cases}$$

このことから、

$$\begin{aligned} f\left(k4^{-m} \pm 4^{-(2m+1)}\right) - f\left(k4^{-m}\right) &= \sum_{n=1}^{2m} 4^{-n}\left(g\left(k4^{n-m} \pm 4^{n-(2m+1)}\right) - g\left(k4^{n-m}\right)\right) \\ &\geq -m4^{-(2m+1)} + (m+1)4^{-(2m+1)} = 4^{-(2m+1)}. \end{aligned}$$

(10.14.98-1)

[54] 次を示せ；(i) $\left| e^t - \sum_{\nu=0}^{n} t^\nu/\nu! \right| \leq |t|^{n+1} e^{|t|}/(n+1)!\quad \forall t \in \mathbb{R}$. (ii) $e \notin \mathbb{Q}$.

(ii) のヒント：$e = p/q\ (p, q \in \mathbb{N})$ と仮定すると (i) で $t = 1$ とした式から、
$\left| pn! - qn! \sum_{\nu=0}^{n} 1/\nu! \right| \le qe/(n+1)$ となる。

(11.29.91-5)

[55] 円周率 π が無理数であることを示せ。

ヒント；$\pi = p/q\ (p, q \in \mathbb{N})$ と仮定して次の順番で矛盾を導く；
(i) $f_n(x) = x^n(p - qx)^n/n!$ と置くと、$f_n^{(k)}(0),\ f_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z},\ \ \forall n = 0, 1, \cdots,\ \ \forall k = 0, 1, \cdots.$
(ii) $I_n \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx \in \mathbb{Z}\ \ \forall n = 0, 1, \cdots.$
(iii) 十分大きな n に対して $0 < I_n < 1.$

(12.4.91-1)

[56] $\phi, \psi \in C((0, 1] \to (0, \infty))$ とする。$\frac{\phi}{\psi}$ が非減少なら $t \mapsto \frac{\int_0^t \phi(s)ds}{\int_0^t \psi(s)ds}$ も非減少であることを示せ。

(12.5.91-1)

[57] $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in C([0, \infty) \to \mathbb{R}),\ T_n \nearrow \infty$ とする。以下を示せ；
(i) $\alpha \le \varliminf_{n \nearrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} dt f(t) \Rightarrow \exists s_n \nearrow \infty,\ \alpha \le \varlimsup_{n \nearrow \infty} f(s_n).$
(ii) $\varlimsup_{n \nearrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} dt f(t) \le \alpha \Rightarrow \exists t_n \nearrow \infty,\ \varliminf_{n \nearrow \infty} f(t_n) \le \alpha.$
(iii) $\lim_{n \nearrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} dt f(t) = \alpha \Rightarrow \exists c_n \nearrow \infty,\ \lim_{n \nearrow \infty} f(c_n) = \alpha.$

(5.15.98-1)

[58] Gronwall の不等式;
$\alpha \in \mathbb{R},\ u \in C([0, T] \to \mathbb{R}),\ v \in C([0, T] \to [0, \infty))$ が、

$$u(t) \le \alpha + \int_0^t v(t_1) u(t_1) dt_1, \quad \forall t \in [0, T] \tag{0.1}$$

を満たすとする。このとき、$\forall t \in [0, T]$ に対し不等式 $u(t) \le \alpha \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right)$ が成立する。これを、以下に述べる ヒント 1,2 に従って 2 通りの方法で証明せよ；

ヒント 1 ：$V(t) = \int_0^t v(s)ds,\ F(t) = e^{-V(t)} \int_0^t v(s) u(s) ds,\ G(t) = \alpha\left(1 - e^{-V(t)}\right)$ とおいて $F(t) \le G(t)$ を示せばよい。そこで $F - G$ を微分する。

ヒント 2 ：不等式 (0.1) の $u(t_1)$ に $u(t_1) \le \alpha + \int_0^{t_1} v(t_2) u(t_2) dt_2$ を適用すると

$$u(t) \le \alpha + \alpha \int_0^t v(t_1) dt_1 + \int_0^t v(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} v(t_2) u(t_2) dt_2 \tag{0.2}$$

次に (0.2) の $u(t_2)$ に $u(t_2) \le \alpha + \int_0^{t_2} v(t_3) u(t_3) dt_3$ を適用して、

$$\begin{aligned} u(t) &\le \alpha + \alpha \int_0^t v(t_1) dt_1 + \alpha \int_0^t v(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} v(s) ds + \int_0^t v(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} v(t_2) dt_2 \int_0^{t_2} v(t_3) u(t_3) dt_3 \\ &= \alpha + \alpha \int_0^t v(s) ds + \frac{\alpha}{2}\left(\int_0^t v(s) ds\right)^2 + \int_0^t v(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} v(t_2) dt_2 \int_0^{t_2} v(t_3) u(t_3) dt_3 \end{aligned} \tag{0.3}$$

更に (0.3) の $u(t_3)$ に...

(2.12.92-5)

[59] $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R})$, $v, w \in C(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R})$ に以下を仮定する：

$$\frac{d}{dt}u(t) \le -v(t)u(t) + w(t), \quad \text{for all } t > 0.$$

このとき、

$$u(t) \le \left(u(0) + \int_0^t w(s)e^{V(s)}ds\right)e^{-V(t)}, \quad \text{for all } t > 0.$$

を示せ、但し $V(t) = \int_0^t v(s)ds$.

(5.8.03-2)

[60] $f \in C^1([0, b] \to \mathbb{C})$ $(b > 0)$ および $p \in [1, \infty)$ に対し、

$$\textstyle\int_0^b |f(x) - f(0)|^p dx \le (b^p/p) \int_0^b |f'(x)|^p dx.$$

(1.11.92-1)

[61] $I \subset \mathbb{R}$ は長さ $|I| < \infty$ の閉区間、$f \in C^1(I \to \mathbb{C})$ とする。このとき、任意の $p, q \in [1, \infty]$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ；$\|f - f_I\|_p \le |I|^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f'\|_q$
但し、$\|\cdot\|_p$ は I 上の L_p-norm, $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f$.

(9.27.92-1)

[62] $f \in C^1([0, b] \to \mathbb{R})$ $(b > 0)$ が 0 および b の近傍で $f \equiv 0$ となるなら、

$$\textstyle\frac{1}{4}\int_0^b |f(x)|^2/d(x)^2 dx \le \int_0^b |f'(x)|^2 dx,$$

ただし $d(x) = \min(|x|, |b - x|)$.

(10.30.91-5)

[63] $(\star)$ $f \in C([0, \infty) \to \mathbb{R})$ に対して $\sigma(f) = \inf\limits_{T>0}\left(\frac{f(T)}{T}\int_0^T (1 - f(t))dt\right)$ とおく。以下を示せ；(i) $\sigma(f) \le 1/4$, (ii)$\sigma(f) = 1/4 \iff f \equiv 1/2$.

(10.24.91-20)

[64] $(\star)$ 関数列 $f_N(\theta) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\theta)}{n}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ について以下を示せ：
(i) $f_N(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi - \frac{\theta}{2}$. (ii) $(f_N)_{N\ge1}$ は一様有界。

(2.7.09)

[65] 関数 $l_n : [e_n, \infty) \to [1, \infty)$ $(n \ge 1)$ を $e_n = \underbrace{\exp\circ\cdots\circ\exp}_{n}(1)$, $l_n(x) = \underbrace{\log\circ\cdots\circ\log}_{n}(x)$ によって定義する。任意の n に対し次を示せ；

$$\int_{e_n}^\infty \frac{dx}{xl_1(x)\cdots l_{n-1}(x)l_n(x)^{1+\varepsilon}} \begin{cases} < \infty & \text{if } \varepsilon > 0, \\ = \infty & \text{if } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

ヒント：左辺を I_n とする。$x = e^y$ と変数変換すると $I_n = I_{n-1} = \ldots = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$.
(8.20.96-1)

[66] 以下を示せ：

(i) $x>0$ に対し、級数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$ は収束する。
(ii) $S(x)$ の収束は $x\in(0,1)$ について一様収束ではない。
(iii) $x>0$ に対し、$\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}x\le S(x)\le\frac{x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}x.$

(8.02.06-2)

[67] $f(x)=\sin x/x$ に対し以下を示せ；(i) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b f$ は有限確定, (ii) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b|f|=\infty.$

ヒント (i):$f(0)=1$ と解釈すれば f は $[0,1]$ 上連続。一方、極限 $\lim\limits_{b\nearrow\infty}\int_1^b f$ の存在はうまく部分積分すれば判る。

(10.31.97-1)

[68] $f\in C([0,\infty)\to\mathbb{R})$ に対し広義 Riemann 積分 $I=\int_0^\infty f$ の存在を仮定する．このとき，以下を示せ：(i) 広義 Riemann 積分 $I_a=\int_0^\infty e^{-ax}f(x)dx$ は $a\ge 0$ について一様収束する，従って $\lim_{a\searrow 0}I_a=I$ (級数に関する Abel の定理 [25] の類似)．(ii) $\lim_{a\nearrow\infty}I_a=0.$
ヒント（(i),(ii) 両方）；$0\le c\le b$ に対し

$$\int_c^b e^{-ax}f(x)dx=e^{-ab}\int_c^b f-a\int_c^b e^{-ax}\left(\int_c^x f\right)dx$$

また，$a>0$ なら上式右辺第二項は，$\int_{ac}^{ab}e^{-x}\left(\int_c^{x/a}f\right)dx$ に等しい．(10.31.97-2)

[69] 以下を示せ；(i) $\forall a>0$ に対し $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx=\int_a^\infty\frac{dt}{1+t^2}$, (ii) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sin x}{x}dx=\pi/2.$

ヒント：(i) では両辺を a について微分したものが同じであることと、$\lim\limits_{a\to\infty}$ (左辺) $=0$ を示せばよい。(ii) では (i) の両辺の $a\downarrow 0$ の極限を考える。左辺に問題 [68] を使え。

(10.31.97-3)

[70] $r=0,1,\cdots,\infty$ に対して、

$$C^r(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C})=\{f\in C^r(\mathbb{R}\to\mathbb{C});\ \ f(x+1)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\}.$$

また、$f\in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C})$ に対し、

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1}|f(x)|,\\
\|f\|_2 &= \left(\int_0^1|f(x)|^2dx\right)^{1/2},\\
\widehat{f}(n) &= \int_0^1 f(x)\overline{\mathbf{e}_n}(x)dx,\quad (n\in\mathbb{Z}),\\
S_nf(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\mathbf{e}_k(x),\quad (n=0,1,\ldots)
\end{aligned}$$

と置く。但し、$\mathbf{e}_\xi(x)=\exp(2\pi\mathbf{i}x\xi)$, $(\xi\in\mathbb{R})$. $f\in C^r(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C})$ に対し以下を示せ；

(i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2\le\|f\|_2^2$, 従って特に、$\lim\limits_{|n|\to\infty}|\hat{f}(n)|=0.$

(ii) $\widehat{f^{(r)}}(n) = (2\pi\mathbf{i}n)^r \hat{f}(n)$.

(iii) $r \geq 1$ に対し $\displaystyle\sum_{|k|\geq n} |\hat{f}(k)| \leq \|f^{(r)}\|_2 \left\{ \sum_{|k|\geq n} (2\pi|k|)^{-2r} \right\}^{1/2}$.

(iv) $f \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対し $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} \|S_n f - S_m f\|_\infty = 0$. ([71]-(vi) 参照)

(i) のヒント；$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \displaystyle\sum_{|k|\leq n} |\hat{f}(k)|^2$.

(3.8.92-2)

[71] Dirichlet 核：$D_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathbf{e}_k$ について（cf.[70]）以下を示せ；

(i) $\int_0^1 D_n(x)dx = 1$

(ii) $D_n(x) = \begin{cases} \sin\pi(2n+1)x/\sin\pi x & x \notin \mathbb{Z}, \\ 2n+1 & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

(iii) D_n のグラフは大体どんな形か？

(iv) $f \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対し $(S_n f)(x) = \int_0^1 f(x-y)D_n(y)dy$

(v) $f \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対し、

$$(S_n f - f)(x) = \frac{\mathbf{i}}{2}\left\{(q_x \mathbf{e}_{-1/2})^\wedge(n) - (q_x \mathbf{e}_{1/2})^\wedge(-n)\right\}$$

但し $q_x(y) = \begin{cases} (f(x-y) - f(x))/\sin\pi y & y \notin \mathbb{Z}, \\ (-1)^{y+1} f'(x)/\pi & y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

(vi) $f \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ なら、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_\infty = 0$. （ (v) と [70]-(i),(iv) からの結論。）

(3.8.92-3)

[72] Fejer 核：$F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$ について（cf.[71]）以下を示せ；

(i) $\int_0^1 F_n(x)dx = 1$, (ii) $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin\pi nx}{\sin\pi x}\right)^2$, (iii) F_n のグラフは大体どんな形か？

(iv) $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対し $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(S_k f)(x) = \int_0^1 f(x-y)F_n(y)dy$.

(v) $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f - f\|_\infty = 0$.

(vi) $\{\mathbf{e}_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ の $\mathbb{C}$-linear span は $(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ の中で稠密である（(v) の帰結)。

(3.8.92-4)

[73] 一様分布数列, Weyl の定理；

実数列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ が $\forall f \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)dx$ を満たすとき、$(x_n)_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上**一様分布**するという。以下を示せ；

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上 一様分布 $\Rightarrow \{x_n - [x_n]\ ;\ n \geq 1\}$ は区間 $[0,1)$ で稠密。

(ii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上 一様分布する。 $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\exp(2\pi\mathbf{i}mx_j) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$

ヒント；[72]-(vi)

(iii) **Weyl の定理**；$\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \{n\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上 一様分布。

(3.8.92-1)

[74] 独立確率変数列の数学的構成；

A を有限集合、$p_\alpha > 0$ $(\alpha \in A)$ は $\sum_{\alpha\in A} p_\alpha = 1$ を満たすとする。また $\Omega = [0,1]$ に対し $\Gamma \subset \Omega$ の確率を $P[\Gamma] = \int_\Gamma d\omega$ で定義する（積分が意味をもつとき)。この問題の目的は関数 $X_n : \Omega \to A$ （$n = 1, 2, \ldots$）であって性質；

$$P(\omega; X_j(\omega) = \alpha) = p_\alpha, \quad \forall \alpha \in A, \tag{0.4}$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\omega; X_j(\omega) = \alpha_j\}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(\omega; X_j(\omega) = \alpha_j) \quad \forall \alpha_j \in A \tag{0.5}$$

を満たすものの構成である。これは「コインを何度も投げる」といった独立試行の数学的表現である。例えばコイン投げ続けて、 X_n が n 回目に 表か裏かを表わす ($A = \{$ 表, 裏 $\}$, $p_\alpha \equiv 1/2$) と思えば 、(0.4), (0.5) はその表現としてふさわしい。

$\Omega = [0,1]$ の閉部分区間の列 $\{I_{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n};\ n \geq 1,\ \alpha_j \in A\}$ を次のように定める；まず Ω を閉区間 I_{α_1} $(|I_{\alpha_1}| = p_{\alpha_1},\ \alpha_1 \in A)$ に分割する。次に各 I_{α_1} を閉区間 $I_{\alpha_1\alpha_2}$ $(|I_{\alpha_1\alpha_2}| = p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}$, $\alpha_2 \in A)$ に分割、以後は同様の手順を繰り返す。$X_n : \Omega \to A$ を

$$X_n(\omega) = \alpha \quad \text{if} \ \ \omega \in \bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\in A} I_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1},\alpha} \tag{0.6}$$

と定義するとき、(0.4), (0.5) を示せ。

(1.29.98-1)

[75] 大数の (弱) 法則;

X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を $\{0,1\}$ に値をとる独立確率変数で $n = 1, 2, \ldots$ に対し $P(X_n = 1) = p$ とする（成功確率 p の独立試行列と呼ぶ；問題 [74] で $A = \{0,1\}$, $p_1 = p$ としたもの）n 回までの成功回数：$S_n(\omega) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega)$ について以下を示せ。(i) $\int_\Omega \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right|^2 d\omega \leq \frac{p(1-p)}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (ii) $\lim_{n\to\infty} P\left[\omega;\ \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| \leq \delta\right] = 1, \quad \forall \delta > 0.$

(i) のヒント；$\int_\Omega (X_i(\omega) - p)(X_j(\omega) - p)d\omega = \delta_{ij}p(1-p)$

(ii) のヒント；$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \delta\right] = P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right|^2 \geq \delta^2\right] \leq \delta^{-2}\int_\Omega \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right|^2 d\omega.$

(3.17.92-1)

[76] 多項式近似定理 （問題 [45]） を大数の法則（問題 [75]）を用いて示せ。

ヒント [75] の S_n について、$\int_\Omega f\left(S_n(\omega)/n\right) d\omega = \sum_{r=0}^{n} f\left(r/n\right) \ \frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}.$

(3.8.92-5)

[77] Poisson 法則；

成功確率 p の独立試行が n 回中 k 回成功する確率を求める際、応用上 p が非常に小さく n が非常に大きいと見なせる場合は、この確率を $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ ($\lambda = np$) で近似計算することが多い。これを次のように正当化せよ；$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in [0,\infty)$ を仮定するとき $\forall k = 0, 1, \cdots$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega; \text{成功確率 } p_n \text{ の独立試行が } n \text{ 回中 } k \text{ 回成功}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!.$$

(10.12.93-1)

[78] 1 次元 random walk;

X_n ($n = 1, 2, \ldots$) を $\{-1, +1\}$ に値をとる独立確率変数で $n = 1, 2, \ldots$ に対し $P(X_n = +1) = p$ とする（問題 [74] で $A = \{-1, +1\}$, $p_{+1} = p$ としたもの）$S_n \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n X_j$ について以下を示せ。

(i) $P(S_n = y) = \begin{cases} \frac{n!}{(\frac{n+y}{2})!(\frac{n-y}{2})!} p^{\frac{n+y}{2}}(1-p)^{\frac{n-y}{2}}, & |y| \le n \text{ かつ } n+y \text{ が偶数のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

(ii) $p = 1/2$ とするとき、整数 $x, y > 0$ に対し、

$$P\left(\begin{array}{c} x + S_j = 0,\ 1 \le \exists j \le n, \\ x + S_n = y \end{array}\right) = P(\omega;\ -x + S_n(\omega) = y).$$

ヒント；次の形の集合（S_n の通る道）は全て等確率 $1/2^n$ をもつ；$\{S_1 = x_1, \cdots, S_n = x_n\}$ ($|x_j - x_{j-1}| = 1$)。だから「確率を求める」には道の数を数えれば十分。(ii)（あるいは次の (iii)）は 「反射の原理」と呼ばれる。

(iii) $P(\max_{1\le j\le n} S_j \ge x) = 2P(S_n > x) + P(S_n = x)$.

(9.7.93-1)

[79] 問題 [78] において $q = 1-p$, $f(x) = P(X_1 = x)$ とおく。問題 [39], [40] を参考にして以下を示せ；(i) $\widehat{f}(\theta) = p\exp(-2\pi\mathbf{i}\theta) + q\exp(2\pi\mathbf{i}\theta)$ (ii) $P(S_n = x) = f^{*n}(x) = \int_{[0,1]} \widehat{f}(\theta)^n \mathbf{e}_x(\theta)d\theta$. (iii) $0 < s < 1$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(S_n = x) = \begin{cases} (1-4pqs^2)^{-1/2}\left(\frac{1-(1-4pqs^2)^{1/2}}{2qs}\right)^{|x|} & \text{if } x \ge 0, \\ (1-4pqs^2)^{-1/2}\left(\frac{1-(1-4pqs^2)^{1/2}}{2ps}\right)^{|x|} & \text{if } x \le 0. \end{cases}$$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) \begin{cases} = \infty & \text{if } p = q = 1/2 \\ < \infty & \text{if } p \ne q \end{cases}$

(iii) のヒント；まず [40]-(iii) により左辺を積分表現する。積分の計算には留数定理が使える。

余談: 1-次元 Random walk の再帰性について；$\mathbb{Z}$ の原点 0 を出発し、一歩毎に隣り合う 2 点のどれか (等確率かつ今までの道順には無関係に選ぶ）へ移動しつつ n 歩目で到達した

点が S_n である。問題 (iv) は次の事実に対応している； $p=q=1/2$ なら $\{S_n\}$ は確率 1 で無限回原点に戻る。$\pm q < \pm p$ なら確率 1 で $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$.

(1.27.98-3)

[80]　$p=1/2$ の 1 次元 random walk （cf. [78] ）について次を示せ;

$$P(S_1 \neq 0, \cdots, S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0).$$

$$\begin{aligned}
\text{ヒント；}\quad \text{左辺} &= 2P(S_1 > 0, \cdots, S_{2n} > 0) \\
&= 2\sum_{y=1}^{n} P(S_1 > 0, \cdots, S_{2n} = 2y) \\
&= \sum_{y=1}^{n} P(\omega;\ 1 + S_1 > 0, \cdots, 1 + S_{2n-1} = 2y) \\
&= 2\sum_{y=1}^{n} \left\{ P(1 + S_{2n-1} = 2y) - P(-1 + S_{2n-1} = 2y) \right\}.
\end{aligned}$$

最後の変形で [78]-(ii) を使う。

(9.17.93-1)

[81] 多次元 random walk;
A を $\mathbb{Z}^d$ の単位ベクトル全体（$2d$ 個ある）、X_n $(n=1,2,\ldots)$ を A に値をとる独立確率変数で $\forall x \in A$, $n=1,2,\ldots$ に対し $P(X_n = x) = \frac{1}{2d}$ とする（問題 [74] 参照）このとき、$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ を d 次元 random walk という。問題 [41], [42] を参考にして以下を示せ；(i) $\widehat{f}(\theta) = \frac{\cos 2\pi\theta_1 + \cdots + \cos 2\pi\theta_d}{d}$, 但し $f(x) = P(X_1 = x)$. (ii) $P(S_n = x) = f^{*n}(x) = \int_{[0,1]^d} \widehat{f}(\theta)^n \mathbf{e}_x(\theta) d\theta$. (iii) $0 < s < 1$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(S_n = x) = \int_{[0,1]^d} \frac{\mathbf{e}_x(\theta) d\theta}{1 - s\widehat{f}(\theta)}$. (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) \begin{cases} = \infty & \text{if } d \leq 2 \\ < \infty & \text{if } d \geq 3 \end{cases}$

余談: d-次元 Random walk の再帰性について；$\mathbb{Z}^d$ の原点 0 を出発し、一歩毎に隣り合う $2d$ 個の格子点のどれか (等確率かつ今までの道順には無関係に選ぶ）へ移動しつつ n 歩目で到達した点が S_n である。問題 (iv) は次の事実に対応している；$d \leq 2$ なら $\{S_n\}$ は確率 1 で無限回原点に戻る。$d \geq 3$ なら確率 1 で $\lim_{n\to\infty} |S_n| = \infty$.

(10.30.91-1)

[82] $f \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ が次の条件を満たせば全射である；$\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - x| < \infty$.

(11.3.91-9)

[83] 一般化された Leibniz の公式；
$\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^n$, $\beta = (\beta_j)_{j=1}^n \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $\alpha! = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j!)$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, 「$\alpha \leq \beta \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \alpha_j \leq \beta_j\ \forall j = 1, \cdots, n.$ 」とする。$\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f, g \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ に対し $D^\alpha(fg) = \displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g$ を示せ。

(10.27.92-1)

[84] $f,g \in C^m(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ のとき Taylor の公式を示せ;

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|\le m-1} D^\alpha f(x)\frac{h^\alpha}{\alpha!} + m\sum_{|\alpha|=m}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-\theta)^{m-1}D^\alpha f(x+\theta h)d\theta.$$

但し $z=(z_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ 　に対し、$z^\alpha = \prod_{j=1}^n z_j^{\alpha_j}$. (10.27.92-2)

[85] 以下を示せ；(i) $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ について次の **(a)**,**(b)** は同値である；

(a) 全ての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ で $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=0$.

(b) $f_j \in C^2(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$ $(j=1,2)$ が存在して全ての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ で $f(x,y)=f_1(x)+f_2(y)$.

(ii) $u\in C^2(\mathbb{R}^2\to\mathbb{C})$ 及び $c>0$ について次の **(a)**,**(b)** は同値である；

(a) 波動方程式：$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0$ を満たす。

(b) 関数 $f_\pm \in C^2(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$ が存在して $u(x,t)=f_+(x+ct)+f_-(x-ct)$ と書ける。

なお、(ii)-(b) の解を**ダランベール解**[3]、また、$f_-(x-ct)$ を**前進波解**、 $f_+(x+ct)$ を**後進波解**という。これらの物理的意味を考えるため、t は時刻、x は位置を表すとする。時刻 t での波の形が、波動方程式の解 $u(t,x)$ で表される（$u(t,x)$ は位置 x での波の高さ）から、$f_-(x-ct)$ は $f_-(x)$ で与えられる同じ形の波が、正の方向に速度 c で移動することを意味する。後進波解の物理的意味も同様である。(10.23.97-1)

[86] $f\in C^2(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$, $g\in C^1(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$ とするとき次を示せ；関数；

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)+c^{-1}\int_{x-ct}^{x+ct}g(y)dy\right) \tag{0.7}$$

は、$C^2(\mathbb{R}^2\to\mathbb{C})$ に属し $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0$, $u(\cdot,0)=f$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0)=g$ を満たす。またこれらの条件を全てみたす $C^2(\mathbb{R}^2\to\mathbb{C})$ の元は (0.7) で与えられる u に限る。

水平方向に無限に長い弦において、水平座標 x に対応する時刻 t での垂直座標が $u(x,t)$ である。初期位置 f、初速 g が与えられたとき、(0.7) は時刻 t での弦の形を表す（**ストークスの公式**[4]）。(10.23.97-2)

[87] $\mathbb{R}^{2n}$ の座標を $(q,p)=(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$ と表す。$\mathbb{R}^{2n}$-値の C^1-曲線 $\phi(t)=(q(t),p(t))$ が $H\in C^1(\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R})$ に対して正準方程式；

$$\dot q(t)=\frac{\partial H}{\partial p}(\phi(t)),\ \dot p(t)=-\frac{\partial H}{\partial q}(\phi(t))$$

[3] Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

[4] George Gabriel Stokes, 1819–1903.

を満たすとする、ただし $\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)_{j=1}^n$. 今、$\mathbb{R}^{2n}$ の座標変換 $(q,p) \mapsto (\overline{q},\overline{p})$ が $i,j=1,\cdots,n$ に対して条件；

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \overline{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \overline{p}_j}{\partial q_k}\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial p_k}\right) = \delta_{ij}$$
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \overline{p}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \overline{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \overline{p}_j}{\partial q_k}\frac{\partial \overline{p}_i}{\partial p_k}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \overline{q}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \overline{q}_j}{\partial q_k}\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial p_k}\right) = 0$$

を満たすなら、座標系 $(\overline{q},\overline{p})$ についても正準方程式が成立することを示せ;

$$\dot{\overline{q}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \overline{p}}(\phi(t)),\ \dot{\overline{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \overline{q}}(\phi(t)),$$

ここで $(\overline{q}(t),\overline{p}(t))$ は ϕ を $(\overline{q},\overline{p})$ であらわしたもの。

(8.19.92-1)

[88] $f \in C^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ に対し、次の 2 条件が同値であることを示せ；

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \geq 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i, \forall j\ (i \neq j).$

(b) $f(x)+f(y) \leq f(x \vee y) + f(x \wedge y),\quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n.$

ただし、$x \vee y = (\max\{x_i,y_i\})_{i=1}^n$, $x \wedge y = (\min\{x_i,y_i\})_{i=1}^n$.

(8.23.92-1)

[89] $(t_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対し $(x_{n,i}(t_1,\ldots,t_n))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を次の漸化式で定義する；

$$x_{n,i}(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} t_1 \cos t_2 & \text{if } n \geq 2,\ i=1, \\ t_1 \sin t_2 & \text{if } n = i = 2, \\ x_{n-1,i-1}(t_1 \sin t_2, t_3, \ldots, t_n) & \text{if } n \geq 3,\ 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

行列 $J_n(t_1,\ldots,t_n) = \left(\frac{\partial x_{n,i}(t_1,\ldots,t_n)}{\partial t_j}\right)_{i,j=1}^n$ について次を示せ；

$$\det J_n(t_1,\ldots,t_n) = t_1^{n-1}\prod_{j=2}^n \sin^{n-j} t_j.$$

ヒント；$\det J_2(t_1,t_2) = t_1$ は容易にわかる。更に $n \geq 3$ で次の等式が成立する；

$$J_n(t_1,\ldots,t_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_{n-1}(t_1 \sin t_2, t_3, \ldots, t_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_2(t_1,t_2) & 0 \\ 0 & (\delta_{ij})_{i,j=3}^n \end{pmatrix}.$$

この等式により $n \geq 2$ についての帰納法が使える。

余談；$(t_j)_{j=1}^n \in [0,\infty) \times [0,\pi] \times \cdots \times [0,\pi] \times [0,2\pi)$ とすると $(t_j)_{j=1}^n \mapsto (x_{n,i}(t_1,\ldots,t_n))_{i=1}^n$ は極座標変換に他ならない。（その場合 $(t_1,\ldots,t_n) = (r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ と書くことが多い。）

(6.21.97-1)

[90] $(x^1,\cdots,x^n)$, $(r,\theta^2,\cdots,\theta^n)$ は各々$\mathbb{R}^n$ の直交座標及び極座標,

$$g_{ij}=g_{ij}(\theta^2,\cdots,\theta^n)=r^{-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial x^k}{\partial\theta^j},\quad i,j=2,\cdots,n.$$

とするとき、以下を順次示せ：

(i) $g=(g_{ij})$ の逆行列 $g^{-1}=(g^{ij})$ は次で与えられる：$g^{ij}=r^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\theta^i}{\partial x^k}\frac{\partial\theta^j}{\partial x^k}$.

(ii) $\Delta_{S^{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i,j=2}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta^i}\left(\sqrt{\det g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)$ とおくと $\Delta=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^2$ は極座標を用いて次のように書ける：$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}$.

(iii) $u\in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbb{C})$ が $k(\geq 0)$ 次同次かつ $\Delta u\equiv 0$ を満たすなら、

$$\Delta_{S^{n-1}}u(x)=-k(k+n-2)u(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

(3.21.92-1)

[91] (i) 等式：$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\pi^{n/2}$ を示せ。(ii): 単位球：$\{x\in\mathbb{R}^n;|x|\leq 1\}$ の表面積、体積が各々 $2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ であることを (i) を利用して示せ。

(2.26.92-4)

[92] 定数 $c\in(0,\infty)$ 及び関数 $\rho:\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ $(d\geq 2)$ について以下の条件 (a)–(d) を考える；(a) $f,g\in C^1(\mathbb{R}\to[0,\infty))$ が存在して任意の $v=(v_j)_{j=1}^d\in\mathbb{R}^d$ に対し $\rho(v)=\prod_{j=1}^d f(v_j^2)=g(|v|^2)$. (b) $c\in(0,\infty)$ が存在し、任意の $j=1,\ldots,d$ に対し $\int_{\mathbb{R}^d}v_j^2\rho(v)dv=c$. (c)$\int_{\mathbb{R}^n}\rho(v)dv=1$. (d) $\rho(v)=(2\pi c)^{-d/2}\exp(-|v|^2/2c)$. このとき、「(a),(b),(c) $\Longleftrightarrow$ (d)」を示せ。

$\Rightarrow$ のヒント： 任意の $x\in[0,\infty)$ に対し次を順次示す；(i) $f(0)^{d-1}f(x)=g(x)$,
(ii) $f'(0)f(0)^{d-2}f(x)=g'(x)$, (iii)$f(x)>0$, $g(x)>0$, (iv) $g'(x)/g(x)=f'(0)/f(0)$.

余談：温度 $T>0$ に保たれた空間 $\mathbb{R}^d$ 内 $(d=3)$ に質量 $m>0$ の気体分子があるとする。$c=k_BT/m$ (k_B は Boltzman 定数) とすると、上の $\rho(v)$ はこの分子が速度ベクトル v で運動している確率の密度である（**Maxwell の速度分布則**）。上記の条件 (a) は速度ベクトルの分布は回転で不変であること（$\rho(v)=g(|v|^2)$）、及び速度ベクトルの各成分が符合と無関係でかつ確率変数として独立（$\rho(v)=\prod_{j=1}^d f(v_j^2)$）であることを要請している。また、条件 (b) はエネルギー等分配則（各自由度毎のエネルギー $\frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^n}v_j^2\rho(v)dv$ は $k_BT/2$ で与えられる）。「(a),(b),(c) $\Rightarrow$ (d)」はこれらの物理的要請が ρ の形を決めることを主張する。

(8.21.98-1)

[93] $J_t:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ （$t>0$）を次のように定義する；

$$J_t(a,b)=\begin{cases}(2/\pi t^3)^{1/2}(2b-a)\exp\left(-(2b-a)^2/2t\right), & b\geq 0,\ a\leq b \text{ のとき},\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

以下を示せ；$\int_{\mathbb{R}^2}f(b-a)J_t(a,b)dadb=(2\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}f(|x|)\exp\left(-|x|^2/2t\right)dx$,
$\int_{\mathbb{R}^2}f(2b-a)J_t(a,b)dadb=(2\pi t)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3}f(|x|)\exp\left(-|x|^2/2t\right)dx$. 但し $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は有界かつ連続とする。

(8.21.98-2)

[94] $A, B,$ を共に $n\times n$ 行列で対称かつ固有値は全て非負とする。$\det(\frac{A+B}{2}) \geq \sqrt{\det(A)\det(B)}$ を示せ。

ヒント：まず A,B の固有値が全て正の場合を考える。$\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\langle Ax,x\rangle)dx = \sqrt{\det(\pi A^{-1})}$. また、同様の式が B, $\frac{A+B}{2}$ でも成立する。そこで Schwarz の不等式を使う。

(8.21.98-3)

[95] $a,\ b,\ c$ を正数とする。積分：$\int_A \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ を求めよ。ただし

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}.$$

(10.25.91-1)

[96] 双曲的距離 (hyperbolic metric) の定義等；

$z,w\in H^2=\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Im}z>0\}$ に対して、

$$C_{z,w}=\{\gamma:[0,1]\to H^2;\ 区分的に\ C^1,\ \gamma(0)=z,\ \gamma(1)=w,\ \},$$

$|z,w|_{H^2}=\inf\{\|\gamma\|;\gamma\in C_{z,w}\}$, $\|\gamma\|=\int_0^1 dt|\dot\gamma(t)|/\mathrm{Im}\gamma(t)$ とする。(i) $|z,w|_{H^2}$ は H^2 に距離を定義することを示せ。(ii) $\gamma\in C_{z,w}$, $\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}w$ の時、$\|\gamma\|=|z,w|_{H^2}$ ならば $\gamma([0,1])$ は実軸に垂直な直線の一部であることを示せ。また $\|\gamma\|=|z,w|_{H^2}$ となる γ の具体例をあげよ。(iii) $\gamma\in C_{z,w}$, $\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}w$ の時、$|z,w|_{H^2}=|\log(\mathrm{Im}z/\mathrm{Im}w)|$ を示せ。

(3.27.92-1)

[97] $GL(2;\mathbb{R})$ の H^2 への作用について ([96] 参照)。

2×2 正方行列 $g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $\det g\neq 0$ に対し、$g(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $z\in H^2$, とおく。以下を示せ。(i) (a) $\mathrm{Im}g(z)=\frac{\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2}\det g$, (b) $g'(z)=\frac{\det g}{(cz+d)^2}$,
(c) $\frac{|g'(z)|}{\mathrm{Im}g(z)}=(\det g\ の符号)\times\frac{1}{\mathrm{Im}z}$. (ii) $\det g>0$ ならば $g: H^2\to H^2$ は全単射かつ任意の $z,w\in H^2$ に対し $|g(z),g(w)|_{H^2}=|z,w|_{H^2}$. (iii) $f\in C(H^2\to\mathbb{C})$, $\{z\in H^2\,;\ f(z)\neq 0\}$ の閉包は H^2 で compact とする。$\det g>0$ ならば

$$\int_{H^2} f\circ g(x+\mathbf{i}y)\frac{dxdy}{y^2}=\int_{H^2} f(x+\mathbf{i}y)\frac{dxdy}{y^2}.$$

余談；(ii) (iii) で $\det g>0$ を仮定したが、代わりに $\det g<0$ を仮定すると g は上半平面 H^2 から下半平面への全単射となり、 (ii) (iii) と同様の関係式が成り立つ。

(12.20.96-1)

[98] (双曲的距離 ([96],[97] 参照) と Euclid 的距離の関係式)
以下を示せ；(i) H^2 内の半円周で実軸と直交するものは適当な $g\in SL(2;\mathbb{R})$ によって実軸と直交する直線に写される。(ii) $z,w\in H^2$, $\gamma\in C_{z,w}$, $\|\gamma\|=|z,w|_{H^2}$ なら、$\gamma([0,1])$ は実軸に垂直な円周 (or 直線) の一部であることを示せ。また $\|\gamma\|=|z,w|_{H^2}$ となる γ の具体例を挙げよ。(iii) $\cosh|z,w|_{H^2}=1+\frac{1}{2}\frac{|z-w|^2}{\mathrm{Im}z\cdot\mathrm{Im}w}$, $\forall z,w\in H^2$

(3.27.92-2)

[99] 次を示せ；$\int_{B(c;r)} \frac{dxdy}{y^2} = 4\pi \sinh^2(r/2)$, 但し $c \in H^2 = \{z = x + \mathbf{i}y; y > 0\}$, $B(c;r) = \{z \in H^2; 1 + \frac{1}{2}\frac{|z-c|^2}{\mathrm{Im}z \cdot \mathrm{Im}c} \le \cosh r\}$.

余談；上の積分は hyperbolic plane H^2 における「半径 r の円の面積」([98])。

(3.29.92-1)

[100] (i) $-\infty < a < b < \infty$ に対し、$g_{a,b}(t) = \frac{f(t-a)}{f(t-a)+f(b-t)}$ と置く、但し

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \le 0, \\ \exp(-1/t) & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

次を示せ；$f, g_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R} \to [0,1])$, 「$g_{a,b}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \le a$」, 「$g_{a,b}(x) = 1 \Longleftrightarrow b \le x$」.
(ii) $0 < r < R < \infty$ とする。次の性質をもつ $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to [0,1])$ の具体例を挙げよ；「$|x| \le r \Longleftrightarrow \varphi(x) = 1$」かつ「$R \le |x| \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$」。但し、$x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対し、$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

(3.13.92-1)

[101] $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, K はコンパクト ([102] 参照), U は開集合とする。

(i) 次のような $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to [0,1])$ の存在を示せ；

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{if } x \notin U. \end{cases}$$

ヒント；$B_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r_0\}$ に対して次のような $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to [0,1])$ が存在することにまず注意する；「$f_0(x) > 0 \iff x \in B_0$」かつ「$|x - x_0| \le r_0/2 \Rightarrow f_0(x) = 1$」.
このような ball と C^∞-関数の組 $(B_1, f_1), \cdots, (B_m, f_m)$ を適当に選び，次のようにする：

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{j=1}^m f_j(x)}{\sum_{j=1}^m f_j(x) + \prod_{j=1}^m (1 - f_j(x))}$$

(ii) $f \in C^r(U \to \mathbb{C})$ に対して 次のような $F \in C^r(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ の存在を示せ；

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{if } x \notin U. \end{cases}$$

(10.25.92-1)

[102] 問題 [101] の結果は $K \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合でも正しいことを示せ.
ヒント：[101](i) のヒントのような $(B_1, f_1), (B_2, f_2), \ldots$ を可算個適当に選び，次のようにする：

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{j=1}^\infty f_j(x)}{\sum_{j=1}^\infty f_j(x) + \prod_{j=1}^\infty (1 - f_j(x))}.$$

(4.5.12-1)

[103] 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ に対しても F を零点集合とする C^∞-関数、すなわち $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ であって $F = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ f(x) = 0\}$ をみたすものが存在することを次の (i),(ii) に沿って証明せよ。(i) $k = 1, 2, \cdots$ に対し $\mathbb{R}^n$ 内の可算個の開球 $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_k| < r_k\}$ 及び $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to [0, \infty))$ で $\mathbb{R}^n \backslash F = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, 「$x \in B_k \Longleftrightarrow f_k(x) > 0$」となるものが存在する。(ii) $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を適当に選べば級数：$f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k f_k(x)$ が C^∞-関数となる。

(6.9.92-1)

[104] 関数 $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する；

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{if } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{if } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

次を示せ；$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)dx = 1$, $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy = -1$.

(10.14.98-3)

[105] $J \subset \mathbb{R}$ を開区間, $\mathbb{R}^{d,d}$ を $d \times d$ 正方行列の全体, $A \in C^r(J \to \mathbb{R}^{d,d})$ とする。以下を示せ；(i) $U \in C^{r+1}(J \times J \to \mathbb{R}^{d,d})$ であり任意の $s, t \in J$ に対し $U(s, t) = I + \int_t^s A(\sigma)U(\sigma, t)d\sigma$ を満たすものが唯一存在する。(ii) 任意の $a \in J$, $b \in \mathbb{R}^d$, 及び $g \in C^r(J \to \mathbb{R}^d)$ に対し初期値問題；

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + g(t), & t \in J, \\ u(a) = b \end{cases}$$

の解 u は唯一で、$u(t) = U(t, a)b + \int_a^t U(t, s)g(s)ds$ で与えられる。

(i) のヒント；$U_0(s, t) \equiv I$, $U_p(s, t) = I + \int_t^s A(\sigma)U_{p-1}(\sigma, t)d\sigma$ $(p = 1, 2, \ldots)$ とするとき $\{U_p\}_{p \geq 0}$ が $J \times J$ 上局所一様収束することを示し、その極限を U とせよ。

(2.23.98-2)

[106] 問題 [105] の $U(s, t)$ について以下を示せ；(i) $\frac{\partial}{\partial s}U(s, t) = A(s)U(s, t)$, (ii) $\frac{\partial}{\partial t}U(s, t) = -U(s, t)A(t)$, (iii) $U(s, s')U(s', t) = U(s, t)$, (iv) $U(s, s')U(s', s) = U(s, s) = I$, (v) $\det U(s, t) = \exp\left(\int_t^s \mathrm{tr} A(\sigma)d\sigma\right)$, (vi) $\frac{A(s)+A(s)^*}{2}$ の最大、最小固有値を各々 $m(s)$, $M(s)$ とすると、任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\exp\left(\int_t^s m(\sigma)d\sigma\right)|x| \leq |U(s, t)x| \leq \exp\left(\int_t^s M(\sigma)d\sigma\right)|x|.$$

(2.23.98-3)

[107] 問題 [105] の特別な場合について；
問題 [105] の $U(s, t)$ について以下を示せ；(i) $A(t)$ の成分が全て非負値関数, $s \geq t$ なら $U(s, t)$ の成分もそう。(ii) 任意の $s, t \in J$ に対し $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ ならば $U(s, t) = \exp\left(\int_t^s A(\sigma)d\sigma\right)$.

(3.28.98-1)

[108] $J \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む開区間, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ $a_j \in C(J \to \mathbb{R})$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ とする。以下を示せ；(i) $u \in C^n(J \to \mathbb{R})$ であって次の初期値問題の解となるものが唯一存在する；

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)}(t) \quad t \in J, \\ u^{(j)}(0) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

(ii) $\alpha_j \geq 0$, $a_j(t) \geq 0$ $(\forall j = 0, 1, \ldots, n-1, \forall t \in [0, \infty) \cap J)$ なら $u(t) \geq 0$, $(\forall t \in [0, \infty) \cap J)$.

(i) のヒント；問題 [105]
(ii) のヒント；問題 [107]-(i)
(3.1.98-1)

[109] X を $K(= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ 上の vector space とする。$q : X \to [0, \infty)$ が 次の (a),(b) を満たすとき q を X 上の **semi-norm** と呼ぶ;

(a) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x), \quad \forall (\lambda, x) \in K \times X$

(b) $q(x + y) \leq q(x) + q(y), \ \forall x, \forall y \in X$

とくに非退化 (i.e. $x \neq 0 \Rightarrow q(x) \neq 0$) なセミノルムを **norm** という。$X$ に 1 つのノルム q が指定されたとき $X = (X, q)$ を **normed vector space (ノルム空間)** という。X 上の 2 つの semi-norm q_1, q_2 について、定数 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ が存在して不等式；

$$c_1 q_1(x) \leq q_2(x) \leq c_2 q_1(x), \ \forall x \in X$$

が成立するとき、semi-norm q_1, q_2 は**同値**であると言う。また、ノルム空間 (X, q) の点列 $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と $x \in X$ が条件；$\lim_{n \to \infty} q(x_n - x) = 0$ を満たすとき、$(x_n)_{n=1}^\infty$ は x に**収束する** と言い、$x_n \to x \ \text{ in } X$ 等と表す事もある。以下を示せ：

(i) X 上の semi-norm q_1, q_2 について次の命題 **(c)**, **(d)** は同値である；

(c) 定数 $C > 0$ が存在して、$q_1(x) \leq C q_2(x), \quad \forall x \in X.$

(d) $\lim_{n \to \infty} q_2(x_n) = 0$ となる任意の点列 $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して $\lim_{n \to \infty} q_1(x_n) = 0$。

(ii) セミノルム $q : X \to [0, \infty)$ 及び $e_1, \cdots, e_n \in X$ に対して、

$$c_1 = \min \left\{ q\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) \quad ; \quad \lambda_j \in K, \ \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = 1 \right\}$$
$$c_2 = \max \left\{ q\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) \quad ; \quad \lambda_j \in K, \ \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = 1 \right\}$$

とするとき、$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ に対し

$$c_1 \sqrt{\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2} \leq q\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) \leq c_2 \sqrt{\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2}.$$

(iii) $\dim_K X < \infty$ なら X 上の任意の 2 つのノルムは同値である。

(12.7.91-2)

[110] $I \subset \mathbb{R}$ は長さ $|I| < \infty$ の閉区間とする。$f \in C(I \to \mathbb{C})$ に対して、

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} & \text{if } 1 \le p < \infty, \\ \sup_I |f| & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

とおく。以下を示せ；(i) $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$, (ii) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$, 従って $(C(I \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ は normed vector space となる。(iii) $p \le q \Rightarrow \|f\|_p \le |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$.

(9.27.92-2)

[111] 問題 [110] で $\forall f \in C(I \to \mathbb{R})$ に対し以下を示せ；
(i) $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$, (ii) $\lim_{\lambda\to\infty} \dfrac{1}{\lambda} \log \int_I e^{\lambda f(t)} dt = \max_I f$.

(2.6.92-3)

[112] $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。$f : \mathbb{Z} \to K$, $1 \le p \le \infty$ に対して

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |f(x)|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \sup_{x\in\mathbb{Z}} |f(x)| & (p = \infty) \end{cases}$$

とおく（$\|f\|_p = \infty$ ということもある)。このとき以下を示せ；
(i) $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$, (ii) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$, 従って、$\ell^p(\mathbb{Z} \to K) \overset{\text{def.}}{=} \{f : \mathbb{Z} \to K; \|f\|_p < \infty\}$ は $\|\cdot\|_p$ を norm として normed vector space となる。(iii) $p \le q \Rightarrow \|f\|_p \ge \|f\|_q$, 従って $\ell^p(\mathbb{Z} \to K) \subset \ell^q(\mathbb{Z} \to K)$。

(11.3.91-1)

[113] 問題 [112] で $\inf_{1\le p<\infty} \|f\|_p < \infty$ を満たす $f : \mathbb{Z} \to K$ に対し $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ を示せ。

(4.8.94-1)

[114] (i) 問題 [110] で、$1 \le p < q \le \infty$ とすると、$\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ は $C(I \to \mathbb{C})$ 上で同値なノルムか？(ii) 問題 [112] で、$1 \le p < q \le \infty$ とすると、$\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ は $\ell^p(\mathbb{Z} \to K)$ 上で同値なノルムか？

(2.24.92-1)

[115] $1 \le p \le \infty$, $f \in \ell^p(\mathbb{Z} \to \mathbf{C})$, $g \in \ell^1(\mathbb{Z} \to \mathbf{C})$ とする。$f * g(n) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n-m)g(m)$ は全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して絶対収束して不等式 $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$ を満たすことを示せ。

(11.3.91-4)

[116] $(E, |\cdot|_E)$ をノルム空間とする。任意の Cauchy-列、即ち $\lim_{m,n\to\infty} |x_n - x_m|_E = 0$ を満たす点列 $\{x_n \in E; n = 1, 2, \cdots\}$ が収束するとき、E は **Banach 空間** であるという。ノルム空間 $\ell^p(\mathbb{Z} \to K)$ $(1 \le p \le \infty)$ ([112]) は Banach 空間である事を示せ。

(11.3.91-2)

[117] $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して $C^m([a,b] \to \mathbb{C})$ は、$\|f\| = \sum_{k=0}^{m} \|f^{(k)}\|_\infty$ をノルムとして Banach space となることを示せ。但し $\|f^{(k)}\|_\infty = \sup_{a \le t \le b} |f^{(k)}(t)|$

(5.10.92-1)

[118] $I \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$ とする。$f : I \to \mathbb{R}$ が

$$\omega_\alpha(f; I) = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ x, y \in I,\ x \ne y \right\} < \infty$$

を満たすとき、f は α-次 Hölder 連続といい、$f \in$ $\mathrm{H\ddot{o}l}^\alpha(I \to \mathbb{R})$ と書く。
(i) $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mathrm{H\ddot{o}l}^\alpha(I \to \mathbb{R})$ の元は I 上一様連続か？
(ii) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続なら $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mathrm{H\ddot{o}l}^\alpha([0,1] \to \mathbb{R})$ の元か？
(iii) $0 \in I$, $\alpha \in (0,1]$ とすると、$\mathrm{H\ddot{o}l}^\alpha(I \to \mathbb{R})$ は ノルム：$\|f\| = |f(0)| + \omega_\alpha(f; I)$ で Banach space になることを示せ。

(2.26.92-2)

[119] 問題 [110] で $1 \le p < \infty$ とする。$(C(I \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ は Banach space でないことを示せ。

(9.27.92-3)

[120] $K(= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ 上の Banach space E に積: $(x,y) \mapsto xy$ $(E \times E \to E)$ が定義されていて、E がこの積について K 上の algebra をなすとする。 更に積が不等式: $|xy|_E \le |x|_E |y|_E$ を満たす時、E を K 上の **Banach algebra** と言う。以下を示せ；(i) $\ell^1(\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ は積 $*$ について $\mathbb{C}$ 上の Banach algebra である。(cf. [115], [116]) (ii) $n \times n$ 複素行列全体は適当なノルムで $\mathbb{C}$ 上の Banach algebra となる。(iii) K 上の Banach algebra $(E, |\cdot|_E)$ が乗法単位元 e を持つとき、$|e - x|_E < 1$ なる $x \in E$ は乗法逆元を持つ。

ヒント：形式的に、$x^{-1} = (e - (e-x))^{-1} = e + (e-x) + (e-x)^2 + \cdots$

(3.16.92-2)

[121] E は $K(= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ 上の Banach algebra で乗法単位元 1 を持つとする。$\forall a, \forall b \in E$ に対し以下を示せ；(i) $e^a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ は well defined. (ii) $\left| e^a - \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu/\nu! \right|_E \le |a|_E^{n+1} e^{|a|_E}/(n+1)!$
(iii) $ab = ba \Rightarrow e^a e^b = e^{a+b}$. (iv) $e^a e^{-a} = 1$.

(11.26.92-1)

[122] E は $K(= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ 上の Banach algebra で乗法単位元 1 を持つとする。$\forall a, \forall b \in E$ に対し
$e^{a+b} = \lim_{n \to \infty} (e^{a/n} e^{b/n})^n$ を示せ。

(11.26.92-2)

[123] A を 2×2 実行列、$t=\mathrm{tr}(A)$, $d=\det(A-\frac{t}{2}I)$ とするとき次を示せ；

$$e^A = c_1(t,d)I + c_2(t,d)A,$$

但し $d\geq 0$ なら

$$c_1(t,d) = \left(\cos\sqrt{d} - \frac{t\sin\sqrt{d}}{2\sqrt{d}}\right)e^{t/2},\quad c_2(t,d) = \frac{\sin\sqrt{d}}{\sqrt{d}}e^{t/2},$$

また $d\leq 0$ なら

$$c_1(t,d) = \left(\cosh\sqrt{-d} - \frac{t\sinh\sqrt{-d}}{2\sqrt{-d}}\right)e^{t/2},\quad c_2(t,d) = \frac{\sinh\sqrt{-d}}{\sqrt{-d}}e^{t/2}.$$

ヒント；$B=A-\frac{t}{2}I$ とおくと、$B^2=-dI$. これを用いて $e^B=\sum_{n\geq 0}B^n/n!$ を計算せよ。一方 $A=B+\frac{t}{2}I$ より、$e^A=e^Be^{t/2}$.

