線形代数学 I

浪川　幸彦

July 7, 2006

4　行列の基本変形と連立一次方程式の解法

演習（第２回）解答

・以下の解答はあくまでも例です。
・解答を自己採点の上，提出して下さい。点数を付ける必要はありません。こちらで確認・記録した上で，次回返却します。
・大切なことは，どれだけできたか，よりもむしろ，どれだけ自分自身を評価・反省できたか？です。
・間違った場合は，消してしまわないで，間違った原因を見出し，別の色で訂正して下さい。
・途中で止まってしまった場合も，そのまま追記しないで，なぜその先にいけなかったかを別の色で注記した上で，追記してください（理由例：時間切れ，○○が思い出せなかった）

問題１

次の行列を基本変形によって標準形に変換し，階数を求めよ：

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行-1 行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行-1 行}\times 2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 列による掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 列による掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

答え

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{階数は } 2$$

問題２

次の行列の階数を求めよ：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 列+2 列+3 列}} \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行-1 行, 3 行-1 行}} \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

答え

$a \neq -2,\ 1$ のとき階数 3,

$a = -2$ のとき階数 2,

$a = 1$ のとき階数 1.

Remark. このように行または列の和が等しいときはそれを用いて掃き出すとよい（ボーナス問題参照）。

問題３

次の行列の逆行列を求めよ：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 1 行による掃き出し
2. 2 行による掃き出し
3. 3 行による掃き出し
4. 4 行による掃き出し

答え

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題４

次の一次方程式系を解け：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -1 \end{cases}$$

解答例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-2),\,3\text{行}+2\text{行}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+3\text{行}\times(-3),\ 2\text{行}+3\text{行}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times 2,\ \times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

答え　$x_3 = t$ と置けば

$$\begin{cases} x_1 &= 1+2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= t \\ x_4 &= 0 \end{cases}$$

問題5

次の一次方程式系が解を持つ条件を求め，解を持つ場合にその解を求めよ：

$$\begin{cases} x+2y+3z &= a \\ 2x+3y+4z &= b \\ 3x+4y+5z &= c \end{cases}$$

解答例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & b \\ 3 & 4 & 5 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-2),\ 3\text{行}+1\text{行}\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & -2 & b-2a \\ 0 & -2 & -4 & c-3a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & c+a-2b \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & c+a-2b \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2b-3a \\ 0 & 1 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{pmatrix}$$

答え　解を持つ必要十分条件は $a-2b+c=0$. このとき $z=t$ と置けば

$$\begin{cases} x &= -3a+2b+t \\ y &= 2a-b-2t \\ z &= t \end{cases}$$

問題 6 [ボーナス問題]（時間が余った人のために）

次の行列の階数を求めよ：

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

略解

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{1\,列+2\,列+3\,列} \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{2\,行-1\,行,\,3\,行-1\,行} \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{pmatrix}$$

$(c-b)(b-c)-(a-c)(a-b)=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$ に注意すると
［注意深く場合分けすれば，それでもできる］
答え
1. $a+b+c \neq 0,\ a=b=c$ でない．階数 3
2. $a+b+c \neq 0,\ a=b=c$. 階数 1
3. $a+b+c=0,\ a=b=c$ でない．階数 2
4. $a+b+c=0,\ a=b=c$, すなわち $a=b=c=0$．階数 0

4.2　一次方程式系（Gauss の消去法）

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$$

と書かれる一次方程式系を考える。ここで行列 A は (m,n) 型行列，すなわち未知数が n 個，方程式の数が m 個であるとする。以前の復習をする。
次の諸定理が得られる。

Theorem 4.2.2 (Text 2.5.5). 上の方程式系が解を持つ必要十分条件は，拡大行列を $\tilde{A}$ とするとき，$r(A)=r(\tilde{A})$ である。

Theorem 4.2.3 (Text 2.5.2). 斉次一次方程式系の解は $n-r(A)$ 個のベクトルの任意の一次結合の形で書ける。

Theorem 4.2.4 (Text 2.5.4). 一般の一次方程式系の解を $\boldsymbol{x}_0$ とすれば，任意の解はこれに，同じ係数行列を持つ斉次一次方程式系の任意の解を加えることで得られる。

Remark. すなわち $r(A)$ は方程式の（本質的な）束縛条件の数であり，解を持つならば，その解は $n-r(A)$ 個の任意パラメータを持つ形で書ける。

連絡先等

- 研究室：理１号館 506 号室
- オフィスアワー：木曜日 11：30〜12：30（それ以外の場合は事前にアポを）
- E-mail : namikawa@math.nagoya-u.ac.jp
- Tel.: (052-789-) 4746
- Website : http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜namikawa/