アーベル関数論
［複素解析学特論 II］

浪川　幸彦

May 31, 2006

2　アーベル関数論

2.2　複素トーラス

2.2.3　実トーラス上の De Rham の定理・Hodge の分解定理

まず実トーラス $M = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m = (S^1)^m$ を考えよう。

そのために微分多様体の一般論からの準備をする。M 上の p 次（複素）微分形式を考える。すなわち各局所座標 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ 上

$$\phi(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} \phi_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{1}$$

と書ける。ここでは断らない限り無限回微分可能なもの（すなわち各 $\phi_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ が無限回微分可能）を考える。この全体のなす（複素）ベクトル空間を $\mathcal{D}^p(M)$ と書く。関数 $f(x)$ に対し，その外微分 df を

$$(df)(x) = \sum_{i=1}^{m} (\partial f/\partial x_i)(x) dx_i$$

と定義するとき，微分形式の外微分は

$$(d\phi)(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} d\phi_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

で定義され，これは $(p+1)$ 次微分形式になる。

Proposition 2.2.1. 1) $\phi \in \mathcal{D}^p(M)$ および $\psi \in \mathcal{D}^q(M)$ に対し

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi$$

が成り立つ。
2) $d \circ d = 0$.

Definition 2.2.2.

$$H^p_{DR}(M) = \frac{\{\phi \in \mathcal{D}^p(M); d\phi = 0\}}{\{d\psi; \psi \in \mathcal{D}^{p-1}\}}$$

を M の p 次 **De Rham コホモロジー群**とよぶ。

Theorem 2.2.3 (De Rhem の定理). M をコンパクト（可微分）多様体とするとき

$$H^p_{DR}(M) \cong H^p(M, \mathbb{C}).$$

Definition 2.2.4. $\pi : X^* \to X$ を可微分写像として，局所座標で

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) = (f_1(x_1^*,\ \ldots\ x_{m^*}^*),\ \ldots,\ f_m(x_1^*,\ \ldots\ x_{m^*}^*))$$

と書くとき，

$$(\pi^* dx_i)(x^*) = \sum_j (\partial f_i / \partial x_j^*)(x^*) dx_j^*(x^*)$$

とし，一般の微分形式に対しては

$$(\pi^*\phi)(x^*) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} \phi_{i_1 i_2 \cdots i_p}(\pi(x^*)) \pi^* dx_{i_1}(x^*) \wedge (\pi^* dx_{i_2})(x^*) \wedge \cdots \wedge (\pi^* dx_{i_p})(x^*)$$

と定義すれば，これは $\pi^* : \mathcal{D}^p(X) \to \mathcal{D}^p(X^*)$ を定める。これを X^* への**引き戻し**とよぶ。

Proposition 2.2.5. 引き戻しは外微分と可換である：$\pi^*(d\phi) = d(\pi^*\phi)$.

Corollary 2.2.6. 可微分写像は De Rham コホモロジーの準同型

$$\pi^* : H^p_{DR}(M) \to H^p_{DR}(M^*)$$

を定める。これは函手的である。

さて実トーラス M に戻る。複素トーラスと同様，自然な写像 $\pi : M^* = \mathbb{R}^m \to M$ を考える。

Definition 2.2.7. $a \in \mathbb{R}^m$ に対し，これの定める平行移動を $T_a : x \to x + a$ と表す。微分形式 ϕ が $(T_a)^*\phi = \phi$ であるとき，a 不変であると言う。L を $\mathbb{R}^m$ の部分加群とするとき，この全ての元に対して不変であるとき ϕ は L 不変であるという。$\mathbb{R}^m$ 不変であるとき，単に不変であるという。

Remark. 関数 $f(x)$ を 0 次の微分形式とみなすとき，これが a 不変であることは，a を周期とすることに他ならない。

Proposition 2.2.8. M^* 上の微分形式 $\phi(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} \phi_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ において，すべての $\phi_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x)$ が $L(=\mathbb{Z}^m)$ 不変であるとき，一意的に M 上の微分形式を定める。逆に M 上の微分形式の M^* への引き戻しは，全てこの形に書かれる。