(11.26.92-3)

[124] 複素べき級数 $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu$ が収束半径を $r\in(0,\infty]$ とし、また行列 A に対し、$f(A)$ は形式的に A を代入して得られる行列（実際に意味があるのは収束するときのみ）とする。次を示せ；

(i) Jordan block $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$ について $|\lambda|<r$ なら $f(J_\lambda)$ が収束し、

$$f(J_\lambda)_{ij} = \begin{cases} \frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!} & \text{if } j\geq i \\ 0 & \text{if } j<i. \end{cases}$$

また $|\lambda|>r$ なら $f(J_\lambda)$ は収束しない。

ヒント；

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu J_\lambda^\nu &= \sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(\lambda+J_0)^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\left\{\sum_{k=0}^{\nu}\frac{\nu!}{(\nu-k)!k!}J_0^{\nu-k}\right\}\lambda^\nu \\ &= \cdots\end{aligned}$$

(ii) 行列 A に対し

$$\rho := \max\{|\lambda|;\lambda \text{ は } A \text{ の固有値 }\}\begin{cases} <r & \Rightarrow\ f(A) \text{ は収束、} \\ >r & \Rightarrow\ f(A) \text{ は収束しない。}\end{cases}$$

(1.19.95-1)

[125]

(i) A を正方行列とするとき $(e^{tA})_{t\ge 0}$ と次のベクトル値常微分方程式の関係を述べよ；

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), & t > 0, \\ x(0) = b. \end{cases}$$

(ii) 次の行列 A に対し、$(e^{tA})_{t\ge 0}$ を計算せよ（[124]-(i) を用いてもよい）。

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$, (Jordan block)

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1.19.95-2)

[126] E, F を $K(=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ 上の normed vector space とする。K-linear mapping $A: E \to F$ が **bounded operator(有界作用素)** であるとは、

$$\|A\|_{E\to F} = \sup\{|Ax|_F;\ \ |x|_E = 1\}$$

が有限である事とし、有界作用素 $A: E \to F$ の全体のなす集合を $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}_K(E;F)$ あるいは $\mathcal{L}(E \to F) = \mathcal{L}_K(E \to F)$ と書く。問題 [109]-(i) から線形写像 $A: E \to F$ が有界作用素であることは、$A: E \to F$ が連続であることと同値であることがわかる。E をノルム空間、F　を Banach 空間とするとするとき、以下を示せ；(i) $\mathcal{L}(E \to F)$ は ノルム $\|\cdot\|_{E\to F}$ で　Banach 空間になる。(ii) $\mathcal{L}(F \to F)$ は写像の合成を積と考えると、ノルム $\|\cdot\|_{F\to F}$ で　Banach algebra になる。

(12.28.91-3)

[127] V を線形空間，$\mathrm{End}(V)$ を V から V への線形写像全体の集合, $A, B \in \mathrm{End}(V)$, $AB - BA = I$(I は恒等写像) とする．以下を示せ．(i) 任意の $n = 1, 2, ...$ に対し $B^n \neq 0$, $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$．したがって，$n = 1, 2, ...$ は, 線形写像 $X \mapsto ABX - XBA$ ($\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$) の固有値である．(ii) V は無限次元である．(iii) V がノルム空間なら，A, B の少なくとも一方は有界作用素でない．

(4.30.92-1)

[128] E,F をノルム空間，$f: E \to F$ とする．f の $x \in E$ における微分可能性を次の 3 種類の方法で定義する；

(G) *Gâteaux Differentiability at* x;

$$\exists T \in \mathcal{L}(E \to F), \forall e \in E, \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} = T(e).$$

(F) *Fréchet Differentiability at* x;

$$\exists T \in \mathcal{L}(E \to F), \lim_{|e|_E \to 0} \frac{f(x+e) - f(x) - T(e)}{|e|_E} = 0.$$

(上記　**(G)**,**(F)** において，$T = f'(x)$ と書く．)

(C) C^1-*property at* x; x の近傍 U が存在して f は U の各点で Gâteaux differentiable かつ　$f' : U \to \mathcal{L}(E \to F)$ は x において連続.

(i):**(C)** $\Rightarrow$ **(F)** $\Rightarrow$ **(G)** を示せ。(ii):**(F)** $\Rightarrow$ 「f は x で連続」を示せ。(iii):**(G)** $\not\Rightarrow$ 「f は x で連続」, (従って **(G)** $\not\Rightarrow$ **(F)**) を例示せよ.

(9.7.92-1)

[129] E, F, を $\mathbb{R}$ 上の normed vector space, $f : E \to F$ とする。$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$ であることは次の 2 条件が同時に成立することと同値であることを示せ；

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, \forall y \in E$

(b) $\exists x_0 \in E, \exists \varepsilon > 0 \ \ \sup\{|f(x)|_F; \ \ |x - x_0|_E \le \varepsilon\} < \infty.$

(2.12.92-2)

[130] 関数方程式：$\forall x, \forall y \in \mathbf{R}, \ f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすが $\mathbb{R}$-linear でない $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ。

ヒント：体 K 上の vector space には base が存在する、例えば $K = \mathbb{Q}$。

(11.3.91-5)

[131] 任意の vector space 上に内積が（従ってノルムが）存在する。

(2.13.91-4)

[132] V は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持った vector space とする。写像 $f : V \to V$ について次は同値であることを示せ；

(a) $\langle\, f(x), f(y) \,\rangle = \langle\, x, y \,\rangle, \forall \{x, y\} \subset V.$

(b) f は線型かつ $|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall \{x, y\} \subset V$, 但し $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

(2.13.92-2)

[133] 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持った vector space E の 4 点 x_1,x'_1,x_2,x'_2, について次が同値であることを示せ；

(a) $|x_1 - x_2| = |x'_1 - x'_2|$, 但し $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

(b) 次を満たす isometry f が存在する；$f(x_i) = x'_i \ (i = 1, 2)$.

「**(a)** $\Rightarrow$ **(b)**」のヒント; $E = \mathbb{R}^2$ なら f は適当な直線に関する鏡像を合成することによって得られる。（これは初等幾何学的考察でわかる）

(2.13.91-3)

[134]

$$\bigwedge^p \mathbb{R}^n = \ \{v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \,;\, v_i \in \mathbb{R}^n\} \text{ で生成される } \mathbb{R} \text{ 上のベクトル空間}$$

とする ($\wedge$ は外積)。(i) $\mathbb{R}^n$ の標準正規直交基底 $\delta_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対し $\{\delta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \delta_{i_p} ; i_1 < \cdots < i_p\}$ は $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ。(ii) $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$ の内積を (i) の基底を正規直交基底とするように定義する。線型独立な $v_1, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$ に対し次を示せ；

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \text{ のノルム} \\ = \quad & \text{集合 } \{s_1 v_1 + \cdots + s_p v_p \,;\, s_i \in [0,1]\} \text{ の } p\text{-次元体積。} \end{aligned}$$

(12.20.96-2)

[135]　電圧の存在と一意性；

ある電気回路が有限集合 S の点どうしを導線で結ぶことにより得られているとする。直接導線で結ばれた $x, y \in S$ に対しては、導線の抵抗を $r(x,y) = r(y,x) \in (0, \infty)$、他の $x, y \in S$ に対しては、$r(x,y) = r(y,x) = \infty$ とする。$a, b \in S$ $(a \neq b)$ を固定するとき次の関係を満たす $\varphi : S \to \mathbb{R}$ を「電圧」と呼ぶことにする；

$$\sum_{y \in S} r(x,y)^{-1}(\varphi(y) - \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \neq a, b \quad \left(\frac{1}{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} 0\right)$$

(Ohm の法則 + Kirchhoff の第 1 法則)。このとき、以下の (i)-(iii) を順次示せ；尚、回路が「ひと続き」であることを保証する為に次のことを仮定する：$\forall x, \forall y \in S$ に対し、$x_0, x_1, \cdots, x_n \in S$ を $x_0 = x$, $x_n = y$, $r(x_{j-1}, x_j) < \infty$ を満たすようにとれる。(i) $\mathcal{A} = \{f : S \to \mathbb{R} |\, f(a) = 0\}$ とおくと、Dirichlet 形式:

$$D(f,g) = \sum_{x,y \in S} r(x,y)^{-1}(f(y) - f(x))(g(y) - g(x))$$

は $\mathcal{A}$ 上の内積。(ii) $(\mathcal{A}, D)$ は次の 2 つの部分空間の直交直和；$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{A} \mid f(b) = 0\}$, $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{A} \mid f \text{ は電圧 }\}$. このことから $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ を満たす電圧 φ が一意的に存在。(iii) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ を満たす電圧 φ が一意的に存在。

(10.13.93-1)

[136] Dirichlet の原理；

S を問題 [135] の電気回路とする。$\varphi : S \to \mathbb{R}$ が $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ を満たすとき、次の 2 つは同値であることを示せ；

(a) φ は電圧。

(b) $D(\varphi, \varphi) = \mathrm{Min}\{D(f,f) \mid f(a) = 0,\ f(b) = 1\}$.

(10.13.93-2)

[137] $(E, |\cdot|_E)$ をノルム空間、V を E の有限次元部分空間とする。(i) 次を示せ；任意の $u \in E$ に対し V の中で u からの距離が最小となる点が存在する、すなわち $v_0 \in V$ が存在して、

$$|u - v_0|_E = \inf\{|u - v|_E;\ v \in V\}.$$

(ii) (i) において v_0 は一意的か？(iii) V が無限次元なら (i) のような v_0 は存在しないこともある。具体例を挙げよ。

(7.14.92-1)

[138] $K=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $(H,|\cdot|_H)$ を K 上の Hilbert 空間とする。次を示せ；

(i) $M\subset H$ が閉凸集合なら $\forall x\in H$ に対し、$|x-m_0|_H=\inf\{|x-m|_H\,;\,m\in M\}$ をみたす $m_0\in M$ が唯一存在する。

(ii) $M\subset H$ が閉部分空間なら、$H=M\oplus N$ (直交直和) となる閉部分空間 N が唯一存在する。

(iii) **Riesz の表現定理;** $f\in\mathcal{L}(H\to K)$ に対し、$f(x)=\langle\, x,h_f\,\rangle_H,\ \ \forall x\in H$ をみたす $h_f\in H$ が唯一存在する、ただし $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_H$ は内積を表わす。

(iv) (iii) において $h_{\alpha f+\beta g}=\overline{\alpha}h_f+\overline{\beta}h_g,\ \ \alpha,\beta\in K,\ \ f,g\in\mathcal{L}(H\to K)$.

(11.16.92-1)

[139] 距離空間 $X=(X,d)$ における点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について次の (a), (b) は同値である。

(a) $x_n\to x\in X$、即ち　$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$。

(b) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ から更に部分列 $(x''_n)_{n=1}^{\infty}$ が選べて、$x''_n\to x$ 。

(12.7.91-3)

[140] (X,d) を距離空間、 $A\subset X$ とする。次の命題 (a), (b) は同値であることを示せ；

(a) A は全有界。

(b) $\forall\varepsilon>0$ に対し、全有界集合 B_ε が存在し、$A\subset\{x\in X\mid \inf_{b\in B_\varepsilon}d(x,b)<\varepsilon\,\}$.

(4.7.98-1)

[141] X を距離空間、$f_n:X\to\mathbb{C}$ $(n=1,2,\cdots)$, $f\in C(X\to\mathbb{C})$ とする。このとき、次の 2 つは同値である：

(a) 任意の収束列 $x_n\to x$ に対し、$f_n(x_n)\to f(x)$。

(b) X の任意の compact subset K に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|f_n(x)-f(x)|=0.$

(10.24.91-6)

[142] $1\le p<\infty$, $a_n\ge 0$ $(n\in\mathbb{Z})$, $B=\{x\in\ell^p(\mathbb{Z}\to K)\,;$ 全ての $n\in\mathbb{Z}$ に対し $|x_n|\le a_n\}$ とする ([112] 参照). 次を示せ：「B が $\ell^p(\mathbb{Z}\to K)$ でコンパクト $\Longleftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^p(\mathbb{Z}\to\mathbb{R})$」

(8.7.18-1)

[143] X は局所 compact Hausdorff 位相空間で可算開基底をもつとする。以下を示せ;(i) Compact 集合列 $K_1\subset K_2\subset\ldots\subset X$ で次を満たすものが存在する;$\cup_{n\ge1}K_n=X$ かつ任意の compact 集合 $K\subset X$ に対し $n\ge 1$ が存在し、$K\subset K_n$. (ii) Y を距離空間とし、 $f,g\in C(X\to Y)$ に対し

$$\begin{aligned}D_n(f,g)&=\sup_{x\in K_n}d_Y(f(x),g(x)),\quad n=1,2,\ldots,\\ D(f,g)&=\sum_{n\ge1}2^{-n}\min\{1,\ D_n(f,g)\}\end{aligned}$$

とおく。このとき、$D(f,g)$ は $C(X\to Y)$ 上の距離関数である。(iii) $f_m, f\in C(X\to Y)$ とする。$\lim_{m\to\infty} D(f_m,f)=0$ は 「f_m が f に局所一様収束する」ことと同値である。

(6.1.00-1)

[144] $\ell^p(\mathbb{Z}\to\mathbb{R})$ $(1\le p<\infty)$ ([112]) は可分である。

(2.29.92-1)

[145] 以下を示せ ; (i) 距離空間 (Y,d_Y) のある非可算部分集合 Y_0 が条件 :

$$\inf\{d_Y(y,y');\ \ y,y'\in Y_0,\ \ y\ne y'\}>0$$

を満たすなら、(Y,d_Y) は可分ではない。(ii) $\ell^\infty(\mathbb{Z}\to\mathbb{R})$ は可分ではない。

(2.29.92-2)

[146] $\ell^p=\ell^p(\mathbb{Z}\to\mathbb{C})$ $(1\le p\le\infty)$ とする。$g\in\ell^\infty$ に対して、かけ算作用素 $M_g:\ell^p\to\ell^p$ を $M_gf=g\cdot f$ で定義する。以下を示せ ; (i)$\|M_g\|_{\ell^p\to\ell^p}=\|g\|_\infty$. (ii) $\mathcal{L}(\ell^p\to\ell^p)$ は可分ではない。

(6.2.92-1)

[147] Banach space $\mathrm{H\ddot{o}l}^\alpha([0,1]\to\mathbb{R})$ ([118]) は可分ではない事を示せ。

(3.3.92-1)

[148] X を位相空間、$C_b(X\to\mathbb{C})=\{$ X 上の有界な複素数値連続関数 $\}$ とする。以下を示せ ; (i) $f_n\in C_b(X\to\mathbb{C})$ $(n=1,2,\cdots)$ が、ある関数 f に一様収束するなら $f\in C_b(X\to\mathbb{C})$ である。(ii) $C_b(X\to\mathbb{C})$ は 一様ノルム : $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$ と、積 : $(fg)(x)=f(x)g(x)$ 関して Banach algebra である。(iii) $C_b(X\to\mathbb{R})$ の subalgebra $\mathcal{C}$ が一様極限で閉じている (i.e. $f_n\in\mathcal{C}$ が f に一様収束 $\Rightarrow f\in\mathcal{C}$) ならば $\mathcal{C}$ は lattice であること、即ち次の性質をもつことを示せ ;

$$f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow\min\{f,g\}\in\mathcal{C},\ \ \max\{f,g\}\in\mathcal{C}.$$

(iii) のヒント ; $f\in\mathcal{C}\Rightarrow|f|\in\mathcal{C}$ を示せればよいことに注意せよ。そこで $|t|$ $(t\in[-1,1])$ が t の多項式で一様に近似できる([45])ことを思い出す。

(12.9.91-1)

[149] $\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 、X を集合、$\mathcal{A}$ を $\{f:X\to\mathbb{K}\}$ の sub-algebra とする。また、$n\ge 2$ とし $\mathcal{A}$ に次の条件を仮定する ;

(A_n) 任意の相異なる n 個の点 $x_1,\dots,x_n\in X$ に対し $f\in\mathcal{A}$ であって $f(x_1)\ne 0$ かつ $f(x_1),\dots,f(x_n)$ が相異なるようなものが存在する。

次を示せ ; 任意の $(\alpha_i)_{i=1}^n\in\mathbb{K}^n$ と任意の相異なる n 個の点 $x_1,\dots,x_n\in X$ に対し

- $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{A}$,
- $\mathbb{K}$-係数の n-変数 n-次の多項式 $P(t_1,\dots,t_n)$ で定数項を含まないもの

を適当に選べば、関数 $g = P(f_1, \dots, f_n)$ は「$g(x_i) = \alpha_i$, $(i = 1, \dots, n)$」を満たす。ヒント；任意の相異なる n 個の点 $x_1, \dots, x_n \in X$ をとる。条件 (A_n) から各 $i = 1, \dots, n$ に対し $f_i \in \mathcal{A}$ であって $f_i(x_i) \neq 0$ かつ $f_i(x_1), \dots, f_i(x_n)$ が相異なるようなものが存在する。そこで

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{f_i(x) - f_i(x_j)}{f_i(x_i) - f_i(x_j)}$$

とすると $g_i \in \mathcal{A}$ かつ $g_i(x_j) = \delta_{ij}$.

(7.19.97-1)

[150] **Stone-Weierstrass' theorem ;** X を compact 位相空間 とする。次を示せ；

(i) $\mathcal{A}$ は $C(X \to \mathbb{R})$ の sub-algebra であって問題 [149] の条件 (A_2) を満たすとする。このとき、$\forall f \in C(X \to \mathbb{R})$ は $\mathcal{A}$ の元によって一様に近似される。
ヒント； $\mathcal{A}$ の一様ノルムによる閉包を $\overline{\mathcal{A}}$ と書く。$f \in C(X \to \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ を任意とし、次の順序で議論する；

(1) 任意の $x, y \in X$ に対し $g_{xy} \in \mathcal{A}$ であって $g_{xy}(x) = f(x)$, $g_{xy}(y) = f(y)$ なるものが存在する（問題 [149]）。

(2) 任意の $x \in X$ に対して有限集合 $Y(x) \subset X$ であって $X = \displaystyle\bigcup_{y \in Y(x)} G_{x,y,\varepsilon}$ なるものが存在する、但し $G_{x,y,\varepsilon} = \{z \in X \,;\, g_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon\,\}$.

(3) $g_x(z) = \displaystyle\min_{y \in Y(x)} g_{xy}(z)$ とすると $g_x(x) = f(x)$, $g_x(z) \le f(z) + \varepsilon$ $(\forall z \in X)$.
更に [148]-(iii) より $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$.

(4) 有限集合 $X_0 \subset X$ であって $X = \displaystyle\bigcup_{x \in X_0} H_{x,\varepsilon}$ なるものが存在する、但し $H_{x,\varepsilon} = \{z \in X \,;\, g_x(z) > f(z) - \varepsilon\,\}$.

(5) $h(z) = \displaystyle\max_{x \in X_0} g_x(z)$ とすると $f(z) - \varepsilon \le h(z) \le f(z) + \varepsilon$ $(\forall z \in X)$. また [148]-(iii) より $h \in \overline{\mathcal{A}}$.

(ii) $\mathcal{A}$ は $C(X \to \mathbb{C})$ の sub-algebra であって問題 [149] の条件 (A_2) に加えて、条件；「$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$」を満たすなら、$\forall f \in C(X \to \mathbb{C})$ は $\mathcal{A}$ の元によって一様に近似される。

(5.19.92-1)

[151] $(\star)$ Λ を集合とし、直積 $[0,1]^\Lambda$ を考える。このとき、「Λ が高々可算 $\Longleftrightarrow$ $C([0,1]^\Lambda \to \mathbb{C})$ は可分」を示せ。

(5.19.92-2)

[152] Compact 距離空間 X に対して、$C(X \to \mathbb{C})$ は可分であることを示せ。ヒント：色々な方法があると思うが、その一つが X を $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に同相に埋め込み、[151] の結果を用いる方法。

(5.30.09)

[153] (X,d_X),(Y,d_Y) を距離空間とするとき、$f:X\to Y$ が**一様連続** とは性質；

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\\&x,x'\in X,\ d_X(x,x')<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon\end{aligned}$$

を持つことであるとし、一様連続写像全体を $C_{\text{unif.}}(X\to Y)$ と記す。

X,Y を距離空間、$\varphi:X\to Y$ を同相写像とする。以下を示せ；(i) X は完備 $\not\Rightarrow$ Y は完備 (ii) X は全有界 $\not\Rightarrow$ Y は有界 (iii) φ^{-1} が一様連続なら「X は完備 $\Rightarrow$ Y は完備」(iv) φ が一様連続なら「X は全有界 $\Rightarrow$ Y は全有界」

(5.8.92-1)

[154] 問題 [153] で φ, φ^{-1} をともに一様連続と仮定する。「X が有界 $\Rightarrow$ Y が有界」か？

(5.12.92-1)

[155] E, F をノルム空間、 $f:E\to F$ とするとき次を示せ；

$$f\in C_{\text{unif.}}(E\to F)\iff\begin{array}{l}\forall\varepsilon\in(0,\infty),\ \exists K_\varepsilon\in(0,\infty),\\|f(x)-f(y)|_F\le K_\varepsilon|x-y|_E+\varepsilon,\quad\forall x,\forall y\in E.\end{array}$$

(12.4.91-2)

[156] X を距離空間、Y を完備距離空間とする。$A\subset X$,$\delta>0$ に対して $f:A\to Y$ の **modulus of continuity (連続率)** $\omega_A(f;\delta)$ を次のように定義する；

$$\omega_A(f;\delta)=\sup\{d_Y(f(x),f(x'));\ x,x'\in A,\ d_X(x,x')<\delta\}.$$

以下を示せ;(i) $A\subset X$ 及び $f\in C(A\to Y)$ に対して $F\in C(\overline{A}\to Y)$ であって f の拡張となるもの (A 上では $F=f$ となるもの) はもし有れば一意的であり、$\omega_A(f;\delta)=\omega_{\overline{A}}(F;\delta)$, $\forall\delta>0$ を満たす。(ii) (i) で述べた拡張 F は一般には存在しない。(iii) $f\in C_{\text{unif.}}(A\to Y)$ について、$F\in C_{\text{unif.}}(\overline{A}\to Y)$ であって f の拡張となるものが一意的に存在する。(iv) X はノルム空間、A が X の線形部分空間とする。Y を Banach space とするとき $f\in\mathcal{L}(A\to Y)$ に対して f の拡張となる $F\in\mathcal{L}(\overline{A}\to Y)$ が一意的に存在して、$\|f\|_{A\to Y}=\|F\|_{\overline{A}\to Y}$.

(10.24.91-7)

[157] $f\in C(\mathbb{Q}\to\mathbb{R})$ で 、$\forall\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ に対し $\mathbb{Q}\cup\{\alpha\}$ まで連続に拡張できないようなものは存在するか？

(11.3.91-6)

[158] 位相空間 X 上の関数 $f:X\to(-\infty,\infty]$ について $\forall a\in\mathbb{R}$ に対し $\{x\in X;f(x)\le a\}$ が閉集合ならば、f を **下半連続** (lower semi-continuous) であるという。また $f:X\to[-\infty,\infty)$ について $\forall a\in\mathbb{R}$ に対して $\{x\in X;f(x)\ge a\}$ が閉集合ならば f を**上半連続** (upper semi-continuous) であるという。

X を位相空間、$f:X\to[-\infty,\infty]$ とする。以下を示せ；

(i) $f\in C(X\to\mathbb{R})$ $\iff$ f が下半連続 かつ 上半連続。

(ii) 下半連続関数の族：$\{f_\lambda : X \to (-\infty, \infty]\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ は下半連続である。

(iii) X が Hausdorff 位相空間, $f : X \to (-\infty, \infty]$ とする。$\forall a \in \mathbb{R}$ に対し集合 $\{x \in X; f(x) \le a\}$ が compact なら f は下に有界かつ，最小値をもつ。特に compact Hausdorff 位相空間の上の 下半連続関数 は最小値を持つ。

(iii) のヒント：$a = \inf_{x\in X} f(x)$ $a_1 > a_2 > \ldots > a_n \searrow a$ とする。このとき $\{x \in X; f(x) \le a_n\}$ は空でない compact set であって

$$\{x \in X; f(x) \le a\} = \cap_{n\ge1}\{x \in X; f(x) \le a_n\}$$

なお X を Hausdorff と仮定したのは compact subset が closed subset であることを保証するため。

(12.1.91-2)

[159] X を距離空間 $f : X \to (-\infty, \infty]$ とするとき、次を示せ；
「f は下半連続」 $\Longleftrightarrow$ 「$x_n \to x$ ならば常に $\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \ge f(x)$.」
また上半連続関数 に対しても対応する同値性を述べよ。

(12.1.91-1)

[160] $X = (X, \rho)$ を距離空間 $f : X \to (-\infty, \infty]$, $\underline{f}(x) = \lim_{r\to0} \inf\{f(y);\ \rho(x, y) < r\}$ とする。このとき、以下を示せ；
(i) $\underline{f}$ は下半連続。
(ii) $g : X \to (-\infty, \infty]$ は下半連続かつ $g \le f$ なら $g \le \underline{f}$.
(iii) 「f は下半連続」 $\Longleftrightarrow$「$\underline{f} = f$」

(3.12.03)

[161] $X = (X, \rho)$ は距離空間, $b \in \mathbb{R}$, $f : X \to [b, \infty]$, $f \not\equiv \infty$ とし，

$$f_n(x) = \inf_{z\in X}\{f(z) + n\rho(x, z)\}, \quad x \in X, \ \ n = 1, 2, ...$$

とおく．このとき，$\forall x, y \in X$, $\forall n = 1, 2, ...$ に対し以下を示せ：
i) $b \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le f(x)$.
ii) $|f_n(x) - f_n(x)| \le n\rho(x, y)$.
iii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ge \lim_{r\to0} \inf\{f(z)\,;\ z \in X; \rho(x, z) \le r\}$.
iv) f が下半連続なら $f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. ($f$ はリプシッツ連続関数列の単調増加極限).

(12.1.91-3)

[162] X を compact 位相空間、$f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は上半連続かつ $\forall x \in X$ で、次の条件を満たしているとする。

$$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_n(x) \ge \cdots \ge f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n\ge1} f_n(x) > -\infty$$

以下を示せ；
(i) $f(x_0) = \inf_{n\ge1} \sup_{x\in X} f_n(x)$ をみたす $x_0 \in X$ が存在する．従って $\sup_{x\in X} \inf_{n\ge1} f_n(x) = \inf_{n\ge1} \sup_{x\in X} f_n(x)$.

ヒント：$c = \inf_{n\geq 1}\sup_{x\in X} f_n(x)$ に対し $\{x \in X\ ;\ f_n(x) \geq c\} \neq \emptyset$.
(ii) **Dini の定理；** f が連続なら $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X}(f_n(x) - f(x)) = 0$.

(12.9.91-2)

[163] $X = (X, d_X)$, $Y = (Y, d_Y)$ を距離空間とする。X から Y への写像の族 $\mathcal{E}$ が $x \in X$ において

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,$$
$$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow \sup_{f\in\mathcal{E}} d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

を満たす時、$\mathcal{E}$ は $x \in X$ において **equi-continuous (同程度連続)** であるという。$\mathcal{E}$ が全ての点で同程度連続な時、$\mathcal{E}$ は同程度連続という。連続関数列 $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \cdots$ が $f : X \to Y$ に各点収束すると仮定する。以下を示せ；(i) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が点 $x \in X$ で同程度連続なら f は $x \in X$ で連続。(ii) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が同程度連続 $\Longleftrightarrow$ $f_n \to f$ は局所一様収束 。

(i) のヒント： $x, y \in X$ に対し $d_Y(f(x), f(y)) \leq \sup_{n\geq 1} d_Y(f_n(x), f_n(y))$.

(ii) $\Rightarrow$ のヒント： $x, y \in X$, $n \geq 1$ に対し

$$d_Y(f(x), f_n(x)) \leq d_Y(f(x), f(y)) + d_Y(f(y), f_n(y)) + d_Y(f_n(y), f_n(x)).$$

$n \to \infty$ とすれば $\overline{\lim}_{n\to\infty} d_Y(f(x), f_n(x)) \leq d_Y(f(x), f(y)) + \overline{\lim}_{n\to\infty} d_Y(f_n(y), f_n(x))$.

(ii) $\Leftarrow$ のヒント： x を任意、$\lim_{m\to\infty} x_m = x$ とする。このとき、$K = \{x\} \cup \{x_m\}_{m\geq 1}$ は compact。また、三角不等式より

$$d_Y(f_n(x), f_n(x_m)) \leq 2\sup_{y\in K} d_Y(f_n(y), f(y)) + d_Y(f(x), f(x_m)).$$

(2.26.92-3)

[164] (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X \to Y)$ を同程度連続関数列とする。$A \subset X$ に対して次を示せ；(i) $\forall x \in A$ に対して $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy-列ならば $\forall x \in \overline{A}$ に対してもそうである。(ii) d_Y が完備なとき、$\forall x \in A$ に対して $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列が収束部分列を含むなら, $\forall x \in \overline{A}$ に対してもそうである。

コメント；d_Y が完備なら、[163] の条件 「f_n は各点収束」を「f_n は dense subset の上で各点収束」に緩められる。

(2.11.93-1)

[165] X, Y を距離空間、$f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \cdots$ を連続関数列とし、条件；

(a) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は同程度連続。

(b) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は 稠密な部分集合 X_0 上各点収束。

(c1) $\forall x \in X$ に対して集合 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ の閉包は Y の距離について完備

(c2) $\forall x \in X$ に対して集合 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1} \subset Y$ の閉包は compact.

を考える。以下を示せ; (i) 次の 3 つの命題は同値である;「$\{f_n\}_{n\geq 1}$ は 或る $f \in C(X \to Y)$ に局所一様収束する」、「条件 **(a)**, **(b)** **(c1)** が成立」、「条件 **(a)**, **(b)** **(c2)** が成立」。(ii) X を可分（i.e., 稠密可算集合 X_0 が存在）とする。条件 **(a)**,**(c2)** が満たされるなら $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は或る $f \in C(X \to Y)$ に局所一様収束する部分列を含む。

(i) のヒント： 条件 **(a)**, **(b)**, **(c1)** を仮定すると [164] より、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ は各点収束する。そこで [163] の結果が使える 。(ii) のヒント：条件 **(c2)** を仮定すると $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の部分列で X_0 上各点収束するものの存在する（対角線論法)。その部分列に対して (i) の結果を適用せよ。

コメント ; Y 　が完備なら条件 **(c1)** は自動的に満たされる。

(12.30.91-2)

[166] X は局所 compact な距離空間で可算開基底をもつとする。更に Y は距離空間、$E \subset C(X \to Y)$ とするとき、以下を示せ; (i) E が問題 [143] の距離 D で compact なら E は同程度連続かつ集合

$$\{f(x)\,;\; x \in K, f \in E\} \tag{0.8}$$

は Y の compact 部分集合である, 但し K は X の任意の compact 部分集合．ヒント : (0.8) で定義される集合の compact 性は $(x, f) \mapsto f(x)$ が $X \times C(X \to Y)$ から Y への連続写像であることから出る。

(ii) **Ascoli-Arzela の定理 :** 次の 3 条件は同値である ;

a) E は距離 D について相対 compact （i.e., 閉包が compact ）。

b) E は同程度連続かつ (0.8) で定義される集合は相対 compact.

c) E は同程度連続かつ任意の $x \in X$ に対し集合 $\{f(x)\,;\; f \in E\}$ は相対 compact.

ヒント： (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) は (i) で $\overline{E}$ を考えればよい。(**c**) $\Rightarrow$ (**a**) では 問題 [165] の結果が使える。

(6.2.00-1)

[167] $X = (X, d_X), Y = (Y, d_Y), Z = (Z, d_Z)$ を距離空間とする。(i) を例示せよ; $f : X \times Y \to Z$ が「$\forall x \in X$ に対し $f(x, \cdot) \in C(Y \to Z)$ 」かつ「$\forall y \in Y$ に対し $f(\cdot, y) \in C(X \to Z)$ 」であっても $f \in C(X \times Y \to Z)$ とは限らない。(ii) $f : X \times Y \to Z$ について次の 2 条件は同値であることを示せ ;

(a) $f \in C(X \times Y \to Z)$

(b) $\forall x \in X$ に対し $f(x, \cdot) \in C(Y \to Z)$ 　かつ Y の任意の compact set K に対し $\{f(\cdot, y)\}_{y\in K}$ は同程度連続.

(12.30.91-1)

[168] $f : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ が次の性質を持つとき convex function （凸-関数）という ;

$$\begin{aligned} &\lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1 \\ \Rightarrow \quad &f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$f:\mathbb{R}\to(-\infty,\infty]$ を 凸-関数、$I \stackrel{\text{def.}}{=} \{x\in\mathbb{R};\ f(x)<\infty\}$ とし、I が 2 点以上を含むことを仮定する。以下を示せ；(i) $-\infty\le a<b\le\infty$ が存在して I は次の何れかの形になる：(a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ $[a,b]$. (ii) $a<x_1<x_2\le x_3<x_4<b$ に対し、

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_4)-f(x_1)}{x_4-x_1}\le\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$

(iii) $x\in(a,b)$ に対し、$D^{\pm}f(x)=\displaystyle\lim_{y\to x\pm0}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ が存在して、

$$a<x<y<b\ \Rightarrow\ D^-f(x)\le D^+f(x)\le D^-f(y)\le D^+f(y).$$

(iv) $a<x_1\le x_2<x_3\le x_4<b$ ならば、

$$-\infty<D^+f(x_1)\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\le D^-f(x_4)<\infty.$$

(v) 任意の有界閉区間 $J\subset(a,b)$ に対して定数 $L=L_J>0$ が存在して

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|,\quad x,y\in J.$$

従って、$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は連続。(vi) $x\in I$ が a または b, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ が $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ なら、$\overline{\lim}_{n\to\infty}f(x_n)\le f(x)$. (vii) $f:I\to\mathbb{R}$ が不連続となる例を挙げよ。

(2.6.92-4)

[169] 記号は [168] の通りとし，以下を示せ．
(i) $D^+f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は右連続かつ，D^+f の連続点においては f は可微分．
(ii) $D^-f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は左連続かつ，D^-f の連続点においては f は可微分．

(9.17.12-1)

[170] $f:[a,c]\to\infty$ を凸とする $(a,c\in\mathbb{R},\ a<c)$. 以下を示せ：
(i) $a<b\le c$ なら $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le D^-f(b)$ ([168] 参照). かつ、等号は f が $[a,b]$ 上線形であるときに限る。
(ii) $a<b<c$ なら $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$. かつ、等号は f が $[a,c]$ 上線形であるときに限る。
(8.09.06-2)

[171] $I=(a,b)$ $(-\infty\le a<b\le\infty)$, $\varphi:I\to\mathbb{R}$ を convex function とする。次を示せ；

(i) $c\in I$, $D^-\varphi(c)\le\alpha\le D^+\varphi(c)$ （cf.[168]）なら $\varphi(c)+\alpha(x-c)\le\varphi(x),\quad\forall x\in I.$

(ii) $x_1,\cdots,x_n\in I,\ \ p_1+\cdots+p_n=1,\ \ p_j\ge0\Rightarrow\varphi\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n x_jp_j\right)\le\sum_{j=1}^n\varphi(x_j)p_j.$

(iii) $x_j\ge0,\ p_j\ge0,\ p_1+\cdots+p_n=1\Rightarrow x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}\le x_1p_1+\cdots+x_np_n.$

(iv) $J\subset\mathbb{R}$ は長さ $|J|<\infty$ の閉区間、$f\in C(J\to I)$ とするとき、$\varphi\left(|J|^{-1}\int_Jf\right)\le|J|^{-1}\int_J\varphi(f)$.

(ii) のヒント；(i) で $c=\sum_{j=1}^n x_jp_j$, $x=x_j$ と置いた式を用いると早い。
(iii) のヒント；$x_j>0$ の場合を示せば十分。そこで、両辺の log を考えよ。
(iv) ヒント：(ii) のヒントを参考にせよ。

余談 : (iii) の不等式で、$n=2$ の場合を Young の不等式という。また、$p_1=\cdots=p_n=1/n$ の場合が 「相加平均 $\geq$ 相乗平均」。

(2.6.92-5)

[172] $I=(a,b)$ $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$, $\varphi:I\to\mathbb{R}$ を convex function とする。このとき、実数列 a_n, b_n, $(n\geq 1)$ であって $\forall x\in I$ に対し $\varphi(x)=\sup_{n\geq 1}\{a_nx+b_n\}$ を満たすものが存在することを示せ。ヒント: $y\in\mathbb{Q}\cap I$ に対し $a_y=D^+\varphi(y)$, $b_y=\varphi(y)-yD^+\varphi(y)$, $\psi(x)=\sup_{y\in\mathbb{Q}\cap I}\{a_yx+b_y\}$ とおく。$\forall x\in I$ に対し $\varphi(x)\geq a_yx+b_y$ かつ $\varphi(y)=a_yy+b_y$. 従って $x\in\mathbb{Q}\cap I$ ならば $\varphi(x)=\psi(x)$ である。これを用いて $\forall x\in I$ に対し $\varphi(x)=\psi(x)$ を示せ。

(6.30.00)

[173] $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ について以下を示せ ;

(i) φ が convex なら $\varphi(x+y)+\varphi(0)\geq\varphi(x)+\varphi(y)$, $\forall x,\forall y\in[0,\infty)$.

(ii) φ が concave なら $\varphi(x+y)+\varphi(0)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$, $\forall x,\forall y\in[0,\infty)$.

(i) のヒント : $x+y>0$ と仮定してよい。この時、$\varphi(x)\leq\frac{y}{x+y}\varphi(0)+\frac{x}{x+y}\varphi(x+y)$. また、同様の式が x, y を入れ替えても成立。

余談 : $\varphi(x)=x^p$ は $1\leq p$, $0<p\leq 1$ に応じて (i), (ii) の例になる。

(7.5.94-1)

[174] 下半連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について次を示せ ;

$$f \text{ が convex} \iff f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,\forall y\in\mathbb{R}.$$

(3.16.92-1)

[175] $f:\mathbb{R}\to(-\infty,\infty]$, $(f\not\equiv\infty)$ に対し、$f^*(x)=\sup\{tx-f(t);\ t\in\mathbb{R}\}$ とおく。次を示せ : (i) f^* は下半連続かつ convex 。(ii) $(f^*)^*\leq f$. (iii)f が下半連続なら、「f が convex $\iff$ $(f^*)^*=f$」

(2.6.92-6)

[176] $I=(a,b)$ $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$, $f,f_n:I\to\mathbb{R}$ は convex かつ f_n は I 上 f に各点収束するとする．以下を示せ :
(i) $D^-f(x)\leq\varliminf_{n\to\infty}D^-f_n(x)\leq\varlimsup_{n\to\infty}D^+f_n(x)\leq D^+f(x)$, $\forall x\in I$ ([168] 参照).
(ii) $x_0\in I$ において f,f_n $(n\geq 1)$ が全て可微分なら $\lim_{n\to\infty}f_n'(x_0)=f'(x_0)$.

(9.6.92-2)

[177] 問題 [165] の 凸-関数列への応用 ;
$I=(a,b)$ $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$ とする．以下を示せ ; (i) 凸-関数列 $f_n:I\to\mathbb{R}$ $(n=1,2,\cdots)$ が I の或る稠密部分集合上で各点収束しているなら，I に含まれる任意の閉区間上同程度連続である。(ii) (i) の $f_n:I\to\mathbb{R}$ $(n=1,2,\cdots)$ は I 上、局所一様収束する。(iii) 凸-関数

列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が I 上一様有界（i.e., $\sup_n \sup_{x \in I} |f_n(x)| < \infty$）なら $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は I 上で局所一様収束する部分列を含む。

(9.6.92-1)

[178] $f : (a, b) \to (0, \infty)$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ に対して $x \mapsto \log f(x)$ が convex であるとき、f を log-convex であるという。以下を示せ；(i) f, g が log-convex $\Rightarrow$ $f + g$ も log-convex. (ii) Gamma-function $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ は log-convex. (iii) log-convex function $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ であって関数方程式；

$$f(x + 1) = xf(x), \quad f(1) = 1$$

をみたすものは Gamma-function に限る。

(2.6.92-7)

[179] 位相群 G に対して、$\widehat{G}$ を G から $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ への連続な準同型写像全体とし、$\widehat{G}$ を積：$(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(f, g \in \widehat{G})$ についての群とみる。このとき、次の群の同型を示せ。(i) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, (ii) $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$, (iii) $\widehat{\mathbb{Z}} \cong S^1$.

(2.12.92-3)

[180] X を完備距離空間とする。$A \subset X$ が孤立点を持たないとき $\sharp(\overline{A}) \ge \sharp(\mathbb{R})$ を示せ。

(11.18.94-1)

[181] 平面 $\mathbb{R}^2$ は互いに交わらない円周達（1 点は含まない）によって覆い尽くす事は出来ない。

(12.16.91-1)

[182] 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ は互いに交わらない円周達（1 点は含まない）によって覆い尽くす事が出来る。

(12.23.91-1)

[183] 写像の族が生成する位相、その例としての局所凸位相：
(i) 集合 X と写像の族 $\mathcal{Q} = \{q_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ が与えられているとする；但し I は任意の集合、各 X_i は位相 (=開集合族) $\mathcal{O}_i$ を持つとする。X の位相 $\mathcal{O}$ であって開基底

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} q_i^{-1}(O_i)\ ;\ \ J \text{ は } I \text{ の有限部分集合、} O_i \in \mathcal{O}_i. \right\}$$

を持つものを $\mathcal{Q}$ によって生成される位相という。$\mathcal{O}$ について次を示せ；

(a) $\mathcal{O}$ は $\mathcal{Q}$ の元を全て連続とする位相の中で最も粗い。

(b) 次の条件が満たされれば $\mathcal{O}$ は Hausdorff; 任意の $x \ne y$ に対し $q_i(x) \ne q_i(y)$ となる $i \in I$ が存在する。

(ii) $\mathbf{K}$(=$\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) 上ベクトル空間 X と semi-norm の族 $\mathcal{Q} = \{q_i : X \to [0, \infty)\}_{i \in I}$ が与えられているとする；但し I は任意の集合。(i) の意味で $\mathcal{Q}$ によって生成される X の位相 $\mathcal{O}$ を「$\mathcal{Q}$ を定義 semi-norm 系とする局所凸位相」という。$\mathcal{O}$ について次を示せ；

(c) $\mathcal{O}$ は $\mathcal{Q}$ の元を全て連続とする位相の中で最も粗い。

(d) 「$(x,y) \in X^2 \mapsto x+y \in X$」, 「$(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times X \mapsto \lambda x \in X$」は共に連続。

(e) Semi-norm $q : X \to [0,\infty)$ について

$$q \text{ が連続} \iff \begin{array}{l} C \in (0,\infty)\text{ , 有限集合 } J \subset I \text{ が存在して} \\ q(x) \le C \max_{j\in J} q_i(x) \quad \forall x \in X. \end{array}$$

(f) 次の条件が満たされれば $\mathcal{O}$ は Hausdorff; 任意の $x \neq 0$ に対し $q_i(x) \neq 0$ となる $i \in I$ が存在する。

(2.5.97-1)

[184] 位相空間 X の部分集合 S が次の性質をもつとき**第２類** (of the second category) である言う；S の閉集合列 $M_{n n=1}^{\infty}$ が $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ を満たすならば $\exists n \ge 1$, $(M_n)^\circ \neq \phi$.

完備距離空間 X は 第２類である。これを示せ。

ヒント；次の順序で考える。(i) 次を示す；一般に完備距離空間 X において、空でない閉集合の減少列 $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ が $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(B_n) = 0$ を満たせば $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \phi$. (ii) M_n は閉, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 更に $\forall n \ge 1$ で $M_n^\circ = \phi$ と 仮定する。このとき、開球の減少列 $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ を $\forall n$ で $\overline{B_n} \cap M_n = \phi$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(B_n) = 0$ となるものが存在することを示す。そうすれば、(i) より、$\phi \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^c = X^c$ となり矛盾。

(12.26.91-1)

[185] Fréchet 空間 X 上の下半連続な semi-norm $q : X \to [0,\infty)$ は連続であることを示せ。

ヒント；$M_n = \{z \in X\ ;\ q(z) \le n\}$ とおいて次の順序で議論を進める；

(i) $n \ge 1$, $x \in X$, 及び $0 \in X$ の近傍 U が存在して $x + U \subset M_n$.

(ii) $U \subset \{y - z\ ;\ y \in U,\ z \in U\} \subset M_{2n}$.

(12.27.91-2)

[186] E を Banach space , F をノルム空間、また $T \in \mathcal{L}(E;F)$ とする。次を示せ；

(i) T が開写像 $\iff 0 \in E$ の任意の近傍 U に対して $(\overline{TU})^\circ \neq \phi$.

(ii) $\mathrm{Ran}(T)$ が第２類 $\Rightarrow T$ は開写像。

(iii) E, F が共に Banach space で、$T \in \mathcal{L}(E,F)$ が全単射 $\Rightarrow T^{-1}$ は連続。

(2.10.92-1)

[187] 局所 compact な Hausdorff 空間は第２類である、これを示せ。

ヒント；次の順序で考える。(i) 次を示す；Hausdorff 空間の空でない compact 集合の減少列 $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ は必ず $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \phi$ を満たす。(ii) M_n は閉, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 更に $\forall n \ge 1$ で $M_n^\circ = \phi$ と 仮定する。このとき、開集合の減少列 $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ を $\forall n$ で $\overline{B_n}$

は compact かつ $\overline{B_n} \cap M_n = \phi$ となるものが存在することを示す。そうすれば、(i) より、$\phi \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^c = X^c$ となり矛盾。

(1.21.91-1)

[188] X, Y を位相群、また $T : X \to Y$ は代数的準同型とする。次を示せ；

(i) T が開写像 $\Longleftrightarrow$ X における原点の任意の近傍 U に対して $(TU)^\circ \neq \phi$.

(ii) X を可算開基をもつ局所 compact な Hausdorff 位相群, Y を局所 compact な Hausdorff 位相群とする。T が連続かつ全射なら開写像である。

(1.21.92-2)

[189] X は Hausdorff 位相空間、集合 I は次の性質を満たす半順序 "$\prec$" を備えているとする；

$$\forall\{\alpha, \beta\} \subset I,\ \exists\gamma \in I,\ \alpha \prec \gamma \,\&\, \beta \prec \gamma.$$

このとき、net: $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset X$ について次の (a), (b) は同値であることを示せ；

(a) $\lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha = x$.

(b) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ が「$a_n \prec a_{n+1}$, for all $n \geq 1$」 かつ「$\forall\alpha \in I, \exists n_0 \geq 1,\ \alpha \prec \alpha_n$, for $n \geq n_0$」を満たせば $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_n} = x$.

コメント；$I \subset \mathbb{R}$, または I が集合 S の（有限）部分集合全体からなる集合なら上に述べた条件が満たされる。(a),(b) の同値性はそのような場合の net の収束は点列の収束に置き換えられることを言っている。

(1.31.97-1)

[190] $D \subset \mathbb{C}$ を領域、$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ を正則とする。以下を示せ；
(i) $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial u(z)}{\partial x} & \frac{\partial u(z)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(z)}{\partial x} & \frac{\partial v(z)}{\partial y} \end{pmatrix} = |f'(z)|^2$, 但し u, v は f の実部, 虚部 また x, y は z の実部, 虚部を表わす。(ii) f の像 $\{f(z) \mid z \in D\}$ が $\mathbb{C}$ の開集合を含まないならば f は定数関数である。

(12.15.97-1)

[191] $n \in \{0, 1, \ldots\}$, $R > 0$ とし、正則関数 $f : \{z \in \mathbb{C}; |z| > R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ は次を満たすと仮定する；$\sup\limits_{|z|>R} (1 + |z|)^{-n}|f(z)| < \infty$. 以下を示せ；(i) $\lim\limits_{|z|\to\infty} f^{(n+1)}(z) = 0$. (ii) 特に f が整関数なら、f は高々 n 次の多項式である (Liouville の定理の一般化)。

(i) のヒント；$|z| > 2R$, $r(z) = |z| - 2R$ とすると、$|f^{(n+1)}(z)| \leq \int_0^1 \frac{|f(z+r(z)e^{2\pi \mathrm{i}\theta})|}{r(z)^{n+1}} d\theta$.

(11.14.97-1)

[192] D を $\mathbb{C}$ の領域で原点を含むもの、$f : D\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ は正則とする。このとき、次の (a), (b) は同値であることを示せ；(a) 原点 0 は f の除去可能特異点である, (b) 原点 0 は f' の除去可能特異点である。

(b) $\Rightarrow$ (a) のヒント : (b) を仮定すると十分小さい r に対し $M(r) := \sup_{0<|z|<r} |f'(z)| < \infty$. 従って D 内の点列 $z_n \to 0$, $|z_n| < r$ に対し $|f(z_n) - f(z_m)| \leq M(r)|z_n - z_m|$.

(12.5.97-2)

[193] $n \geq 0$, $0 < R < \infty$ する。正則関数 $f : \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ について次を示せ;

$$\text{原点 } 0 \text{ は } f \text{ の } n \text{ 位の極である。} \iff \begin{array}{c} \text{十分小さい } r > 0 \text{ に対し} \\ 0 < \inf_{|z|<r} |z^n f(z)| \leq \sup_{|z|<r} |z^n f(z)| < \infty. \end{array}$$

(12.8.97-1)

[194] $1 \leq p < \infty$,$R > 0$ とする。正則関数 $f : \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ に対し

$$\|f\|_p = \left(\int_{0<x^2+y^2<R^2} |f(x+\mathbf{i}y)|^p dxdy\right)^{1/p}$$

とするとき以下を示せ;(i) $\sup_{|z|<R/2} |z|^{2/p}|f(z)| \leq C\|f\|_p$, 但し C は f に無関係な正数。(ii) $\|f\|_1 < \infty$ ならば、原点 0 は f の高々1位の極である。(iii) $\|f\|_2 < \infty$ ならば、原点 0 は f の除去可能特異点である。

(i) のヒント; $r < |z| < R/2$ とすると、

$$\begin{aligned} |f(z)|^p &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{\mathbf{i}\theta})|d\theta\right)^p \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{\mathbf{i}\theta})|^p d\theta, \\ \frac{1}{2}|z|^2|f(z)|^p &\leq \int_0^{|z|} rdr \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{\mathbf{i}\theta})|^p d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

(ii) のヒント;(i) の結果と問題 [193] より原点 0 は f の高々2位の極であることが出る。ところが2位の極であると仮定すると再び問題 [193] より $\|f\|_1 = \infty$.

(12.5.97-1)

[195] D を $\mathbb{C}$ の領域で原点 0 を含むもの、また原点 0 は正則関数 $f : D \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ の1次の極とする。$0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 2\pi$, $\Gamma(r) = \{r\exp(i\theta) \mid \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$ とするとき、$\lim_{r\searrow 0}\int_{\Gamma(r)} f(z)dz = (\theta_1 - \theta_0)\mathrm{Res}(f, 0)$ を示せ、但し $\mathrm{Res}(f, 0)$ は f の 0 における留数をあらわす。

(8.18.98-1)

[196] 留数定理の応用として次を示せ;

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta P_r(\theta)\exp(in\theta) = \begin{cases} r^{|n|} & \text{if } 0 < r < 1, \\ r^{-|n|} & \text{if } 1 < r < \infty. \end{cases} \tag{0.9}$$

但し $n \in \mathbb{Z}$, $P_r(\theta) = |r^2 - 1|/|r\exp(i\theta) - 1|^2$.

ヒント: $P_r(\theta) = P_{1/r}(-\theta)$ なので例えば $0 < r < 1$ のときのみ計算すれば、$1 < r < \infty$ の場合も変数変換を通じて分る。

余談: $0 < r < 1$ の場合の $P_r(\theta)$ は単位円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ に対する Poisson 核 と呼ばれる関数。問題の等式 (0.9) は Poisson 核 を Fourier 級数に展開したときの係数。その意味では (0.9) の証明自体は $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\exp(in\theta) = P_r(\theta)$ を示した上で Fourier 級数に対する係数の一意性を用いても出来る。

(8.18.98-2)

[197] $t \in \mathbb{R}, a \in (0,\infty)$ とする。留数定理の応用として $(a/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)dx}{a^2+x^2} = \exp(-a|t|)$ を示せ。

(8.18.98-3)

[198] $s \in (0,1)$ に対し次を示せ；

$$\int_0^1 dt t^{-s}(1-t)^{s-1} = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{1+x} = \pi/\sin(\pi s).$$

ヒント：最初の等号は変数変換：$t = 1/(1+x)$ で分る。次の等号は $\frac{z^s}{z(1+z)}$ に留数定理を用いて示せ。

余談：示すべき等式左辺は Beta-関数の記号で $B(1-s,s)$, 更に Gamma-関数を用いると $\Gamma(1-s)\Gamma(s)$ となる。$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \pi/\sin(\pi s)$ は「相補公式」として有名。

(8.18.98-4)

[199] 問題 [165] の正則関数列への応用（**Montel の定理**）; D を $\mathbb{C}$ 内の領域、$\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(D) :=$ D 上の正則関数全体, 更に任意の compact set $K \subset D$ に対し

$$\sup\{|f(z)| \ : \ f \in \mathcal{F},\ z \in K\} < \infty \tag{0.10}$$

を仮定する。次を示せ；(i) $\mathcal{F}$ は同程度連続。(ii)$\mathcal{F}$ の任意の無限部分集合は局所一様収束する部分列を含む。

余談：$\mathcal{F} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ という場合、Montel の定理は条件 (0.10) のもとで局所一様収束部分列の存在を保証するが、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自体の局所一様収束を言ってはいない。これについては Vitali の定理（問題 [200]）を参照。

(7.11.97-2)

[200] **Vitali の定理**；D を $\mathbb{C}$ 内の領域、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Hol}(D)(:= D$ 上の正則関数全体$)$ とし、更に次の 2 つを仮定する；

(a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列は局所一様収束する部分列を含む。

(b) 集合 $L = \{z \in D;\ \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ が存在$\}$ が D 内に集積点をもつ。

このとき、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は或る $f \in \mathrm{Hol}(D)$ に局所一様収束することを示せ。ヒント；任意の局所一様収束部分列の極限が同じ関数であることを示せばよい。そのために一致の定理を用いよ。

(7.11.97-3)

[201] D を $\mathbb{C}$ 内の領域、$f_n \in \mathrm{Hol}(D) :=$ D 上の正則関数全体 $(n = 1,2,\ldots)$, $f : D \to \mathbb{C}$ とする。次を示せ；$f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ (局所一様収束) ならば、$f \in \mathrm{Hol}(D)$ かつ $\forall k = 0,1,\ldots$ に対し、$\frac{d^k f_n}{dz^k} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d^k f}{dz^k}$ (局所一様収束).

(7.11.97-1)

[202] X を集合、2^X をその部分集合全体、$\mathcal{A} \subset 2^X$、更に $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-field を $\sigma[\mathcal{A}]$ とする。$\mathcal{A}$ が有限集合なら $\sigma[\mathcal{A}]$ もそうであることを示せ。

ヒント；X が部分集合 $B_1,\ldots,B_m$ の disjoint union なら、$\sigma[\{B_j\}_{j=1}^m]$ は高々 2^m 個の集合しか含まない。そこで、そのような $B_1,\ldots,B_m$ を適当にとって $\sigma[\mathcal{A}]=\sigma[\{B_j\}_{j=1}^m]$ とできることを示す。

(10.26.91-3)

[203] 次の命題に反例を与えよ；「$\mathcal{F}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ は集合 X の σ-field で単調増大 ($\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots$) ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ は σ-field である。」

(11.5.91-2)

[204] 可算開基底をもつ局所 compact 位相空間の Borel field について；

X は局所 compact 位相空間で可算開基底をもつとする。以下を示せ；(i) Compact closure をもつ開集合列 $(U_n)_{n\geq 1}$ で次を満たすものが存在する；$\overline{U_n}\subset U_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots.)$, $\cup_{n=1}^{\infty}U_n=X$. (ii) $\mathcal{O}$=X の開集合全体, $\mathcal{F}$=X の閉集合全体, $\mathcal{K}$=X の compact 集合全体とするとき、$\sigma[\mathcal{O}]=\sigma[\mathcal{F}]\subset\sigma[\mathcal{K}]$. (iii) 特に X が Hausdorff (従って $\mathcal{K}\subset\mathcal{F}$) なら $\sigma[\mathcal{O}]=\sigma[\mathcal{F}]=\sigma[\mathcal{K}]$.