Corollary 2.2.9. M^* 上の不変微分形式 $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m$ は M 上の微分形式 $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_m$ を $\pi^*\omega_i = dx_i$ との条件で一意的に定める。

一般に $U \subset M$ 上の微分形式は

$$\phi = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \phi_{i_1\cdots i_p} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p},\ \ \phi_{i_1\cdots i_p} \text{ は } U \text{ 上の関数}$$

と一意的に書き表せる。

Theorem 2.2.10. $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}\}$ は $H^p_{DR}(M)$ の基底である。

Proof. $m = 1$ の場合に示せば十分である。$p = 0$ の場合は明らか。もし $\omega = df$（f は周期関数）と書けたとすると，$\pi^*\omega = dx$ から $f(x) = x + c$ でこれは周期的でない。一方任意の $\phi(x)\omega$ が $\int_0^1 \phi = 0$ であれば，$f(x) = \int_0^x \phi(t)dt$ とすると，条件から $f(x)$ は周期的で，$df = \phi\omega$.　一般の場合はこれから従う。

さてこの定理を Hodge による調和形式の理論の形で書き直そう。後で用いる必要上正定値（対称）二次形式

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$$

を一つ取って定めておく。

Remark. これは M 上に平行移動不変な Riemann 計量を定めることに対応している。

Definition 2.2.11. 1) $\phi \in \mathcal{D}^p(U)$ に対し，(1) 式の記号のもとで，

$$\Delta\phi = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left(-\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \partial_i \partial_j \phi_{i_1\cdots i_p} \right) \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}.$$

2) $\phi \in \mathcal{D}^p(M)$ に対し，(1) 式の記号のもとで，

$$H\phi = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left(\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 dt_m \phi_{i_1\cdots i_p} \right) \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}.$$

Remark. いずれも p 次形式をそれ自身に写すが，前者は局所的であり，後者は大域的であることに注意。

Proposition 2.2.12. $H^2 = H$. すなわち H は射影作用素である。

Theorem 2.2.13 (Hodge の分解定理). $M = M^*/L$ を（実）トーラスとすると，$\mathcal{D}^p(M)$ 上の線型変換 G で次の条件を満たす者が存在する：

$$\Delta G\phi = G\Delta\phi = \phi - H\phi, \quad HG\phi = GH\phi = 0.$$

中間レポート（再記）

中間レポート課題. Jacobi の楕円関数論，または Jacobi の（１変数）テータ関数論について，その概要を述べよ。主な定理についてはその証明の概要も記すこと。

- 提出期限：６月７日（水）
- 提出方法：pdf ファイルをメールで送るか，プリントアウトを提出。メールの送り先は

  namikawa@math.nagoya-u.ac.jp

- 書くに当たって参考にした文献を明記すること。これが明記されず，類似性が明らかになった場合には，不可とする。また参考文献をそのまま引き写したような場合も不可。必ず内容を理解した上で，自分の言葉で言い直すこと。
- (La)TeX によって書くことを強く推奨する。特に修士２年生は修士論文の練習と思って必ずそうすること。

Excercise の講評

Exercise 7. 零点と極の位数とが等しいことをまず示す必要があります。$z-a$ で掛けたり割ったりしているのは，零点や極を**無限遠に集めている**に過ぎないことに注意してください。
Exercise 8. $\wp(u)$ を次々に微分することにより，n 位の楕円関数で周期点のみに極を持つものが作れることから，そこでの主部を考えることでこれらの一次結合でこうした楕円関数を表せること，次いで $\wp(u)$ の高階微分が $\wp(u)$, $\wp'(u)$ の多項式として表せることの２段階で証明します。

お知らせ

ウェブサイトを開設しました：

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~namikawa/

講義で配布したプリントを pdf ファイルで取得できます。