余談：$\sigma[\mathcal{O}]$ は X の Borel field と呼ばれ、可測空間 $(X,\sigma[\mathcal{O}])$ が位相空間 上の測度論の舞台となる。

(4.4.92-4)

[205] X を集合、2^X をその部分集合全体とする。$\mathcal{D}\subset 2^X$ であって次の (a)–(c) を満たすものを Dynkin class という；

(a) $X\in\mathcal{D}$.

(b) $\{A,B\}\subset\mathcal{D}$, $A\subset B\Rightarrow B\cap A^{\mathrm{c}}\in\mathcal{D}$.

(c) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}$, $A_n\subset A_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)\Rightarrow\cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}$.

Dynkin class $\mathcal{D}\subset 2^X$ が intersection で閉じている (i.e., $\{A,B\}\subset\mathcal{D}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{D}$) ならば $\mathcal{D}$ は σ-field であることを示せ。

(2.6.97-1)

[206] Dynkin 族定理；

X を集合、2^X をその部分集合全体、$\mathcal{S}\subset 2^X$ とする。以下を示せ；(i) 集合族:$\sigma[\mathcal{S}]=\bigcap\mathcal{B}$ ($\cap$ は X の σ-field $\mathcal{B}$ で $\mathcal{S}$ を含むもの全ての intersection) は $\mathcal{S}$ を含む最小の σ-field である。(ii) 集合族:$\delta[\mathcal{S}]=\bigcap\mathcal{D}$ ($\cap$ は Dyikin class $\mathcal{D}$ で $\mathcal{S}$ を含むもの全ての intersection) は $\mathcal{S}$ を含む最小の Dynkin class である。(iii) $\mathcal{S}$ が intersection で閉じている (i.e., $\{A,B\}\subset\mathcal{S}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{S}$) ならば $\delta[\mathcal{S}]$ もそうである（従って [205] により $\delta[\mathcal{S}]$ は σ-field である）。(iv) **Dynkin class theorem** ; $\mathcal{S}$ が intersection で閉じているならば $\delta[\mathcal{S}]=\sigma[\mathcal{S}]$.

(2.6.97-2)

[207] Dynkin class theorem ([206]-(iv)) の応用; X を集合、2^X をその部分集合全体、$\mathcal{S}\subset 2^X$ とする。可測空間 $(X,\sigma[\mathcal{S}])$ 上の 2 つの測度 μ,ν 　について、が次言えるか否かを問題とする。

$$(*)\qquad \forall S\in\mathcal{S},\ \mu(S)=\nu(S)\Rightarrow\mu=\nu$$

(i) 次の条件を仮定して $(*)$ を示せ。

(a) $S_1, S_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow S_1 \cap S_1 \in \mathcal{S}$.

(b) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$.

ヒント；集合族 $\{E \in \sigma[\mathcal{S}];\ \mu(E) = \nu(E)\}$ は Dynkin class.

(ii) 条件 (**a**) 及び次の条件 (**c**) を仮定して $(*)$ を示せ。

(c) $\mathcal{S}$ の 増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ であって、$\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n = 1, 2, \cdots,)$ $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ なるものが存在。

(7.4.92-1)

[208] (i) 集合 A, B の**対称差** $A \triangle B$ を $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ と定義する。以下を示せ；$\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \triangle \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcup_{j\in J} (A_j \triangle B_j)$, 但し添字集合 J は任意である。(ii) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を有限測度空間、$\mathcal{A}$ を有限加法族で $\mathcal{B}$ に含まれるものとする。このとき $B \in \sigma[\mathcal{A}]$ について、

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } \mu(A \triangle B) < \varepsilon \text{ なる } A \in \mathcal{A} \text{ が存在する} \tag{0.11}$$

ヒント：$\widetilde{\mathcal{A}} = \{B \in \mathcal{B} \mid (0.11)$ が成立$\}$. とおいて $\widetilde{\mathcal{A}}$ が σ-field であることを示す。そこから $\sigma[\mathcal{A}] \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ を結論せよ。

(5.14.98-1)

[209] $\mathcal{O}$=$\mathbb{R}^n$ の開集合全体, $\mathcal{F}$=$\mathbb{R}^n$ の閉集合全体, $\mathcal{K}$=$\mathbb{R}^n$ の compact 集合全体、更に $\mathcal{I}, \mathcal{E}$, を、

$\mathcal{I}$: $\mathbb{R}^n$ の区間全体（ここでは I が区間 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I は $\prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$ の形、ただし $b_j = \infty$ なら $(a_j, b_j] = (a_j, \infty)$.）

$\mathcal{E}$: 有限個の区間の直和として表せる集合全体

とする。次を示せ；$\sigma[\mathcal{I}] = \sigma[\mathcal{E}] = \sigma[\mathcal{O}] = \sigma[\mathcal{F}] = \sigma[\mathcal{K}]$

(2.7.97-1)

[210] μ, ν を $\mathbb{R}^n$ 上の Borel 測度とし、$\mathcal{I}, \mathcal{E}$ は問題 [209] の通りとする。以下を示せ。(i)「任意の有界な区間 I に対し $\mu(I) = \nu(I) < \infty$」を仮定すると $\mu = \nu$. (ii) Borel-可測集合 B が $\mu(B) < \infty$ を満たすなら任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$ なる $A \in \mathcal{E}$ が存在する。ヒント： 問題 [207], [208] を使え。

(5.18.00-1)

[211] 以下の事柄を明快かつ簡潔に説明せよ；(i):E.Hopf の拡張定理, (ii):測度空間の完備化, (iii):Lebesgue 可測集合, (iv)Lebesgue 測度.

(6.12.92-1)

[212]

X : 可分な距離空間; dense countable subset $S \subset X$ が存在
μ : X 上の Borel measure
U : X の開集合で $\mu(U) < \infty$ 　なるもの

とするとき以下を示せ；

(i) 任意の $n = 1, 2, \ldots$ に対し、$U = \displaystyle\bigcup_{(x,m)\in I(n)} B(x; 1/m)$. 但し

$$B(x; r) = \{y \in X; \ \ |x, y|_X \le r\}$$
$$I(n) = \{(x, m); \ \ x \in S, \ m \in \mathbb{N}^* \ m \ge n, \ U \supset B(x; 1/m)\}.$$

(ii) $I(n)$ の有限部分集合の単調増大列 $I(n, k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を $I(n) = \cup_{k=1}^{\infty} I(n, k)$ なるように選ぶとき、

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \ge 1, \exists l_n \ge 1,$$
$$\mu(U) < \mu\left(\bigcup_{(x,m)\in I(n,l_n)} B(x; 1/m)\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

(iii) (ii) で $K_\varepsilon = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{(x,n)\in I(n,l_n)} B(x; 1/m)$ とおくと、K_ε は全有界な閉集合で、$K_\varepsilon \subset U$, $\mu(U \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たす。

注意：X が完備なら K_ε は compact.

(5.15.92-1)

[213] X を位相空間、μ を X 上の Borel measure とする。Borel set $E \subset X$ についての性質；

(R_0)

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(G); \ \ G \text{ は } E \text{ を含む開集合}\} \\ &= \sup\{\mu(F); \ \ F \text{ は } E \text{ に含まれる閉集合}\} \end{aligned}$$

(R_1)

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(G); \ \ G \text{ は } E \text{ を含む開集合}\} \\ &= \sup\{\mu(K); \ \ K \text{ は } E \text{ に含まれる compact set}\} \end{aligned}$$

(i) μ を finite Borel measure とするとき、集合族：

$$\mathcal{R} = \{E; X \text{ の Borel subset で性質 } (R_0) \text{ をみたす} \quad \}$$

は σ-algebra であることを示せ。

(ii) X を可分距離空間、μ を X 上の finite Borel measure とするとき、任意の Borel set E は性質 (R_0) をもつ。更に、X が完備なら、任意の Borel set E は性質 (R_1) をもつ。

(5.16.92-1)

[214] $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ は Lebesgue-可測かつ任意の有界可測集合の上で可積分とする。次を示せ；

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = 0,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\to[0,\infty))\quad\Rightarrow\quad f=0,\quad a.e.$$

ヒント；次の (i), (ii) を利用して、任意の有界可測集合 E に対して $\int_E f=0$ を示せ；(i) $\forall n=1,2,\cdots$ に対して 閉集合 $K_n\subset E$, 有界な開集合 $G_n\supset E$ で、$G_n\backslash K_n$ の Lebesgue measure $<1/n$ となるものが存在する（証明不要）。(ii) $\varphi_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}\to[0,1])$ で K_n 上で $\equiv 1$、G_n 上では $\equiv 0$ なるものが存在 (cf. [101])。

(4.13.93-1)

[215] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間, f を X 上の非負可測関数とする.
(i) 次を示せ：$f\in L^1(\mu)\ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} t\mu(x\,;\ f(x)>t)=0.$
(ii) (i) の逆は真か？もしそうなら証明，さもなくば反例を述べよ.
(8.8.18-1)

[216] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、g を X 上の非負可積分関数、$\{f_n\}_{n\ge1}$ を実数値可測関数列とする。次を示せ；(i) $-g\le f_n\le f_{n+1},\ \forall n$ なら $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n dm=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n dm$. (**Monotone convergence theorem**). (ii) $-g\le f_n,\quad \forall n$ なら $\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n dm\le \varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n dm$. (**Fatou's lemma**). (iii) 条件；**(a)** $\sup_{n\ge1}|f_n|\le g$, m-$a.e.$, **(b)** $\lim_{n\to\infty} f_n=f$, m-$a.e.$ を仮定すれば $\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|dm=0$. (**優収束定理**) (iv); (iii) は f_n が複素数値でも成立する。(v); (iii) の仮定 **(a)** を「 $\sup_{n\ge1}\int_X|f_n|dm<\infty$ 」におきかえても結論は 正しいか？

(11.18.91)

[217] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、f,g, f_n,g_n, は実数値可測関数 $(n\ge1)$、$g_n\ge0$, $g\ge0$, $g_n,g\in L^1(m)$, $g_n\to g$, m-a.e. とする。以下を示せ。
(i) $-g_n\le f_n$ $(n\ge1)$ なら、$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n dm\le\varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n dm.$
(ii) $f_n\to f$, m-a.e. $|f_n|\le g_n$ $(n\ge1)$ なら、$\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|dm=0.$
(8.02.06)

[218] 優収束定理 [216] の応用例 ：次を示せ:
$x>0$ なら $\int_x^\infty \exp(-\frac{t^2}{2})dt=x^{-1}\exp(-\frac{x^2}{2})\int_0^\infty\exp(-\frac{t^2}{2x^2}-t)\le x^{-1}\exp(-\frac{x^2}{2})$, 更に

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^\infty\exp(-t^2/2)dt}{x^{-1}\exp(-x^2/2)}=1.$$

(8.24.99-1)

[219] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間, $f,g\to\mathbb{C}$ を可測, $|g|<1$, m-a.e. とする。等式:

$(*)$ $\int_X \frac{fg}{1-g}\,dm=\sum_{n\ge1}\int_X fg^n\,dm$

の成立如何に関し、以下を示せ：
(i) 等式：$\int_X\frac{|fg|}{1-|g|}\,dm=\sum_{n\ge1}\int_X|f||g|^n\,dm$ は、両辺が ∞ の場合も含めて無条件に成立する。
(ii) (i) の等式の、左辺または右辺が（従って両辺ともに）有限なら、$(*)$ が成立する。
$(*)$ のより具体的な例については [220] を参照せよ。

(5.10.06-1)

[220] [219] の結果から以下の等式を導け：

(i) $p>1$ に対し $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x-1}\,dx$.

(ii) $y\in\mathbb{R}$ に対し $\sum_{n\geq 1}\frac{y}{y^2+n^2}=\int_0^\infty \frac{\sin xy}{e^x-1}\,dx$.

(5.10.06-2)

[221] 優収束定理 [216] の応用例 ：

Stirling の公式: $\lim_{s\to\infty}\dfrac{\Gamma(s+1)}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}=\sqrt{2\pi}$ を次の (i)–(iii) を経由して示せ；

(i) $\Gamma(s+1)=s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\int_{-\sqrt{s}}^\infty f_{\sqrt{s}}(x)dx$, 但し $f_t(x)=\left(1+\frac{x}{t}\right)^{t^2}e^{-tx}$, $(t>0,\ -t<x\ )$.

(ii) 全ての $x\in\mathbb{R}$ に対し $f_t(x)\to e^{-x^2/2}$ $(t\to\infty)$.

(iii) $t\mapsto f_t(x)$ は $x>0$ なら単調減少、$x<0$ なら単調増加である。

ヒント： (ii), (iii) では $g_t(x)=\log f_t(x)$ を利用するとよい。例えば、$x\mapsto\frac{\partial}{\partial t}g_t(x)$ が単調減少かつ $\frac{\partial}{\partial t}g_t(0)=0$ を示すことにより (iii) が分る。(7.22.06)

[222] 優収束定理 [216] の一般化

$(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、$0<p<\infty$ とする。可測関数 f, f_n $(n=1,2,\cdots)$ に

$$f_n\to f, m\text{-}a.e.\ \ 及び\ \ \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_X|f_n|^p dm\leq\int_X|f|^p dm<\infty$$

を仮定して次を示せ；$\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|^p dm=0$.

ヒント；関数 $g_n(x)=2^p(|f|^p+|f_n|^p)-|f-f_n|^p$ が非負値であることに注意すると Fatou の Lemma より

$$\int\underline{\lim_{n\to\infty}}\,g_n dm\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\int g_n dm$$

であるが、上式両辺をよく見れば結果が見える。

(10.26.91-5)

[223] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、f, f_n $(n=1,2,\cdots)$ を複素数値可測関数とする。次を示せ；

(i) $\|f_1+f_2\|\leq\|f_1\|+\|f_2\|$, 但し $\|f\|=\int\frac{|f|}{1+|f|}dm\in[0,\infty]$.

(ii) 任意の $\delta>0$ に対し、$\frac{\delta}{1+\delta}m(|f|\geq\delta)\leq\|f\|\leq\frac{\delta}{1+\delta}m(X)+m(|f|\geq\delta)$.

(iii) $\|f_n\|\overset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow f_n\overset{n\to\infty}{\to}0$ (測度収束)

(iv) $m(X)<\infty$ のとき「$f_n\overset{n\to\infty}{\to}0$, m-a.e. $\Rightarrow\|f_n\|\overset{n\to\infty}{\to}0\iff f_n\overset{n\to\infty}{\to}0$ (測度収束)」.

(v) $m(X)=\infty$ のとき「$f_n\overset{n\to\infty}{\to}0$, m-a.e. $\not\Rightarrow f_n\overset{n\to\infty}{\to}0$ (測度収束).」(例示せよ)

(11.7.96-1)

[224] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、$m(X)<\infty$, $f_n\in L^1(m)$, 更に $f_n\leq M<\infty$ (M は定数), $\lim_n\mu(f_n\geq\delta)=0$ $(\forall\delta>0)$, $\underline{\lim}_n\int f_n dm\geq 0$ なら、$\lim_n\int|f_n|dm=0$ であることを示せ。

(4.26.07)

[225] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、$A_n\in\mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ とする。次を示せ；

(i) $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \iff x$ は無限個の A_n に含まれる

(ii) **Borel-Cantelli Lemma;** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty \Rightarrow m(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0.$

(5.17.95-1)

[226] （ Borel-Cantelli Lemma ([225]) の応用）

測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ 上の可測関数 f,f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ について以下を示せ；

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m(x;\ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon) < \infty,\ \forall\varepsilon > 0 \quad\Rightarrow\quad f_n \to f,\ \ m$-a.e..

(ii) $f_n \to f;\ m$-測度収束 $\Rightarrow$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は m-*a.e.* で f に収束する部分列を含む。

(7.8.92-1)

[227] 第２ **Borel-Cantelli Lemma**; $(X, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とし、集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ は独立事象系とする、即ち任意の有限個 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ に対し $m\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} m(A_j)$. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ に対し次を示せ；

$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty, \\ 1 & \text{if } \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty. \end{cases}$$

余談：上の結果から、事象 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ の確率は 0 か 1 という両極端の値しかとり得ない。実はこれは「 Kolmogorov の 0-1 law 」と呼ばれる定理の特別な場合。

(3.4.92-2)

[228] 測度空間 $(X, \mathcal{M}, m)$ 上の複素数値可測関数 f に対し、

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p dm\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \inf\{\lambda \in \mathbb{R}; m(x;\ |f(x)| \ge \lambda) > 0\}, & p = \infty \end{cases}$$

と置く（$\|f\|_p = \infty$ も許す）。次の事柄は既知とする；

(a) Hölder の不等式（$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ）、三角不等式（ $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ ）.

(b) $L^p(m) = \{f \to \mathbb{C};$ 可測で $\|f\|_p < \infty\}$ は（m-*a.e.* に一致する元を同一視することにより、）ノルム $\|\cdot\|_p$ について Banach space.

(c) $L^2(m)$ は内積: $\langle\, f, g\,\rangle = \int_X f\bar{g} dm$ について Hilbert space.

ここから問題； $p \in [1, \infty)$, f,$f_n \in L^p(m)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。

(i) 次を示せ；$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に $L^p(m)$ -収束 $\Rightarrow f_n \to f$ (m-測度収束.)

(ii) 次を例示せよ；$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に $L^p(m)$ -収束 $\quad\not\Rightarrow f_n \to f$, m-*a.e.*.

(7.9.92-1)

[229] $(X, \mathcal{F}, m)$ は確率測度空間とし、$f, g \in L^2(m)$ に対し

$$m(f) = \int_X f dm, \quad m(f; g) = \int_X (f - m(f))(g - m(g))dm$$

と書くことにする。$\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subset L^2(m)$ が条件：「$m(\xi_m; \xi_n) = 0$ if $m \neq n$」を満たすとき以下を示せ；(i) $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ に対し $m(S_n) = \sum_{j=1}^{n} m(\xi_j)$, $m(S_n; S_n) = \sum_{j=1}^{n} m(\xi_j; \xi_j)$.

(ii) S_n が $n \nearrow \infty$ で $L^2(m)$-収束 $\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} m(\xi_j)$, $\sum_{j=1}^{\infty} m(\xi_j; \xi_j)$ が共に収束

(12.27.97-1)

[230] 定数 $K > 0$ が存在して $\forall p \in [1, \infty]$, 及び $\forall f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ に対し $\|f'\|_p \leq K(\|f\|_p + \|f''\|_p)$ を満たすことを示せ。

(5.7.92-1)

[231] ノルム空間 $(E, \|\cdot\|)$ が次の性質をもつとき、$(E, \|\cdot\|)$ は**strictly convex** であるという；

$$x \neq y, \quad \|x\| = \|y\| = 1 \ \Rightarrow \ \|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ に対して (i) $L^1(m)$, $L^\infty(m)$ は一般には strictly convex でないことを例示せよ。(ii) $L^p(m)$ $(1 < p < \infty)$ は strictly convex であることを示せ。

ヒント；次のことに注意せよ；$p \in (1, \infty)$ a, $b \in \mathbb{C}$, $\lambda \in (0, 1)$ に対して

$$|\lambda a + (1-\lambda)b|^p \leq \lambda |a|^p + (1-\lambda)|b|^p$$

等号成立 $\quad \Longleftrightarrow a = b.$

(7.14.92-2)

[232] 測度空間 $(X, \mathcal{M}, m)$ が $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$=Lebesgue 可測集合全体、m=Lebesgue 測度 の場合、$L^p(m) = L^p(\mathbb{R}^n)$ と書くことにする。以下を示せ；(i) $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ は可分である。(ii)$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ は可分ではない。(iii) $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n))$ は可分ではない。

(4.8.92-2)

[233] $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \geq \infty$ に対して $(f * \delta_y)(x) = f(x - y)$ とおく。(i) $p < \infty$ のとき $\lim_{|y|\to 0} \|f * \delta_y - f\|_p = 0$ を示せ。(ii) $p = \infty$ ではどうか？

(2.10.92-4)

[234] 以下の命題は正しいか？(a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$ なら $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0.$

(b) $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ かつ $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ なら $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0.$

(c) $f \in L^1(\mathbb{R})$ が一様連続なら $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0.$

(2.13.92-1)

[235] 測度空間 $(X,\mathcal{B},m)$ 上の可測関数列 f_n $(n=1,2,\cdots)$ に対して次の 3 条件を考えよう ((U_0), (U_1) を満たすとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**一様可積分**であるという)。

(U_0) $\sup\limits_n \int |f_n| dm < \infty$,

(U_1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \sup\limits_n \int |f_n| 1_{\{|f_n|\ge\lambda\}} dm = 0$

(U_1') $\forall\varepsilon > 0$ に対して次のような $\delta > 0$ が存在:

$$\sup\{\textstyle\int_E |f_n| dm;\ E\in\mathcal{B},\ m(E)<\delta\} < \varepsilon, \quad \forall n = 1,2,\cdots.$$

以下を示せ ; (i) $U_1 \ \Rightarrow\ U_1'$. (ii) $U_0, U_1 \iff U_0, U_1'$. (iii) $m(X)<\infty$ なら「$U_0, U_1 \iff U_1$ 」

(4.8.94-2)

[236] 測度空間 $(X,\mathcal{B},m)$ 上の可測関数 f, f_n $(n=1,2,\cdots)$ に対する条件を考えよう（cf.[235]）;

(C_0) $f_n \to f$;m-測度収束,

(C_1) $f\in L^1(m)$, $f_n\to f$;$L^1(m)$-収束,

(U_0) $\sup\limits_n \int |f_n| dm < \infty$,

(U_1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \sup\limits_n \int |f_n| 1_{\{|f_n|\ge\lambda\}} dm = 0$

以下を示せ ; (i) : $C_1 \ \Rightarrow\ C_0, U_0, U_1$. (ii) : (i) の逆は不成立。(iii) $m(X)<\infty$ の場合は、「$C_1 \Leftarrow C_0, U_1$.」

(4.25.92-1)

[237] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間、$f : X\to\mathbb{R}$ は可測とする。以下を示せ ;
i) **Chebyshev の不等式** ; $\varphi : \mathbb{R}\to[0,\infty)$ は非減少とする。$\alpha\in\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)>0$ なら

$$m\left(f\ge\alpha\right) \le \varphi(\alpha)^{-1}\textstyle\int\varphi(f)dm.$$

ii)**Payley-Zygmund の不等式** ; $m(X)=1$ とする。更に $f\in L^2(m)$, $\int f^2 dm>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とする。このとき、$(1-\alpha)\int f dm \ge 0$ ならば

$$m\left(f\ge\alpha\textstyle\int f dm\right) \ge (1-\alpha)^2 \frac{\left(\int f dm\right)^2}{\int f^2 dm}.$$

ヒント : $A=\{f\ \ge\ \alpha\int f dm\}$ とし、$\int f dm = \int_A f dm + \int_{A^c} f dm$ と分解する。更に、$\int_A f dm \le (\int f^2 dm)^{1/2} m(A)^{1/2}$, $\int_{A^c} f dm \le \alpha\int f dm$ である。

(3.22.00-2)

[238] (i) **Jensen の不等式** ; $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間で $\mu(X)=1$ とする。このとき、$\varphi : (a,b)\to\mathbb{R}$ $(-\infty\le a<b\le\infty)$ が convex ならば、任意の $f\in L^1(\mu; X\to(a,b))$ に対して

$$\varphi\left(\textstyle\int_X f d\mu\right) \le \textstyle\int_X \varphi(f) d\mu. \tag{0.12}$$

(ii) φ が strictly convex なら「(0.12) で 等号成立 $\iff$ f は μ-a.e. で定数.」。

(i) のヒント；[171] を思いだす。
(ii) のヒント；「f は μ-$a.e.$ で定数」を否定すると、「$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < \mu(x; f(x) \geq \alpha) < 1$」となる。そこで、$A = \{x; f(x) \geq \alpha\}$ とすると、$\int_X f d\mu = \mu(A)\left(\frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)}\right) + \mu(A^c)\left(\frac{\int_{A^c} f d\mu}{\mu(A^c)}\right)$.

(9.9.92-2)

[239] (i) Fubini の定理を述べよ。(ii) $k, f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し以下を示せ；(a) 積分：$(k*f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)m(dy)$ は $a.e.x$ で定義されて、$x \mapsto k*f(x)$ は Lebesgue-可測。(b) Young の不等式が成立；$\|k*f\|_1 \leq \|k\|_1 \|f\|_1$. (c) $k*f = f*k$. (d) $(k*f)*h = k*(f*h)$.

(6.22.92-2)

[240] $k, h \in L^1(\mathbb{R}^n),\ f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ (1 \leq p \leq \infty)$ に対し以下を示せ；(i) 積分：$(k*f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)m(dy)$ は $a.e.x$ で定義されて、$x \mapsto k*f(x)$ は Lebesgue-可測。(ii) Young の不等式が成立；$\|k*f\|_p \leq \|k\|_1 \|f\|_p$. (iii) $k*f = f*k$. (iv) $(k*f)*h = k*(f*h)$.

(10.28.92-1)

[241] $\lambda,\ \alpha$ を正数とする。次の $\gamma_{\lambda,\alpha} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ をパラメーター $(\lambda,\ \alpha)$ の Γ-分布（の密度関数）という；

$$\gamma_{\lambda,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}/\Gamma(\alpha) & x > 0. \end{cases}$$

関係式「$\gamma_{\lambda,\alpha} * \gamma_{\lambda,\alpha'} = \gamma_{\lambda,\alpha+\alpha'}$」を示せ。

(6.16.94-1)

[242] $(X, \mathcal{B}, m)$, を σ-finite な測度空間、$k : X \to \mathbb{C}$ を $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$-可測関数で、次を満たすとする；

$$\int_X |k(z,y)| m(dz) = \int_X |k(x,z)| m(dz) = c > 0, \quad \forall x, \forall y \in X.$$

このとき、$f \in L^p(m; X \to \mathbb{C})\ (1 \leq p \leq \infty)$ に対し以下を示せ；
(i) 積分：$Kf(x) = \int_X k(x,y)f(y)m(dy)$ は m-$a.e.x$ で定義されて、$x \mapsto Kf(x)$ は $\mathcal{B}$-可測。
(ii) $\|Kf\|_p \leq c\|f\|_p$.

(10.18.92-1)

[243] $(X, \mathcal{B}, m)$, を σ-finite な測度空間、$1 \leq r < \infty$ 、$k : X^2 \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$-可測関数で、次を満たすとする；

$$\int_X |k(z,y)|^r m(dz) = \int_X |k(x,z)|^r m(dz) = c_r > 0, \quad \forall x, \forall y \in X.$$

$f \in L^p(m; X \to \mathbb{C})\ (1 \leq p \leq \infty)$ に対し以下を示せ；(i) 積分：$Kf(x) = \int_X k(x,y)f(y)m(dy)$ は m-$a.e.x$ で定義され、x について $\mathcal{B}$-可測。(ii) $\|Kf\|_q \leq c_r^{1/r}\|f\|_p$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$.

(10.7.92-2)

[244] $k(x,y)$ は $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ についての非負値可測関数で次の条件を満たすとする;

(a) $\forall y \in \mathbb{R}^n$ で　$x \mapsto k(x,y)$ は下半連続、

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^m$ で $\int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)dy = 1$.

このとき、有界可測な $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対して「$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$」は有界連続であることを示せ。

(1.24.92-1)

[245] $(X,\mathcal{B},\mu)$, $(Y,\mathcal{C},\nu)$ を σ-finite な測度空間、F を 直積測度空間 $(X\times Y, \mathcal{B}\otimes\mathcal{C})$ 上の可測関数, $I_F(x) = \int_Y |F(x,y)|\nu(dy)$ とおく。$1 \le p \le \infty$ に対し $\|I_F\|_{L^p(d\mu)} \le \int_Y \|F(\cdot,y)\|_{L^p(d\mu)}\nu(dy)$ を示せ。

(2.6.92-1)

[246] $1 \le p < \infty$ とし、関数空間 $L^p(\mathbf{R},dx)$ の部分集合 Γ に以下の 3 条件を仮定する；

(a) $\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx < \infty$,

(b) $\lim_{r\to\infty}\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|\ge r} |f(x)|^p dx = 0$,

(c) $\lim_{t\to 0}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0$.

このとき、Γ は $L^p(\mathbf{R},dx)$ の相対コンパクト部分集合であることを、以下の方針に従って示そう：

(i) $f \in L^p(\mathbf{R},dx)$, $t > 0$ に対し

$$T_t f(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_x^{x+t} f(y)dy, & |x| \le 1/t, \\ 0 & |x| > 1/t. \end{cases}$$

とおく。各 $t > 0$ に対し集合 $\Gamma_t = \{T_t f \; ; \; f \in \Gamma\}$ は $L^p(\mathbf{R},dx)$ の相対コンパクト部分集合である。このことを、区間 $[-1/t, 1/t]$ 上の連続関数全体の集合に sup norm を与えた関数空間で Ascoli-Arzelà の定理を用いることにより示せ。

(ii) 次を示せ：

$$\lim_{t\to 0}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbf{R}} |T_t f(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

(iii) 小問 (i),(ii) の結果から結論を導け。

(8.8.03-1)

[247] $a_1, ..., a_d > 0$, $p_1, ..., p_d > 0$, $s_d = p_1 + .. + p_d$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が有界かつ Borel 可測とする。このとき、次の等式（ディリクレの積分公式）が成立する：

$$\int_A x_1^{p_1-1}\cdots x_d^{p_d-1} f\left(\frac{x_1}{a_1} + .. + \frac{x_d}{a_d}\right) dx_1\cdots dx_d = a_1^{p_1}\cdots a_d^{p_d}\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_d)}{\Gamma(s_d)}\int_0^1 y^{s_d-1}f(y)dy$$

但し、$A = \{(x_j)_{j=1}^d \in [0,\infty) \; ; \; \frac{x_1}{a_1} + .. + \frac{x_d}{a_d} < 1\}$. これを次の方針で示せ。[方針: $d = 1$ なら容易なので $d-1$ 次元まで正しいとして、d 次元の場合を示す。その際、x_d を固定して、$x_1, ..., x_{d-1}$ についての積分に $d-1$ 次元の結果を用いる。]

(8.19.07)

[248] FKG-不等式；

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が非減少であるとは、条件；

$$x_j\le y_j,\ \forall j=1,\cdots,n\ \Rightarrow\ f(x_1,\cdots,x_n)\le f(y_1,\cdots,y_n)$$

をみたすことである。$f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は非減少、μ_j $(j=1,\cdots,n)$ は $\mathbb{R}$ 上の Borel-確率測度, $\mu=\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ とする。$f,g,fg\in L^1(\mu)$ であるとき、次を示せ；$\int fgd\mu\ge\int fd\mu\int gd\mu$.

(8.27.92-1)

[249] $\mathbb{R}^n$ 上の Borel-測度 μ は

(a) $\forall\varepsilon\in\{-1,+1\}^n$ に対し μ は変換 $x\mapsto(\varepsilon_jx_j)_1^n$ で不変.

(b) $\forall p\in[1,\infty)$ に対し $\int(1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^p\mu(dx)<\infty$.

を満たすとする。次を示せ；$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対し $\int\left(\prod_1^n x_j^{\alpha_j}\right)\mu(dx)\ge0$.

(6.3.97-2)

[250] $\mathbb{C}^n$ 上の Borel-測度 μ は

(a) $\forall\theta\in\mathbb{R}$ に対し μ は変換 $z\mapsto e^{\mathbf{i}\theta}z$ で不変.

(b) $\forall p\in[1,\infty)$ に対し $\int(1+|z_1|+\cdots+|z_n|)^p\mu(dz)<\infty$.

を満たすとする。次を示せ；$\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $\alpha\ne\beta$ ならば $\int\prod_1^n z_j^{\alpha_j}\bar{z}_j^{\beta_j}\mu(dz)=0$.

(6.3.97-1)

[251] $f\in C_c^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{C})$ $(n\ge2)$ に対し $\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{\frac{n}{n-1}}dx\le\prod_{i=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}$. を示せ。

(1.21.92-4)

[252] $(X,\mathcal{B},m)$ を測度空間とし、$f:X\times I\to\mathbb{C}$ $(I=(a,b),\ -\infty<a<b<\infty)$ について次の条件を考える；

(a) $\forall t\in I$ で $f(\cdot,t)$ は可積分。

(b) $\forall x\in X$ で $f(x,\cdot)$ は I 上可微分。

(c) $\int_I dt\int_X\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|m(dx)<\infty$.

(d) ある可積分関数 g が存在して $\sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\le g(x),\quad\forall x\in X$

以下を示せ；(i) 条件 (a),(b) を仮定すれば、f, $\frac{\partial f}{\partial t}$ は $X\times I$ 上可測。(ii) 条件 (a),(b),(c) を仮定すれば、殆んど全ての $t\in I$ に対し $\int_X f(x,t)m(dx)$ は 可微分かつ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_X f(x,t)m(dx)=\int_X\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}m(dx).\tag{0.13}$$

ヒント；Fubini の定理を用いて次式を示す； $a<s<t<b$ に対し

$$\int_X f(x,t)m(dx) - \int_X f(x,s)m(dx) = \int_s^t du \int_X \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} m(dx).$$

(iii) (a),(b),(d) を仮定すれば $\int_X f(x,\cdot)m(dx)$ は可微分かつ (0.13) は $\forall t \in I$ で成立。

(6.22.92-1)

[253] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間で $\mu(X)=1$, また $\varepsilon>0$ とする。可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対し $\int \exp(tf)d\mu < \infty$ を満たすとき、以下を示せ；(i) $\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対し $\int \exp(t|f|)d\mu < \infty$. (ii) $\int \exp(tf)d\mu$ は $t=0$ で無限回微分可能。(iii) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \int \exp(tf)d\mu\Big|_{t=0} = \int f^m d\mu$.

(5.2.97-1)

[254] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間で $\mu(X)=1$, また $\varepsilon>0$, $m \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$ とする。可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対し $\int \exp(tf)d\mu \leq \exp\left(mt + \frac{vt^2}{2}\right)$ を満たすとき、次を示せ；

$$\int f d\mu \leq m, \quad \int \left(f(x) - \int f d\mu\right)^2 \mu(dx) \leq v.$$

(5.2.97-2)

[255] 熱方程式の基本解；

関数：$g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/2t}$ （$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$）を **Gauss** 核という。

$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に属する Borel-可測関数 f に対し convolution；$(g_t * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}^n$ で定義され、$g_t(x)$, $(g_t * f)(x)$ は $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ について C^∞ で熱方程式を満たすことを示せ; $\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ に対し $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right) g_t(x) = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right)(g_t * f)(x) = 0$.

ヒント；$(g_t * f)(x)$ の微分可能性を言う際、次のことを予め注意しておくと見通しがよい；$\alpha \in \mathbb{N}^n$ $m = 0,1,\cdots$ に対し、$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m g_t(x) = (\ x, t^{-1/2}$ の多項式 $)e^{-|x|^2/2t}$.

(9.30.92-1)

[256] Laplace 方程式の基本解；**Green** 核 $U_n : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ を 次のように定義する；

$$U_n(x) = U_n(|x|) = \begin{cases} -|x| & n=1 \\ -(\log|x|)/\pi & n=2 \\ 2|x|^{2-n}/\{(n-2)\omega_{n-1}\} & n \geq 3, \end{cases}$$

ここで、$\omega_{n-1} = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ ($\subset \mathbb{R}^n$ の表面積 cf.[91])。次を示せ；(i) $|\alpha| \geq 1$ なる多重指数 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し、$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha U_n = \frac{x \text{ の } |\alpha| \text{ 次多項式}}{|x|^{n-2+2|\alpha|}}$. また、$\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ に対し $\Delta_x U_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. (ii) 関数：

$$p_y(x) = \frac{2}{\omega_n} \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

を上半空間 $\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の **Poisson** 核という。$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に属する Borel-関数 f に対し convolution $(p_y * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}^n$ で定義されて $p_y(x)$ 及び $(p_y * f)(x)$

は $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ について C^∞ かつ調和であることを示せ; $\left(\Delta_x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p_y(x)=0$, $\left(\Delta_x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(p_y*f)(x)=0$.

ヒント (ii) で (i) の結果が使える；$p_y(x)=-\partial U_{n+1}(x,y)/\partial y$.

(10.4.92-2)

[257] Gauss 核: $g_t(x)\quad(x\in\mathbb{R}^n, t>0, cf.[255])$ と Green 核 U_n (cf.[256]) について次を示せ；

$$U_n(x)=\begin{cases}\int_0^\infty(g_t(x)-g_t(0))dt, & n=1,\\ \int_0^\infty(g_t(x)-g_t((1,0)))dt, & n=2,\\ \int_0^\infty g_t(x)dt, & n\ge 3.\end{cases}$$

(10.15.93.1)

[258] Gauss 核の Laplace 変換; Gauss 核 $g_t(x)=(2\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2t)\quad(x\in\mathbb{R}^n, t>0)$ 及び $b>0$ に対し次式を示そう；

$$\int_0^\infty e^{-bt}g_t(x)dt=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-|x|\sqrt{2b}} & n=1,\\ \frac{1}{2\pi|x|}e^{-|x|\sqrt{2b}} & n=3.\end{cases}\tag{0.14}$$

その為 $a\in\mathbb{R}, b>0$ に対し関数 $f_{a,b}:(0,\infty)\to(0,\infty)$ を $f_{a,b}(r)=\int_0^\infty t^{a-1}\exp\left(-bt-\frac{r^2}{t}\right)dt$ で定義する。以下を示せ;(i) $f_{a,b}(r)$ を定める積分は確定する。(ii) $a>0$ ならば $\lim_{x\to0}f_{a,b}(x)=b^{-a}\Gamma(a)$. (iii) $f_{a,b}(r)=(r^2/b)^a f_{-a,b}(r)$. (iv) $f'_{a,b}(r)=-2(r^{2a-1}/b^{a-1})f_{a-1,b}(r)$, (v) $f_{1/2,b}(r)=\exp(-2r\sqrt{b})\sqrt{\pi/b}$, (vi)$f_{-1/2,b}(r)=\exp(-2r\sqrt{b})\sqrt{\pi}/r$ for $r>0$, (vii) (0.14) が成立。

(10.15.93-2)

[259] δ-関数の近似；

$\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=1$ とする。$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ に対し以下を示せ；

(i) $1\le p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|f*\varphi_\varepsilon-f\|_p=0$.

ヒント；

$$\begin{aligned}|f*\varphi_\varepsilon(x)-f(x)|^p &= \left|f*\varphi_\varepsilon(x)-\int f(x)\varphi_\varepsilon(y)dy\right|^p\\ &\le \left(\int|f(x-y)-f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|dy\right)^p\\ &\le \|\varphi\|_1^{p-1}\int|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_\varepsilon(y)|dy\\ &= \|\varphi\|_1^{p-1}\int|f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p|\varphi(y)|dy\end{aligned}$$

(ii) $f\in C_b(\mathbb{R}^n\to\mathbb{C})$, compact set $K\subset\mathbb{R}^n$ に対し、$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\sup\limits_{x\in K}|(f*\phi_\varepsilon-f)(x)|=0$.

(3.20.92-1)

[260] （[259] の応用：δ-関数の滑らかな関数 (mollifier) での近似）；

$\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\to[0,\infty))$ を $\varphi(x)=0$ on $|x|>1$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=1$ なるように選び、$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ とおく。

(i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に対し、次のことを示せ；

(a) $f * \varphi_\varepsilon(x)$, $\varphi_\varepsilon * f(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}^n$ で定義され、$f * \varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon * f(x)$.

(b) $f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$, $\|f * \varphi_\varepsilon\|_p \le \|f\|_p$.

(c) $f(x) = 0$, *a.e.* on $|x| > R \Rightarrow f * \varphi_\varepsilon(x) = 0$ on $|x| > R + \varepsilon$.

(ii) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def.}}{=} \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) |\ \mathrm{supp}\,[f]$ は compact $\}$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ の中で稠密である。

(iii) $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ に対して $g_l \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって、任意の compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し、

$$\lim_{l \to \infty} \sup_{x \in K} |g(x) - g_l(x)| = 0$$

なるものが存在する。

(10.25.92-2)

[261] （[259] の応用: 熱方程式の境界値問題）

Gauss 核：$g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/2t}$ （$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$）について次を示せ；(i) $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に属する Borel-可測関数 f に対し convolution； $(g_t * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}^n$ で定義され $\|g_t * f\|_p \le \|f\|_p$. (ii) $p < \infty$ ならば

$$\lim_{t \to 0} \|g_t * f - f\|_p = 0. \tag{0.15}$$

(iii) $f \in C_b(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ なら、任意の compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し、

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in K} |(g_t * f)(x) - f(x)| = 0.$$

(10.27.93-2)

[262] （[259] の応用；Laplace 方程式の境界値問題）上半空間 $\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の Poisson 核 $p_y(x)$ (cf. [256]) について次を示せ；(i) $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に属する Borel-関数 f に対し convolution $(p_y * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}^n$ で定義されて $\|p_y * f\|_p \le \|f\|_p$. (ii) $p < \infty$ ならば

$$\lim_{y \to 0} \|p_y * f - f\|_p = 0. \tag{0.16}$$

更に $f \in C_b(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ なら、任意の compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し、

$$\lim_{y \to 0} \sup_{x \in K} |(p_y * f)(x) - f(x)| = 0.$$

(10.27.93-1)

[263] （[259] の応用; 多項式近似定理の一般化）

Gauss 核 $g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$ $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、その近似多項式 $g_{t,N}(x) = (2\pi t)^{-n/2} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{\nu!} \left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)^\nu$ を考える。$f \in C_c^m(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$, α を $0 \le |\alpha| \le m$ なる多重指数とするとき、以下を示せ；(i) $(f * g_{t,N})(x)$ は x の多項式である。(ii) 任意の compact 集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in K} |D^\alpha (f * g_t)(x) - D^\alpha f(x)| = 0, \quad \lim_{N \to \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha (f * g_{t,N})(x) - D^\alpha (f * g_t)(x)| = 0.$$

(iii) 多項式の列 $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して、任意の compact 集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in K}|D^{\alpha}(f_k)(x)D^{\alpha}(f)(x)| = 0.$$

(iv) K を $\mathbb{R}^n$ の compact subset, U を K の近傍（K を含む 開集合）とするとき、$h \in C^m(U)$ に対し、多項式の列 $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して、

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in K}|D^{\alpha}(h_k)(x) - D^{\alpha}(h)(x)| = 0.$$

(4.8.92-1)

[264] （[259] の応用; Green 核が原点に置かれた単位質量 (電荷) に対する potential であること）$\mathbb{R}^n$ の Green 核 U_n (cf.[256]) は次の意味で方程式「$-\frac{1}{2}\Delta U_n = \delta_0$ 」を満たすことを示そう;

$$-\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} U_n\Delta\varphi = \varphi(0), \quad \forall\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

$U_n^{(\varepsilon)}(x) = U_n(|x|_\varepsilon)$ ($|x|_\varepsilon = (|x|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$, $\varepsilon \geq 0$) について次を順次示せ；

(i) $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ に対し、$-\int_{\mathbb{R}^n} U_n^{(\varepsilon)}\Delta\varphi \overset{\varepsilon\to 0}{\to} -\int_{\mathbb{R}^n} U_n\Delta\varphi$.

(ii) $|x|_\varepsilon > 0$ なるとき、

$$-\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x_j}U_n^{(\varepsilon)}(x) = \frac{x_j}{\omega_{n-1}|x|_\varepsilon^n},$$
$$\psi_\varepsilon(x) \overset{\mathrm{def}}{=} -\tfrac{1}{2}\Delta U_n^{(\varepsilon)}(x) = \frac{n\varepsilon^2}{\omega_{n-1}|x|_\varepsilon^{n+2}} = \varepsilon^{-n}\psi_1(x/\varepsilon).$$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n}\psi_1 = 1$.

(iv) $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ に対し、$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} U_n^{(\varepsilon)}\Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon\varphi \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(0)$.

(10.9.93-2)

[265] 以下を示せ。但し積分は一次元 Lebesgue 測度について考えるものとする。

(i) $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, $\ell, m \in Z$ に対し $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e_{\ell,N}e_{m,N} = \delta_{\ell,m}$, 但し $e_{\ell,N} = \sqrt{N}1_{(\frac{\ell}{N},\frac{\ell+1}{N}]}$.

(ii) $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f|^2 = \lim_N N\sum_{\ell\in\mathbb{Z},|\ell|\leq N^2}\left|\int_{\frac{\ell}{N}}^{\frac{\ell+1}{N}} f\right|^2$.

ヒント：$f_N = \sum_{\ell\in\mathbb{Z},|\ell|\leq N^2}\langle fe_{\ell,N}\rangle e_{\ell,N}$ とおくと、$\int_{\mathbb{R}}|f_N|^2 = N\sum_{\ell\in\mathbb{Z},|\ell|\leq N^2}\left|\int_{\frac{\ell}{N}}^{\frac{\ell+1}{N}} f\right|^2$. 従って、$\lim_N f_N = f$ in $L^2(\mathbb{R})$ を言えばよい。その際、$C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ の稠密性を用いることが出来る。

(2.7.06)

[266] **Haar 関数** $h_{n,k} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $(n, k = 0, 1, \ldots)$ を次のように定義する；

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \text{ and } t \in [k, k+1), \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \geq 1 \text{ and } t \in [2k/2^n, (2k+1)/2^n), \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \geq 1 \text{ and } t \in [(2k+1)/2^n, (2k+2)/2^n), \\ 0 & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

このとき、$\{h_{n,k}\}_{n,k\geq 0}$ は $L^2[0,\infty)$ の CONS であることを示せ。ヒント：直交性を示すのは難しくない。

$$\cap_{n,k\geq 0}\{g\in L^2[0,\infty)\ ;\ \langle\, h_{n,k}, g\,\rangle = 0\} = \{g\equiv 0\}$$

は次のように示す。 g が上式左辺に属するとし、不定積分 $G(t)=\int_0^t g(s)ds$ を考える。

$$\begin{aligned} G(k+1)-G(k) &= 0, \quad k=0,1,\dots. \\ G\left(\tfrac{2k+1}{2^n}\right)-\tfrac{1}{2}G\left(\tfrac{2k}{2^n}\right)-\tfrac{1}{2}G\left(\tfrac{2k+2}{2^n}\right) &= 0 \quad n=1,2,\dots,\ \ k=0,1,\dots. \end{aligned}$$

を示し、そこから $G\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=G(0)$ $(n,k=0,1,\dots)$ を導く。

(1.18.00-1)

[267] $H_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $n=0,1,\cdots$ を関係式;「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nH_n(x)}{n!}=e^{tx-\frac{t^2}{2}}$, $t\in\mathbb{R}$ 」によって定義するとき、次を示せ;(i) H_n は $H_n(x)=(-1)^ne^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$ で与えられる n 次多項式(n-th Hermite polynomial)である。(ii) 微分作用素 $D=\frac{d}{dx}$, $D^*=-\frac{d}{dx}+x$, $L=-D^*D=(\frac{d}{dx})^2-x\frac{d}{dx}$ に対し、

$$DH_{n+1}=(n+1)H_n,\ \ D^*H_n=H_{n+1},\ \ LH_n=-nH_n.$$

(iii) 標準正規分布 $\mu(dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$, 及び多項式 $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対し、

$$\int_{-\infty}^{\infty}Du\cdot vd\mu=\int_{-\infty}^{\infty}uD^*vd\mu,\quad \int_{-\infty}^{\infty}H_nud\mu=\int_{-\infty}^{\infty}H_{n-1}Dud\mu.$$

(11.6.92-2)

[268] Hermite 多項式 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ (cf.[267]) について以下を示せ;(i) $(\frac{H_n}{\sqrt{n!}})_{n=0}^{\infty}$ は $L^2(d\mu)$ の CONS(i.e. complete orhtonormal system)である。(ii) $(\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}}(2\pi)^{-1/4}e^{-x^2/4})_{n=0}^{\infty}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の CONS である。

コメント;(i) により、$\forall f\in L^2(\mu)$ は 作用素 $L=(\frac{d}{dx})^2-x\frac{d}{dx}$ の固有関数 $(\frac{H_n}{\sqrt{n!}})_{n=0}^{\infty}$ の線形和に (L^2-収束の意味で) 展開できる (cf.[267])。

(8.27.92-2)

[269] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $L^p(\mu)$ に属する Borel-可測関数($\mu(dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-|x|^2/2)dx$, $1\leq p<\infty$), $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$, また

$$(T_tf)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\mu(dy),\quad t\geq 0$$

とする。以下を示せ;$\|T_tf\|_p\leq\|f\|_p$, $T_t(T_sf)=T_{t+s}f$, $\lim_{t\to 0}\|T_tf-f\|_p=0$.

(2.12.93-1)

[270] 問題 [269] の続き;$L=\left(\frac{d}{dx}\right)^2-x\frac{d}{dx}$ と置く。以下を示せ;(i) 多項式 f に対し、$T_tf\in C^{\infty}$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}-L\right)T_tf=0$, また $L^p(\mu)$-収束の意味で $\lim_{t\to 0}\frac{T_tf-f}{t}=Lf$. (ii) Hermite 多項式 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ ([268]) に対し $LH_n=-nH_n$, $T_tH_n=e^{-tn}H_n$.

(2.12.93-2)

[271] $k=0,1,\ldots$ に対し、$\mathbf{P}_k$, $\mathbf{H}_k$ を各々 $\mathbb{R}^n$ 上の k 次同次多項式全体、$\mathbb{R}^n$ 上の k 次同次調和多項式全体、更に

$$\langle\, p,q\,\rangle_k = p\left(\tfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\tfrac{\partial}{\partial x^n}\right)\overline{q},\quad p,q\in\mathbf{P}_k$$

とする。ここで $p(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{P}_k$ に対して、$p\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ は対応する k 階の微分作用素を表わす。(i) $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ は $\mathbf{P}_k$ 上の内積を定義することを示せ。(ii) $p\in\mathbf{P}_{k-2}, q\in\mathbf{P}_k$. に対し $\langle |x|^2p,q\rangle_k=\langle p,\Delta q\rangle_{k-2}$ を示せ。(iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ について次の直交分解を示せ;$\mathbf{P}_k=\mathbf{H}_k\oplus|x|^2\mathbf{P}_{k-2}$, $k=2,3,\cdots$. (iv) $\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{P}_k$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{H}_k$ を求めよ。(v) $\mathbb{R}^n$ 上の任意の多項式 p に対し、S^{n-1} 上では p と一致する調和多項式が存在することを示せ。

(3.22.92-1)

[272] $\mathbf{H}_k=\{\mathbb{R}^n$ 上の k 次同次調和多項式 $\}$, $\mathcal{H}_k=\{p|_{S^{n-1}};\quad p\in\mathbf{H}_k\}$, また σ は S^{n-1} の体積要素とする。問題 [271] の結果を用いて以下を示せ。(i) $f\in\mathcal{H}_k, g\in\mathcal{H}_l$, $k\neq l$ ならば $\int_{S^{n-1}}f\overline{g}d\sigma=0$. (ii) $\forall f\in L^2(\sigma;S^{n-1})$ は $\mathcal{H}_k$ $(k=0,1,\cdots)$ の元の線形和に (L^2-収束の意味で) 展開できる。

コメント ; (ii) は $\Delta_{S^{n-1}}$ (cf.[90]) の固有関数展開。

(3.30.92-3)

[273] $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ が $L^2(\mathbb{R}^m)$ の CONS.(complete orthonormal system), $(\psi_l)_{l=1}^\infty$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の CONS. であるとする。このとき、$\mathbb{R}^{m+n}$ 上の関数達:$(x,y)\mapsto\varphi_k(x)\psi_l(y),\quad k,l\geq 1$ は $L^2(\mathbb{R}^{m+n})$ の CONS. であることを示せ。

(11.18.92-1)

[274] $f,U\in C^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$ に対し

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{j=1}^n,\quad V=\tfrac14|\nabla U|^2-\tfrac12\Delta U,\quad \mathcal{L}^Uf=\Delta f-\langle\,\nabla U,\nabla f\,\rangle$$

とする。$f,g\in C_c^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$ に対し以下を示せ;
(i) $\mathcal{L}^Uf=e^U\Delta(e^{-U}f)=e^{U/2}(\Delta-V)(e^{-U/2}f)$. (ii) $-\int_{\mathbb{R}^n}e^{-U}g\mathcal{L}^Uf=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-U}\langle\,\nabla f,\nabla g\,\rangle$

(7.3.98-1)

[275] Stokes の公式の応用 ; D は C^1-超曲面を境界として持つ $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ の有界領域で単位外法線ベクトル場 $\nu\in C(\partial D\to S^{n-1})$ が存在するものする。次を示せ ;

(i) $f\in C^1(\overline{D}\to\mathbb{C})$, $g\in C^2(\overline{D}\to\mathbb{C})$ に対し

$$\int_D(f\Delta g+\langle\,\nabla f,\nabla g\,\rangle)\,dx=\int_{\partial D}f\langle\,\nabla g,\nu\,\rangle d\sigma,$$

ここで、σ は ∂D の表面積要素。なお次の Stokes の公式を証明なしで使ってもよい ;

$$\int_{\partial D}\langle\,F,\nu\,\rangle d\sigma=\sum_{j=1}^n\int_D\frac{\partial F_j}{\partial x_j}dx,\quad\forall F\in C^1(\overline{D}\to\mathbb{R}^n).$$

(ii) $f\in C^2(\overline{D}\to\mathbb{C})$ が次の何れかを満たすとする ;

(a) ∂D 上 $f=0$ (Dirichlet 境界条件),

(b) ∂D 上 $\langle \nabla f, \nu \rangle = 0$ (Neuman 境界条件).

このとき、$-\int_D f\Delta f dx = \int_D |\nabla f|^2 dx.$

(12.20.96-3)

[276] 静電場に対する Gauss の法則 ;「領域の境界を貫く全電力束=領域内の全電荷」を示そう。D は C^1-超曲面を境界として持つ $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$, 物理的には $n=3$) の有界領域で単位外法線ベクトル場　$\nu \in C(\partial D \to S^{n-1})$ が存在するものする。以下を示せ ; (i) $x \in R^n$ における単位正電荷が $y \in R^n$ につくる電場 : $E_x(y) = \frac{y-x}{\omega_{n-1}|y-x|^n}$ （$x, y \in \mathbb{R}^n$ また $\omega_{n-1} = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ は単位球面の表面積 cf.[91]）について、

$$\int_{\partial D} \langle E_x, \nu \rangle d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in D \\ 0 & \text{if } x \notin \overline{D}, \end{cases}$$

ここで、σ は ∂D の表面積要素。(ii) 正電荷が D 上の Borel-有限測度 m で分布し、条件 ; $\int_{\partial D} \sigma(dx) \int_D \dfrac{m(dy)}{|x-y|^{n-1}} < \infty$ を満たすとき、電場 : $E_m(y) = \int_D E_x(y) m(dx)$ は $L^1(\sigma; \partial D \to \mathbb{R}^n)$ の元として定義できて、**Gauss の法則** が成立 ;

$$\int_{\partial D} \langle E_m, \nu \rangle d\sigma = m(D).$$

(10.27.92-3)

[277] $G \subset \mathbb{R}^n$ は $B(x;r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y-x| \leq r\}$ を含む開集合とする。調和関数 $u \in C^\infty(G \to \mathbb{C})$ ($\Delta u = 0$ on G）について、mean value property を示せ;

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\partial B(x;r) \text{ の表面積}} \int_{\partial B(x;r)} u \\ &= \frac{1}{B(x;r) \text{ の体積}} \int_{B(x;r)} u \end{aligned}$$

(4.13.93-2)

[278] $\mathbb{R}^n$ 上の有界な調和関数は定数に限ることを示せ。

(3.19.92-2)

[279] $\mathbb{R}^n$ 上の調和関数 u で $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ に属するものは $u \equiv 0$ に限ることを示せ。

(3.19.92-1)

[280] 問題 [278] の離散版;
関数 $h : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{R}$ が条件「$h(x) = \frac{1}{2d}\sum_{|e|=1} h(x+e), \quad \forall x \in \mathbf{Z}^d$」を満たすとき h を調和関数という（ただし、$|e| = |e|_{\mathbb{R}^d}$）。(i) 定数でない調和関数の例を挙げよ。(ii) 有界な調和関数は定数にかぎること (Liouville の定理) を示せ。

ヒント : まず $\sup_{x \in \mathbf{Z}^d} f(x) = M \in (0, \infty)$ となる調和関数 f を考えこの f について以下を示す。

- $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathbf{Z}^d, \forall n \geq 1, \min_{|e|=1} f(x_\varepsilon + ne) \geq M - \varepsilon(2d)^{-n}$

- $\exists x_0 \in \mathbf{Z}^d,\ \forall e \in \{x \in \mathbf{Z}^d;\ |x| = 1\}, \sup_n \sum_{k=1}^n f(x_0 + ke) = \infty.$

次に h を有界な調和関数とする。$|e| = 1$ にたいし $f_e = h(\cdot + e) - h$ は再び有界な調和関数となるが、f_e について「$\max_{|e|=1} \sup_{x\in\mathbf{Z}^d} f_e(x) \le 0$」がいえる。これは h が定数である事を意味する。

(10.28.91-1)

[281] $(X_j, \mathcal{B}_j)$ $(j = 0, 1)$ を可測空間、 $\varphi : X_0 \to X_1$ を**可測写像**（即ち、「$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}_0 \Leftarrow B \in \mathcal{B}_1$」をみたす） とする。測度 $m : \mathcal{B}_0 \to [0, \infty]$ に対し、$(m\circ\varphi^{-1})(B) = m(\varphi^{-1}(B)),\ B \in \mathcal{B}_1$ と置く。

(i) $m\circ\varphi^{-1} : \mathcal{B}_1 \to [0, \infty]$ が測度であることを示せ（$m\circ\varphi^{-1}$ を m の φ による**像測度** と呼ぶ)。

(ii) 可測関数 $f : X_1 \to [0, \infty]$ に対して $\int_{X_0} f \circ \varphi dm = \int_{X_1} fd(m \circ \varphi^{-1})$.

(iii) 可測関数 $f : X_1 \to \mathbb{C}$ に対して $f \circ \varphi \in L^1(m) \iff f \in L^1(m \circ \varphi^{-1})$.

(iv) , (iii) において「$\iff$」のどちらか（従ってどちらも）を仮定すれば (ii) の等式が成立する。

(2.11.93-2)

[282] m を可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の有限測度、$\varphi : X \to X$ は可測な全単写で m を保存するとする；$m \circ \varphi^{-1} = m$。このとき $m(E) > 0$ なる $E \in \mathcal{B}$ は φ を何度か作用すれば E に戻る点を必ず含むこと、即ち $\exists x \in E,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^n(x) \in E$ を示せ。但し、$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n}$.

ヒント；$m(E \cap \varphi^{-n}(E)) > 0$ なる n の存在を言えればよい。

(2.19.93-1)

[283] $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。$\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ が complex measure であるとは、任意の disjoint な $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ に対して、

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n),\ \text{(右辺は絶対収束)}$$

が成立することである。互いに素な有限個の $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{B}$ が $E \in \mathcal{B}$ の可測な有限分解であるとは $E = \bigcup_j E_j$ であることとし、complex measure μ に対して $|\mu|(E)$ $(E \in \mathcal{B})$ を

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_j |\mu(E_j)|;\ \ \{E_j\}_j \text{ は } E \text{ の可測な有限分解 }\}$$

と定義する。 $|\mu|$ は有限測度であることを示せ。

(11.20.92-1)

[284] 次を示せ; (i) $(X, \mathcal{B})$ 上の complex measure の全体 $\mathcal{M}$ は自然な方法で $\mathbb{C}$ 上の vector space になる。(ii) $\|\mu\|_{\mathrm{var}} = |\mu|(X)$ とおくと $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathrm{var}})$ は $\mathbb{C}$ 上の Banach space である。(iii) X が非加算集合なら $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathrm{var}})$ は可分でない。

(11.6.92-1)

[285] $\mathbb{R}^n$ 上の Borel complex measure 全体を $\mathcal{M}$ としよう。$\mu,\ \nu \in \mathcal{M}$ に対し、convolution $\mu * \nu$ を $(\mu * \nu)(E) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} 1_E(x+y)\mu(dx)\nu(dy),\ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ と定義する。以下を示せ。(i) $\mu * \nu \in \mathcal{M}$ (ii) $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{M}$ に対し、$(\lambda * \mu) * \nu = \lambda * (\mu * \nu)$. (iii) $f \mapsto \mu_f$ $(L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M})$ を $\mu_f(E) = \int_E f(x)dx$ で定義するとき $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し $\mu_{f*g} = \mu_f * \mu_g$.

(4.7.92-2)

[286] $I = [a, b)$ $(-\infty < a < b \le \infty)$, $f \in C(I \to \mathbb{R})$ について次を仮定する；

(a) 右微分 $D^+ f(x)$ が $\forall x \in I$ で存在、

(b) $D^+ f : I \to \mathbb{R}$ は右連続、

(c) 任意の有界閉区間 $J \subset I$ に対し $\int_J |D^+ f| < \infty$.

このとき、次を示せ；$f(x) = f(a) + \int_a^x D^+ f,\ \ \forall x \in I$. ヒント；示すべき等式の右辺を $g(x)$ とおいて $D^+(f-g) \equiv 0$ であることを示せ。そうすれば [48] の結果より $f - g =$ 定数 がわかる。

(10.31.96-1)

[287] $I = (a, b)$, $(-\infty < a < b < \infty)$ とし、$\varphi : I \to \mathbb{R}$ に対して $\varphi(x\pm) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \varphi(x \pm \varepsilon)$ とおく。右連続有界変動関数 $\varphi,\ \psi : I \to \mathbb{R}$ について、次を示せ；

(i) $\int_I \varphi d\psi = \varphi(b-)\psi(b-) - \varphi(a)\psi(a) - \int_I \psi(x-)\varphi(dx)$.

ヒント； $\varphi(x) = \varphi(a+) + \int_{(a,x]} d\varphi$ を左辺に代入して Fubini の定理を用いよ。

(ii) φ が非減少、ψ が連続なら、次を満たす $c \in I$ が存在；

$$\int_I \varphi d\psi = \varphi(b-)\{\psi(b-) - \psi(c)\} + \varphi(a)\{\psi(c) - \psi(a)\}.$$

(iii) φ が非減少、ψ が絶対連続なら、次を満たす $c \in I$ が存在；

$$\int_I \varphi \psi' = \varphi(b-)\int_c^b \psi' + \varphi(a)\int_a^c \psi'.$$

(10.9.93-1)

[288] $-\infty \le a < b \le \infty$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ を非減少関数 , $\alpha = \inf f$, $\beta = \sup f$ とする。一般化された逆関数 $f_\pm^{-1} : \mathbb{R} \to [a, b]$ を次のように定義する；

$$\begin{aligned} f_-^{-1}(t) &= \inf\{s \in (a,b) \mid t \le f(s)\} = \sup\{s \in (a,b) \mid f(s) < t\} \\ f_+^{-1}(t) &= \inf\{s \in (a,b) \mid t < f(s)\} = \sup\{s \in (a,b) \mid f(s) \ge t\} \end{aligned}$$

但し $\sup\{\phi\} = \infty$, $\inf\{\phi\} = -\infty$ と規約しておく。以下を証明、或は例示せよ。(i) f が連続 $\not\Rightarrow$ $f_\pm^{-1}$ が連続. (ii) $a < f_-^{-1}(t) \le f_+^{-1}(t) < b$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$. (iii) $f_+^{-1}(s) \le f_-^{-1}(t)$, if $\alpha < s < t < \beta$. (iv) $t \in (\alpha, \beta)$ に対し

$$f_+^{-1}(t-) = f_-^{-1}(t-) = f_-^{-1}(t) \le f_+^{-1}(t) = f_+^{-1}(t+) = f_-^{-1}(t),$$

但し関数 g に対し $g(s\pm) = \lim_{s\to 0\pm} g(s)$ とする。特に、f_- は左連続は f_+ は右連続。また $t \in (\alpha,\beta)$ に対し

$$f_-^{-1}(t) = f_+^{-1}(t) \;\Leftrightarrow\; f_\pm^{-1} \text{ の何れかが } t \text{ で連続} \;\Leftrightarrow\; f_\pm^{-1} \text{ が共に } t \text{ で連続}$$

(v) $\forall s \in (a,b)$ に対し

$$f_+^{-1}(f(s)-) \le f_-^{-1}(f(s)) \le s \le f_+^{-1}(f(s)) \le f_-^{-1}(f(s)+).$$

(vi) $t \in (\alpha,\beta)$ に対し

$$f\left(f_-^{-1}(t)-\right) \le f\left(f_+^{-1}(t)-\right) \le t \le f\left(f_-^{-1}(t)+\right) \le f\left(f_+^{-1}(t)+\right).$$

(vii) $t \le f(s) \Rightarrow f_-^{-1}(t) \le s \Rightarrow t \le f(s+)$. (viii) $f(s) \le t \Rightarrow s \le f_+^{-1}(t) \Rightarrow f(s-) \le t$.

(5.21.98-1)

[289] $-\infty \le a < b \le \infty$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ を連続な非減少関数，$\alpha = \inf f$, $\beta = \sup f$ とする。一般化された逆関数 $f_\pm^{-1}:\mathbb{R}\to[a,b]$ を問題 [288] のように定義する。f が定める Lebesgue-Stieltjes 測度 σ_f について以下を示せ；(i)

$$\sigma_f\{s\in(a,b) \mid u < f(s) \le v\} \;=\; v-u \quad \text{if } \alpha<u<v<\beta \tag{0.17}$$

$$\sigma_f\{s\in(a,b) \mid f(s)\in\{\alpha,\beta\}\} \;=\; 0 \tag{0.18}$$

従って特に $\alpha < f(s) < \beta$, σ_f-a.a.s であって σ_f の f による像測度 $\sigma_f \circ f^{-1}$ は区間 (α,β) 上で Lebesgue 測度に等しい。(ii) $f_\pm^{-1}\circ f(s) = s$, σ_f-a.a.s (iii) Borel-可測関数 $F:(a,b)\times(\alpha,\beta)\to[0,\infty]$ に対し次の変数変換公式が成立する（両辺 $=\infty$ の場合も含めて）;

$$\int_{(a,b)} F(s,f(s))\,\sigma_f(ds) = \int_{(\alpha,\beta)} F\left(f_\pm^{-1}(t),t\right)dt. \tag{0.19}$$

注意１：(0.18) は α or β が有限の時のみが問題。
注意２：(0.19) の左辺の合成 $F(s,f(s))$ が σ_f-a.a.s で可能なことは 問題 (i) の結果から判る。また (0.19) 右辺の合成 $F\left(f_\pm^{-1}(t),t\right)$ が $\forall t\in(\alpha,\beta)$ に対して可能であるのは「$t\in(\alpha,\beta) \Rightarrow a < f_\pm^{-1}(t) < b$」（cf. 問題 [288]）であることによる。

(5.25.98-1)

[290] $(X,\mathcal{F},m)$ は測度空間、$\{\xi_n\}_{n\ge1}\subset L^2(m)$ は条件

(a) $\displaystyle\sup_{n\ge1}\int_X |\xi_n|^2 dm < \infty$,

(b) $\int_X \xi_m\overline{\xi_n}\,dm = 0$ if $m \ne n$,

(c) $\displaystyle\sup_{n\ge1}|\xi_n| < \infty$, m-*a.e.*

をみたすとする。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\xi_1+\cdots+\xi_n)/n = 0$, m-*a.e.* を示せ。

コメント；[76] に適用すれば、「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n/n = p$, P- *a.e.*」（**大数の強法則**）がわかる。

ヒント： $\sigma(N,x) = (\xi_1(x)+\cdots+\xi_N(x))/N$ に対し $\displaystyle\sum_{N=1}^{\infty}\int_X |\sigma(N^2,x)|^2 m(dx) < \infty$ を示す。
最後は [14] に持ち込むことが出来る。

(12.30.91-4)

[291] （[290] の応用その１）閉区間 $[0,1]$ 上に Lebesgue measure　を与える。任意の相異なる整数列 $m_n, n=1,2,\cdots$ に対して、$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\exp(2\pi\mathbf{i}m_k x)=0,\quad a.e.x.$ を示せ。

(1.22.92-1)

[292] （[290] の応用その２）$x\in(0,1)$ を 10 進小数として $x=0.k_1(x)k_2(x)k_3(x)\cdots$ と表す。任意の $k=0,1,\cdots,9$ に対し次を示せ; $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sharp\{1\le j\le n\,;\,k_j(x)=k\}=1/10,\quad \text{a.e.}x\in(0,1).$

ヒント；$\sharp\{1\le j\le n\,;\,k_j(x)=k\}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{k,n}(x)$, 但し

$$\xi_{k,n}(x)=\begin{cases}1 & \text{if } k_n(x)=k\\ 0 & \text{if } k_n(x)\ne k\end{cases}$$

(11.20.92-2)

[293]　問題 [290] で任意の $\alpha>2/3$ に対して、　$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}(\xi_1+\cdots+\xi_n)=0,\quad m\text{-}a.e.$ を示せ。

(2.5.92-1)

[294] $\mathcal{P}$ を可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の確率測度全体とする。$\mu,\nu\in\mathcal{P}$ について次式で定義される $\mathbf{H}(\nu|\mu)$ を　ν の μ についての相対エントロピーという；

$$\mathbf{H}(\nu|\mu)=\begin{cases}\int_X f\log f d\mu & \text{if } \nu\ll\mu \text{ and } f=d\nu/d\mu\\ +\infty & \nu\ll\mu\ \text{でないとき}\end{cases}\tag{0.20}$$

($0\log 0=0$, また $\nu\ll\mu$ は「ν が μ について絶対連続」の意)。以下を示せ；
(i) $0\le\frac{1}{2}\|\nu-\mu\|^2_{\mathrm{var}}\le\mathbf{H}(\nu|\mu)$. (ii) $\mu\in\mathcal{P}$ を固定する。このとき、写像：$\nu\in\mathcal{P}\mapsto\mathbf{H}(\nu|\mu)$ は convex である。

(i) のヒント；$3(x-1)^2\le 2(x+2)(x\log x-x+1),\quad x\ge 0.$

(1.5.92-1)

[295] μ,ν を可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の確率測度、$A\in\mathcal{B}$ とする。$\mu(A)>0$ のとき、次の不等式を示せ；

$$\nu(A)\log(\nu(A)/\mu(A))\le\mathbf{H}(\nu|\mu)+e^{-1}\mu(A^c).$$

但し $\mathbf{H}(\nu|\mu)$ は相対エントロピー [294] である。

ヒント $\nu\ll\mu$ と仮定してよく（さもなくば右辺は ∞）、$f=d\nu/d\mu$ とおく。このとき、μ_A を条件付確率 $\mu_A(B)=\mu(A)^{-1}m(A\cap B)$ とすると、

$$\begin{aligned}\nu(A)\log(\nu(A)/\mu(A)) &= \mu(A)\textstyle\int f d\mu_A\log\left(\int f d\mu_A\right)\\ &\le \mu(A)\textstyle\int f\log f d\mu_A,\quad \text{Jensen の不等式による}\\ &= \textstyle\int_A f\log f d\mu.\end{aligned}$$

(4.5.00-1)

[296] 可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の確率測度 $\mu,\ \widetilde{\mu},\ \nu$ について $\mu \ll \widetilde{\mu} \ll \mu$, $\log(\frac{d\mu}{d\widetilde{\mu}}) \in L^1(\nu)$ を仮定する。以下を示せ；(i)

$$\mathbf{H}(\nu|\widetilde{\mu}) = \mathbf{H}(\nu|\mu) + \int \log(\frac{d\mu}{d\widetilde{\mu}})d\nu.$$

ここで $\mathbf{H}(\nu|\mu)$ とは相対エントロピー [294] である。

(ii) 可測関数 $H : X \to \mathbb{R}$ に $e^{-H} \in L^1(\mu)$, $H \in L^1(\nu)$ を仮定する。このとき、

$$-\log \int_X e^{-H} d\mu \le \int_X H d\nu + \mathbf{H}(\nu|\mu), \tag{0.21}$$

かつ

$$\text{等号成立} \iff d\nu = d\mu_H \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\int_X e^{-H} d\mu} e^{-H} d\mu. \tag{0.22}$$

ヒント: (i) で $\widetilde{\mu} = \mu_H$ とせよ。

余談；統計物理からの解釈: 集合 X はある物理系がとりうる状態全体としよう。また各状態 $x \in X$ のエネルギーが $H(x)$ で表わされるとする（関数 H は Hamiltonian と呼ばれる)。「安定な状態 x」、即ち $H(x)$ を最小にするような状態 x を知ることには興味がある。

一方、絶対零度より高い温度では各状態 $x \in X$ は熱的な揺らぎにより「ランダムに」実現され、「どのようにランダムか」 を記述するのが $(X,\mathcal{B})$ 上の確率測度 ν である。従って $H(x)$ を最小にするような特定の 1 状態 $x \in X$ を知ることよりも「どのような確率測度 ν が、この物理系を最も安定するか？」という問いがむしろ現実的であり、実は (0.22) がその答えである。

今 $H \equiv 0$ と仮定した場合には系を最も安定にする確率測度 μ は既知としよう (例えば全状態に一様な重みを持った分布)。さて「ν が物理系が最も安定とする」とは何らかの意味で「ν のエネルギーを最小にする」ことであるが 「ν のエネルギー」とはそもそも何か？ 実はそれが (0.21) の右辺 （**自由エネルギー,Helmholtz free energy**）である。自由エネルギーはエネルギー H の平均だけでなくエントロピーの効果も考慮している。確率測度 μ_H は自由エネルギー最小の状態、つまり系を最も安定にする確率分布（**Gibbs 測度**) である。

(2.13.93-2)

[297] $(X,\mathcal{B})$ を可測空間とし、$(X,\mathcal{B})$ 上の確率測度全体の集合 $\mathcal{P}$ に距離: $\|\nu_1 - \nu_2\|_{\text{var}}$ を与える。このとき、任意の $\mu \in \mathcal{P}$ に対し、相対エントロピー $\mathbf{H}(\nu|\mu)$ (cf. [294]) は $\nu \in \mathcal{P}$ について下半連続であることを示せ。

ヒント；以下を順次示す；(i) $L^1_+(\mu) = \{f \in L^1(\mu); f \ge 0,\ \mu\text{-}a.e.\}$ に距離: $\|f-g\|_{L^1(\mu)}$ を与えるとき、$\int_X f \log f d\mu$ は $f \in L^1_+(\mu)$ について下半連続。(ii) $\nu_n, \nu \in \mathcal{P}$ $(n = 1,2,\cdots)$ について、$\nu_n \ll \mu$ $(n = 1,2,\cdots)$ かつ $\|\nu_n - \nu\|_{\text{var}} \to 0$ ならば、$\nu \ll \mu$ かつ $\left\|\frac{d\nu_n}{d\mu} - \frac{d\nu}{d\mu}\right\|_{L^1(\mu)} \to 0.$

(2.13.93-1)

[298] $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し、Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi)$、及び 共役 Fourier 変換 $\check{f}(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ を次のように定義する；

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-\xi}(x) f(x) dx, \quad \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{\xi}(x) f(x) dx.$$

但し $\mathbf{e}_\xi(x) = \exp(2\pi\mathbf{i}\langle\, x, \xi\,\rangle)$. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し以下を示せ；(i): $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は一様連続, (ii): $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, (iii):$\hat{f}(\xi) = 0,\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \iff f = 0,\ a.e.$, (iv): $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$.

(iii), 「⇒」のヒント；$\widehat{f} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f = 0, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad f = 0, \ a.e.$

(10.20.92-2)

[299] $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ であって任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, に対して $\lim_{|x| \to \infty} x^\alpha (D^\beta f)(x) = 0$ を満たすものを**急減少関数**といい、急減少関数全体を $\mathcal{S}$ （場合によって、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ 等々）で表す。以下を示せ；(i) $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$. (ii) $f \in \mathcal{S}, \alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し、

$$D^\alpha \widehat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi), \quad (-2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) = (D^\alpha f)^\wedge(\xi).$$

(9.24.92-1)

[300] 以下を示せ；(i) $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f$. (ii) $f \to \hat{f}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像として全単写。

(9.25.92-2)

[301] 以下を示せ；(i) $L^1(\mathbb{R}^n)$ は convolution $*$ について Banach algebra をなす。(ii) $L^1(\mathbb{R}^n)$ は $*$ についての単位元を持たない。

(4.4.92-3)

[302] 次の命題は正しいか？

(a) $f \in C([0,1] \to \mathbb{C})$ が $\int_0^1 f(x) x^m dx = 0, \ \ \forall m = 0, 1, \cdots$ を満たせば $f \equiv 0$。

(b) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が $\int_{\mathbb{R}} f(x) x^m dx = 0, \ \ \forall m = 0, 1, \cdots$ を満たせば $f \equiv 0$。

(10.26.91-2)

[303] $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し次を示せ；$\lim_{N \to \infty} \| \underbrace{f * \cdots * f}_{N} \|_1^{1/N} = \|\hat{f}\|_\infty$.

(4.9.92-1)

[304] $F \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{C}), \ \sup_{x \in [0,1]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |F(x+m)| < \infty$ とする。以下を示せ；

(i) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F(x+m) \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C})$ ([70]) であって、その Fourier 変換（係数）を [70] の意味で $\hat{f}(\cdot)$ と書くとき $\hat{F}(n) = \hat{f}(n), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$, 但し、左辺は $F \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換（[298]）。

(ii) **Poisson の和公式**；$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n).$

(4.16.92-1)

[305] Poisson の和公式 [304] を利用し、以下の等式を示せ：
(i) $t > 0$ に対し $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t) = t^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 / t)$. (**Jacobi の等式**)
(ii) $y > 0$ に対し $\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{y}{n^2+y^2}$.
(iii) $\lim_{y \searrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{e^y+1}{e^y-1} - \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{6}$ を示せ。また、これと (ii) の等式を用い、$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を証明せよ。

(4.16.92-2)

[306] Gauss 核；$g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/2t}$, ($x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$) について以下を示せ；(i) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x \rangle} g_t(x) dx = e^{t|\xi|^2/2}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} g_t(x) dx = e^{-t|\xi|^2/2}.$$

ヒント；最初の等式がわかれば２番目は解析接続を使って得られる。(ii) $t, s \in (0, \infty)$ に対し $g_t * g_s = g_{t+s}$. (iii) $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に属する Borel-可測関数 f 及び $t, s \in (0, \infty)$ に対し $g_s * (g_t * f) = g_{t+s} * f$.

余談；$G_t : f \mapsto g_t * f$ と書くことにしよう。$L^p(\mathbb{R}^n)$ 上の線型作用素の族：$(G_t)_{t \ge 0}$ は (iii) により合成に関して半群をなす。この半群は**強連続半群**の理論での最も基本的な例の一つ（「強連続」の定義は [262]-(i) の２つめの式）。

(11.5.93-1)

[307] 上半空間 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の Poisson 核 $p_y(x)$ ([256] 参照) について以下を示せ；(i) $\widehat{p_y}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|y}$, (ii) $y, y' > 0$ に対し、$p_y * p_{y'} = p_{y+y'}$, (iii) $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に属する Borel-関数 f 及び $y, y' \in (0, \infty)$ に対し $p_y * (p_{y'} * f) = p_{y+y'} * f$.

(i) のヒント；次の等式を順次示す。最初の式は Gauss 核の Laplace 変換 [258] で $n = 1$ の結果から出る。次式への移行は Gauss 核の Fourier 変換 ([306]) に帰着させて行なう（subordination の原理）；

$$e^{-2\pi|\xi|y} = \sqrt{2\pi} y \int_0^\infty e^{-2\pi^2 y^2 t} (2\pi t)^{-1/2} e^{|\xi|^2/2t} dt$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_\xi(x) e^{-2\pi|\xi|y} d\xi = p_y(x).$$

10.27.91-1

[308] 任意に小さな周期を持つ Borel measurable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は、ある定数に殆ど至るところで一致する。

(2.12.92-1)

[309] μ は $\mathbb{R}^n$ 上の Borel 測度 で、条件：「$\int_{\mathbb{R}^n} e^{a|x|} \mu(dx) < \infty, \ \forall a \ge 0$」を満たすものとし、集合 $\mathbf{P}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の多項式全体とする。以下を示せ；(i) $f \in L^q(\mu)$ $(1 \le q \le \infty)$ に対し、

$$\int_{\mathbb{R}^n} g f d\mu = 0, \quad \forall g \in \mathbf{P} \ \Rightarrow \ f = 0, \ \mu\text{-}a.e.$$

(ii) $\mathbf{P}$ は $L^p(\mu)$ $(1 \le p < \infty)$ の中で dense である。
(i) のヒント；１つの方法:「$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_\xi f d\mu = 0, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$」を示した上で、[298] のヒントで指示した方法で $f = 0$, μ-$a.e.$ を結論する。
(ii) のヒント；次のことは用いてよい；$L^p(\mu)^* = L^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(2.10.92-3)

[310] (i) $(E, |\cdot|_E)$ をノルム空間、M を E の linear subspace で $\overline{M} \ne E$ とする。このとき、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $e \in E \backslash M$ を $|e|_E = 1, \ \ |e - M|_E \ge 1 - \varepsilon$ を満たすように選ぶことが出来る。但し、$|x - M|_E = \inf\{|x - m|_E; \, m \in M\}$. (ii) 局所 compact なノルム空間は有限次元である。

(12.28.91-4)

[311] 無限次元のノルム空間 E 上の Borel measure m で次の 2 条件を共に満たすものは存在しないことを示せ；

(a) 任意の Borel set B と $\forall x \in E$ に対し、$m(x+B) = m(B)$.

(b) 任意の有界な open set $B \neq \phi$ に対し、$0 < m(B) < \infty$.

ヒント；[310]-(i)

(8.1.92-2)

[312] F_1, F_2 を Banach 空間 E の閉部分空間で $F_1 \bigcap F_2 = \{0\}$ とするとき、$\{x_1 + x_2;\ x_i \in F_i\}$ は閉部分空間か？

(11.3.91-7)

[313] $E = (E, |\cdot|_E)$, $F = (F, |\cdot|_F)$ をノルム空間とする。A が E から F への**線形作用素**であるとは、或る部分空間 $\mathrm{Dom}(A) \subset E$ が指定されていて $A : \mathrm{Dom}(A) \to F$ が通常の意味での線形写像であることを意味する。$\mathrm{Dom}(A)$ を A の **domain**、また $\mathrm{Ran}(A) = \{Ax; x \in \mathrm{Dom}(A)\}$ を A の **range** という。$\mathrm{Dom}(A) \neq E$ の場合でも、$A : E \to F$ と書く事が多い。線形作用素 $A : E \to F$ が次の性質をもつとき A は**closed operator(閉作用素)** であるという；

$$\begin{aligned} &\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Dom}(A),\quad x_n \to x \ \text{かつ}\ Ax_n \to y \\ &\Rightarrow x \in \mathrm{Dom}(A) \ \text{かつ}\ Ax = y. \end{aligned}$$

E, F をノルム空間とするとき以下を示せ；(i) $\mathcal{L}(E \to F)$ の元は閉作用素である。(ii) 線形作用素 $A : E \to F$ が単射 ($\mathrm{Dom}(A)$ から F への写像として) であるとき A の逆作用素 $A^{-1} : F \to E$ が $\mathrm{Dom}(A^{-1}) = \mathrm{Ran}(A)$ として定義される。　このとき、A が閉作用素なら $A^{-1} : F \to E$ も閉作用素である。(iii) E, F が Banach 空間とするとき、

$$A : E \to F \quad \text{が閉作用素} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Dom}(A) \text{ がノルム } \|x\| = |x|_E + |Ax|_F \text{ で Banach 空間}$$

(12.28.91-2)

[314] $C([0,1] \to \mathbb{C})$ に一様ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を与えた Banach 空間 ([148]) を考えて $C([0,1] \to \mathbb{C})$ から $C([0,1] \to \mathbb{C})$ 自身への線形作用素 A, A_0 を次のように定義する：

$$A = a(x)\ \tfrac{d}{dx},\quad \mathrm{Dom}(A) = C^1([0,1] \to \mathbb{C})$$

$$A_0 = a(x)\ \tfrac{d}{dx},\quad \mathrm{Dom}(A_0) = \{u \in C^1([0,1] \to \mathbb{C});\ u(0) = 0\}$$

ここで、$a \in C([0,1] \to (0,\infty))$ とする。(i)A, A_0 は閉作用素であることを示せ。(ii) A, A_0 はいずれも有界作用素ではないことを示せ。(iii) A_0^{-1} を求めて、それが有界作用素である事を示せ。

(12.28.91-1)

[315] E を Banach space , F をノルム空間、また $T : E \to F$ を線形閉作用素とする。次を示せ；

(i) T が開写像 $\Longleftrightarrow 0 \in E$ の任意の近傍 U に対して $(\overline{TU})^\circ \neq \phi$.

(ii) $\mathrm{Ran}(T)$ が第２類なら T は開写像である。

(iii) E, F が共に Banach space で、T が全単射なら T^{-1} は連続である。

(1.21.92-3)

[316] **閉グラフ定理;** E,F を Banach space, $T : E \to F$ を閉作用素とするとき、$\mathrm{Dom}(T) = E$ ならば $T \in \mathcal{L}(E;F)$ である。

(2.24.92-2)

[317] E,F を ノルム空間とする。$K \in \mathcal{L}(E \to F)$ が compact 作用素であるとは任意の $x_n \in E$, $|x_n|_E \leq 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して点列：$\{Kx_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ が収束部分列を含むことである。以下を示せ；(i) ノルム空間 E_i と その間の有界作用素 A_i の系列：$E_2 \xleftarrow{A_2} E_1 \xleftarrow{A_1} E_0$ について A_2,A_1 のどちらかがcompact なら A_2A_1 は compact である。(ii) F を Banach space とするとき、compact operator 全体は$\mathcal{L}(E \to F)$ の中で operator norm についてのclosed subspace をなす。(iii) $I = [0, 1]$, $E = (C(I \to \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, $k \in C(I^2 \to \mathbb{C})$ とする。

$$(Kf)(x) = \int_I k(x,y)f(y)dy, \quad f \in E, \ x \in I$$

とおくとき、$K : E \to E$ が compact 作用素であることを示せ。

(ii) のヒント；[164] の結果を使う手もある；その際、各 $x \in E$ を $T \mapsto Tx$ $(\mathcal{L}(E \to F) \to F)$ という写像と考えれば $\{x \in E; |x|_E \leq 1\}$ は同程度連続。
(iii) のヒント；不等式

$$|Kf(x) - Kf(x')| \leq \sup_{z \in I} |k(x,z) - k(x',z)| \|f\|_\infty.$$

に注意すると、$f_n \in E$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $n = 1, 2, \cdots$ ならば $\{Kf_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ は $\|\cdot\|_\infty$ -収束する部分列を含む；Ascoli-Arzela の定理 （[165] ）の応用。

(11.4.92-1)

[318] H は CONS $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ をもつ Hilbert space, $K \in \mathcal{L}(H \to H)$ とする。以下を示せ；
(i) $\|K\|_{\mathrm{HS}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^\infty |K\varphi_n|_H^2 \right)^{1/2}$ の値（∞ も許す）は CONS の選び方に依らない。$\|K\|_{\mathrm{HS}} < \infty$ なる K を **Hilbert-Schmidt 作用素** という。(ii) Hilbert-Schmidt 作用素は compact 作用素である。

(12.22.92-1)

[319] $(X, \mathcal{B}, m)$ は σ-finite measure space で、$H = L^2(m)$ は CONS $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ をもつとする。

(i) $K \in \mathcal{L}(H \to H)$ に対して次の２題は同値；

(a) K は Hilbert-Schmidt 作用素。

(b) $\exists k \in L^2(m \otimes m)$, $(Kf)(x) = \int_X k(x,y)f(y)m(dy)$, m-$a.e.x.$

(ii) (i) において $\|K\|_{\mathrm{HS}} = \|k\|_{L^2(m\otimes m)}$.

(12.22.92-2)

[320] E をノルム空間, $K \in \mathcal{L}(E \to E)$, λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を K の相異なる固有値とする。以下を示せ；(i) $\varphi_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n - K)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で $|\varphi_n|_E = 1$ かつ $\min_{1\le m<n} |\varphi_n - \varphi_m|_E \ge \frac{1}{2}$ なるものが存在する。(ii) K が compact 作用素かつ $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ が無限集合なら、$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

(i) のヒント；[310].
(ii) のヒント； $\{\lambda_n\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は E の中で相対 compact.

(3.17.98-1)

[321] E を Banach space, $K : E \to E$ を compact operator とする。以下を示せ；(i) $\dim \mathrm{Ker}(I - K) < \infty$. (ii) 閉部分空間 $E_0 \subset E$ が存在して　$E = \mathrm{Ker}(I - K) \oplus E_0$ （代数的直和）。(iii) $\mathrm{Ran}(I - K) \subset E$ は closed. (iv) $I - K : E_0 \to \mathrm{Ran}(I - K)$ は全単射かつ逆写像は連続。

(12.24.92-2)

[322] E を Banach space, $K : E \to E$ を compact operator とする。次を示せ；

$$I - K \text{ が単射 } \Rightarrow I - K \text{ は全単射かつ逆写像は連続。}$$

余談：このことから「T の 0 でないスペクトルは全て固有値である」ことがわかる。

(12.24.92-3)

[323] Banach 空間 E_i と その間の線形作用素 A_i の系列：$E_2 \xleftarrow{A_2} E_1 \xleftarrow{A_1} E_0$ に関して次の命題は正しいか？(i) A_2 が有界作用素、A_1 が閉作用素なら A_2A_1 は閉作用素に拡張できる。(ii) A_2 が閉作用素、A_1 が有界作用素なら A_2A_1 は閉作用素である。

(10.24.91-1)

[324] $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, また E を K 上のノルム空間とする。以下を示せ；(i) 直積: K^E を E 上の K-値関数全体と見なすことにより、$E^* = \mathcal{L}(E \to K) \subset K^E$ であるが、このとき、E^* 上の w^*-topology は K^E の積位相からの相対位相と一致する。(ii) 任意の $r \in [0, \infty)$ に対し、$\{l \in E^*; |l|_{E\to K} \le r\}$ は w^*-compact である。（ヒント；(i) を用いて K^E の中で考えよ)。

(7.3.92-4)

[325] $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, また E を K 上の Banach 空間とする。$A \subset E^*$ に対し次を示せ；

$$A \text{ が } w^*\text{-相対 compact} \iff \sup_{l\in A} \|l\|_{E\to K} < \infty.$$

ヒント；$\Leftarrow$ は [324] で既知 (E の完備性は不要)。$\Rightarrow$ を示すには $x \in E \mapsto \sup_{l\in A} |l(x)|$ が連続な semi-norm であることを言えばよい。そこで [185] を使える。

(11.6.96-1)

[326] 任意の $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ と $N = 1, 2, \cdots$ に対し、$\max_{i=1}^{n} \left| x_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{Nq}$ を満たすような $(p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$ 及び $q \in \{1, \cdots, N^n\}$ が存在する。(Dirichlet の定理)

ヒント：$[\cdot]$ を Gauss の記号 ($[x] = \max\{m \in \mathbb{Z};\ m \le x\}$) とするとき $[0,1)^n$ 内の $N^n + 1$ 個の点

$$\begin{gathered} 0 \\ (x_1 - [x_1], \cdots, x_n - [x_n]) \\ (2x_1 - [2x_1], \cdots, 2x_n - [2x_n]) \\ \vdots \\ (N^n x_1 - [N^n x_1], \cdots, N^n x_n - [N^n x_n]) \end{gathered}$$

をとって部屋割り論法を適用する。即ち $[0,1)^n$ を N^n 個の「部屋」に分割すれば、どこかの部屋には上記の点のうち 2 個以上が入っている事になる。

(1.3.92-3)

[327] $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合 S が $n - [n/2] + 1$ 個の元を含めば S の中に約数、倍数の関係にある 2 数が必ず存在する。

(1.2.92-1)

[328] 可算個の風船があってどの 2 つも赤または白の糸で結ばれているとする。このとき、それらの風船の、ある無限個が同一色の糸で結ばれていることを示せ。

(10.2.92-1)

[329] 「ねるとん紅鯨団」(土曜夜 11:00 関西テレビ) に男性グループ M、女性グループ F が出演したとする。例によって、各 $m \in M$ は第一印象チェックにおいて何人かの $F_m \subset F$ にあらかじめ目星をつけ、告白タイムで F_m から一人を選ぶものとする。このとき次の 2 条件は同値であることを示せ；

(a) $\sharp \left(\bigcup_{m \in N} F_m \right) \ge \sharp(N), \quad \forall N \subset M.$

(b) 各男性がそれぞれ別の女性に告白できる。

(10.1.92-1)

[330] $q_0 \in \mathbb{Z}, q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ に対し、

$$F(q_0, q_1, \cdots, q_n) = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \, q_{n-2} + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

を**有限連分数** と言うことにする。

(i) 任意の有理数は有限連分数として表現されることを示せ。

(ii) $q_0 \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}^* \ (n = 1, 2, \cdots)$ が与えられたとして、有限連分数 $F(q_0, \cdots, q_n)$ の規約分数表現を $P_n/Q_n \ (P_n \in \mathbb{Z}, Q_n \in \mathbb{N}^*)$ と書く。このとき、P_n,Q_n について次の関係を示せ。

(a) $Q_n > Q_{n-1}, \quad n \geq 2$

(b) $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 1$

(c) $F(q_0, q_1, \cdots, q_n) = \dfrac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \quad n \geq 2$

(iii) 1 次不定方程式：$225x - 157y = 1$ の整数解 (x, y) を 1 組求めよ。

(iv) 無理数 x に対し、$x_0 = x$ とし、$x_n > 1, n = 1, 2, \cdots$ を漸化式：$x_{n-1} = [x_{n-1}] + \dfrac{1}{x_n}$ により定める。更に、こうして作られた有限連分数 $F([x_0], \cdots, [x_n])$ の規約分数表現を P_n/Q_n ($P_n \in \mathbb{Z}, Q_n \in \mathbb{N}^*$) と書く。不等式 $\left| x - \dfrac{P_n}{Q_n} \right| < \dfrac{1}{Q_n^2}$ を示し、次を結論せよ；$\displaystyle\lim_{n \to \infty} F([x_0], \cdots, [x_n]) = x$.

(v) (iv) を利用して実数 x について次を示せ；

$$x \notin \mathbb{Q} \iff \left| x - \tfrac{p}{q} \right| < \tfrac{1}{q^2} \text{ を満たす規約分数 } p/q \text{ が無限個存在}$$

(1.3.92-2)

[331] $\sharp A$ で集合 A の元の個数（濃度）を表す事にする。以下を示せ；

(i) $A_1, \cdots, A_m \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し、

$$\sharp(A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c) = n + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{i_1 < \cdots < i_s} \sharp(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_s}).$$

(ii) どの 2 つも互いに素な m 個の数 $a_1, \cdots a_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し次の等式が成り立つ；

$$\begin{aligned} &\sharp\{\ 1, 2, \cdots, n \text{ のうちで、どの } a_1, \cdots, a_m \text{ でも割り切れない数}\ \} \\ &= n + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{i_1 < \cdots < i_s} \left[\frac{n}{a_{i_1} \cdots a_{i_s}} \right] \end{aligned}$$

ただし、$[\cdot]$ は整数部分を表す。

(iii) **Euler の関数**：$\varphi(n) = \sharp\{\ 1, 2, \cdots, n$ のうちで、n と互いに素な数 $\}$ について次の等式を示せ；

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - p^{-1}),$$

ここで、$\prod_{p|n}$ とは n の素因数についての積である。

(12.10.91-4)

[332] $f, g \in \mathcal{A} = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}\}$ に対し $f * g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ を $(f * g)(n) = \displaystyle\sum_{d|n} f(n/d) g(d)$ で定義する。また $f \in \mathcal{A} = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}\}$ に対し、とりあえず形式的に $\zeta(s; f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}$ とおき、これを $f \in \mathcal{A}$ の **Dirichlet 級数**という。以下を示せ；

(i) $\mathcal{A}$ における演算 $*$ は結合律: $(f * g) * h = f * (g * h)$, 可換律: $f * g = g * f$ を満たす。$*$ に関する単位元は何か？

(ii) $f \in \mathcal{A}$ が $*$ について可逆 $\iff f(1) \neq 0$

(iii) $f, g \in \mathcal{A}$ および $s \in \mathbb{C}$ について、$\zeta(s;f)$, $\zeta(s;g)$ が共に絶対収束するなら $\zeta(s; f*g)$ も絶対収束して等式：$\zeta(s; f*g) = \zeta(s;f)\zeta(s;g)$. が成り立つ。

(12.12.91-1)

[333] $n \in \mathbb{N}^*$ を k 個の自然数の積として表す方法の数を $d_k(n)$ と書く。例えば $d_3(8) = 3$ $(8 = 1\cdot 1\cdot 8 = 1\cdot 2\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 2)$。このとき Dirichlet 級数: $\zeta(s; d_k) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}$ ([332] 参照) は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し、等式 $\zeta(s; d_k) = \zeta(s)^k$ が成立することを示せ。ここで $\zeta(s)$ とは Riemann の zeta-function ; $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ である。

(1.2.92-4)

[334] **Möbius 関数** $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ を

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ (-1)^r & (n \text{ が } r \text{ 個の相異なる素数の積で書けるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外、即ち } n \text{ が平方因子をもつとき}) \end{cases}$$

で定義する。このとき次を示せ；

(i) m, n が互いに素 $\Rightarrow \mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \geq 2) \end{cases}$

(iii) **Möbius の第一反転公式;** $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ に対して、

$$\sum_{d|n} f(d) = g(n) \iff f(n) = \sum_{d|n} g(n/d)\mu(d).$$

(iv) $\mathrm{Re}(s) > 1$ において、$\displaystyle\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = 1,$ ここで $\zeta(s)$ は Riemann の ζ-関数：$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. 上の等式から、$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ に零点をもたないことがわかる。

(ii) のヒント：$\sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = (1-1)^n = 0.$

(12.10.91-3)

[335] $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ を Euler の関数 ([331]) とする。次を示せ；

(i) n の約数 d に対して、$\varphi(n/d) = \sharp\{x \in \mathbb{N}^*;\ 1 \leq x \leq n,\ (x, n) = d\}$, ここで、$(x, n)$ は x と n の最大公約数をあらわす。

(ii) $\displaystyle n = \sum_{d|n} \varphi(d).$

(iii) φ の Dirichlet 級数： $\zeta(s;\varphi)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)n^{-s}$ は $\mathrm{Re}(s)>2$ で局所一様に絶対収束し、Riemann's zeta function $\zeta(s)$ ([334]) と次の関係にある；$\zeta(s;\varphi)=\zeta(s-1)/\zeta(s)$. ヒント：(ii) と Möbius の反転公式 ([334]-(iii)) を用いて φ と Möbius' function μ の関係式をつくれ。

(12.14.91-2)

[336] Riemann の zeta-function ; $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, $\mathrm{Re}(s)>1$ について次を示せ；

(i) $\zeta(s)=s\int_1^{\infty}\frac{[x]-x-\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(s)>1$.

(ii) $\zeta(s)$ は右半面；$\{s\in\mathbb{C};\mathrm{Re}(s)>0\}$ に meromorphic に解析接続される。

(iii) Euler の等式（[37]）を用いて次の不等式を示せ；

$$\zeta(a)^3|\zeta(a+ib)|^4|\zeta(a+2ib)|\geq 1,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a>1$$

ヒント；$(1-z)^{-1}=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^n/n\right)$, $(|z|<1)$ また $3+4\cos\theta+\cos 2\theta=2(1+\cos\theta)^2\geq 0$.

(iv) $\mathrm{Re}(s)\geq 1\Rightarrow\zeta(s)\neq 0$.

(5.23.92-1)

[337] Riemann の zeta-function について不等式；

$$\exists c>0,\ \forall a\in(1,2),\ \forall b\in\mathbb{R}$$
$$|\zeta(a+ib)|\geq\frac{c}{1+b^4}\quad\cdots(*)$$

を示そう。$(*)$ は素数定理（[338]) の証明 ([339]）の中で重要な役割を果たす。

(i) $(a,b)\in(1,2)\times[-1,1]$ で $(*)$ を示せ。（[336]-(iv) 参照）

次に $a\in(1,2)$, $|b|\geq 1$ の場合を考える。以下で $c_1,c_2,\cdots$ は適当な正定数で (a,b) に関係しないように選ぶものする。

(ii) $|\zeta(a+ib)|\leq c_1|b|$, $|\zeta(a)|\leq\frac{c_2}{a-1}$

(iii) $|\zeta'(a+ib)|\leq c_3|b|$

(iv) $1<x\leq a\Rightarrow|\zeta(a+ib)|\geq c_4(x-1)^{3/4}|b|^{-1/4}$

(v) $\forall a,\forall x\in(1,2)$ に対して $|\zeta(a+ib)|\geq c_4(x-1)^{3/4}|b|^{-1/4}-c_3|b|(x-1)$

ヒント；$a\leq x$ の場合、$\zeta(x+ib)=\zeta(a+ib)+\int_a^x\zeta'(y+ib)dy$.

(vi) (v) で $x=1+c_5|b|^{-5}$ と置くことにより $(*)$ を結論せよ。

(6.5.92-1)

[338] 次の関数 $\Lambda:\mathbb{N}^*\to[0,\infty)$ を von-Mangoldt's function と言う；

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & n=p^k\ ;\ p\text{ は素数},\ k\in\mathbb{N}^*\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

更に $x\geq 1$ に対して、$\pi(x)$ を x 以下の素数の個数, $Q(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\Lambda(n)$ とする。次の関係式を示せ ；

(i) $Q(x) \le \pi(x)\log x \le x^{1-\delta}\log x + \frac{Q(x)}{1-\delta}, \quad \forall\delta \in (0,1)$.

(ii) $\varliminf_{x\to\infty} \dfrac{Q(x)}{x} \le \varliminf_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x/\log x} \le \varlimsup_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x/\log x} \le \varlimsup_{x\to\infty} \dfrac{Q(x)}{x}$.

コメント；(ii) によれば、もし漸近式；$\lim_{x\to\infty} \dfrac{Q(x)}{x} = 1$ を示すことが出来れば素数定理;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

が証明される。

(iii) $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d), \quad n \in \mathbb{N}^*$.

(iv) $\mathrm{Re}(s) > 1$ において、$\zeta(s;\Lambda) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ は絶対収束して、以下の等式を満たす；

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \zeta(s;\Lambda) \\ &= s\int_2^{\infty} \frac{Q(x)}{x^{s+1}} dx \end{aligned}$$

(6.5.92-2)

[339] 以下の順序で素数定理（[338]-(ii), コメント）の証明を完成せよ。

(i) 関数：$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$, は $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) \ge 1\}$ を含む open set 上で analytic．但し、$\zeta(s)$ は Riemann の zeta-function （cf.[336]-(i),(ii)）．

(ii) [337] の結果から次の評価式をうる； $\sup\{|f(a+ib)|;\ a \in (1,2)\} \le \mathrm{const.}(1+b^4)$.

(iii) [338]-(iv) から等式:$f(s) = \int_0^{\infty} \{e^{-y}Q(e^y) - 1\}e^{-y(s-1)}dy, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$ を得る。ただし、$Q(x)$ は von-Mangoldt's function Λ （[338]）の総和関数。

(iv) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $\varphi(b)f(1+ib) \in L^1(\mathbb{R})$ かつ次式が成立する；

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx}\varphi(b)f(1+ib)db = \int_0^{\infty} \hat\varphi(x-y)e^{-y}Q(e^y)dy - \int_0^{\infty} \hat\varphi(x-y)dy,$$

ただし、ここでは、$\hat\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x)\varphi(x)dx$ とする。

(v) 素数定理の証明を完成せよ。

ヒント；今、$0 < \alpha < \beta$ が与えられたとして $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\hat\varphi = 1$ on $[-\alpha,\alpha]$, $\hat\varphi = 0$ outside $[-\beta,\beta]$ となるようにとる。そうすると次のことがわかる；

$$\begin{aligned} 2\alpha &< \int_{-\infty}^{\infty} \hat\varphi(-y)dy \\ &= \varliminf_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \hat\varphi(x-y)e^{-y}Q(e^y)dy \\ &\le 2\beta e^{2\beta} \varliminf_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{x}. \end{aligned}$$

従って、$\dfrac{\alpha}{\beta}e^{-2\beta} \le \varliminf_{x\to\infty} \dfrac{Q(x)}{x}$.

(6.5.92-4)

[340] $m=1,2,\ldots$ に対し

$$\begin{aligned}&(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})=\{0,1,\cdots,m-1\};\\&(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}=\{x\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\text{ のうち } m \text{ と互いに素な数}\quad\};\\&(\mathbb{Z}^2/m\mathbb{Z})^{\times}=\{x^2;x\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}\}\end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ は mod m の演算で加法群、$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ は mod m の演算で乗法群をなす。また集合 $(\mathbb{Z}^2/m\mathbb{Z})^{\times}$ は mod m での平方剰余と呼ばれる。以下を示せ；

(i) p が奇素数なら、$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}=\bigcup_{y\in(\mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z})^{\times}}\{\sqrt{y},-\sqrt{y}\};$ disjoint union. 従って $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ の中には平方剰余と平方非剰余がちょうど半分ずつある。

(ii) 奇素数 p に対して次式で定義される写像 $(\cdot/p):(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}\to(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\times}$ を Legendre symbol というが、これは準同型である；

$$\left(\frac{x}{p}\right)=\begin{cases}+1 & x\in(\mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z})^{\times}\\-1 & x\notin(\mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z})^{\times}.\end{cases}$$

(iii) $\mathbf{e}_x(y)=\exp(2\pi\mathbf{i}xy),\ g_m(x)=\sum_{y\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}\mathbf{e}_{x/m}(y^2)$ とする。g_m を Gaussian sum と言う。$m,n\in\mathbb{N}^*$ が互いに素なら、$g_{mn}(1)=g_m(n)g_n(m)$. ヒント；次の同型写像に注意；

$$(y,z)\mapsto ny+mz;\quad(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$$

(iv) p を奇素数とするとき；$\left(\frac{x}{p}\right)=\frac{g_p(x)}{g_p(1)},\quad\forall x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. ヒント；次の順序で考えよ。

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}\mathbf{e}_{x/p}(y)=0,\quad\forall x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}.\\&g_p(x)=1+2\sum_{y\in(\mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z})^{\times}}\mathbf{e}_{x/p}(y),\quad\forall x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times},\\&g_p(x)=\sum_{y\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}\left(\frac{y}{p}\right)\mathbf{e}_{x/p}(y),\quad\forall x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times},\end{aligned}$$

但し、２番目の式では $(\frac{0}{p})=0$ とする。

(4.27.92-2)

[341] この問題の目的は、Legendre symbol （[340] 参照）についての**平方剰余の相互法則**；

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},\quad p,q \text{ は奇素数}\tag{0.23}$$

を示すことである。

(i) まず $p,q=1,2,\ldots$ に対し

$$\sum_{y=0}^{p-1}\exp\left(-\frac{2q}{p\mathbf{i}}y^2\pi\right)=e^{\pi\mathbf{i}/4}\sqrt{\frac{p}{2q}}\sum_{y=0}^{2q-1}\exp\left(-\frac{p\mathbf{i}}{2q}y^2\pi\right)\tag{0.24}$$

を証明しよう (**Landsberg-Schaar identity**). 示すべき等式の左辺、右辺をそれぞれ L, R とする。また、$t>0$ に対し

$$
\begin{aligned}
L(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\pi n^2 (t+\frac{2q}{\mathbf{i}p})\right) \\
S(t) &= \left(t+\frac{2q}{\mathbf{i}p}\right)^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{t+(2q/\mathbf{i}p)}\right), \\
R(t) &= \left(t+\frac{2q}{\mathbf{i}p}\right)^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\pi n^2 \frac{t}{t^2+4(q/p)^2} - \pi n^2 \frac{p\mathbf{i}}{2q}\right).
\end{aligned}
$$

とする。このとき、(a) $L(t)=S(t)$ （ヒント：問題 [304]-(iii) ）(b) $\lim_{t\to 0} t^{1/2} L(t) = \frac{1}{p} L$, (c) $\lim_{t\to 0} t^{1/2} R(t) = \frac{1}{p} R$, (d) $\lim_{t\to 0} t^{1/2}(S(t)-R(t)) = 0$, 従って、$L=R$.

(ii) 奇素数 p に対し $g_p(1) = \sqrt{p}(\mathbf{i})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$ を示せ。(ヒント：(0.24) と [340]-(iv) の関係を用いる）

(iii) (0.23) を示せ。

(4.27.92-3)