アーベル関数論
［複素解析学特論 I］

浪川　幸彦

April 12, 2006

1　楕円関数論

1.1　楕円関数論の歴史的展開

1.1.1　レムニスケート積分の加法公式

楕円関数論の出発点は（Jacobi によれば）レムニスケート積分が，初等関数の形では書けない（らしい）のに三角関数と同様な加法公式が成立するという事実の発見（Fagnano (1682-1766)，Euler (1707-83) が一般化）にあった。

Definition 1.1.1. レムニスケート とは方程式 $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ （直交座標），あるいはこれと同値な方程式 $r^2 = \cos 2\theta$（極座標）で定義される平面曲線のことを言う。

この名称はラテン語 *lemnisatus*（リボン飾り）から来ている。容易に計算できるように：

Proposition 1.1.2. レムニスケートの弧長は次の積分で書ける：

$$u = \int_r^{r'} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Exercise 1. これを証明せよ。

Theorem 1.1.3 (レムニスケート積分に対する加法公式). $z = \dfrac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}$ とおけば

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

この公式は三角関数の加法定理を用いて証明される，次の定理の類似となっている：

Theorem 1.1.4 (円周積分に対する加法公式). $z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ とおけば

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

1.1.2 Gauss の楕円関数論

Gauss (1777-1855) は楕円関数論において次の二つの決定的な寄与を行った。

- 楕円積分の逆関数を考えた；
- 変数および値を複素数領域で考えた。

まず前者によって三角関数に類似する関数を次のように得ている。

Definition 1.1.5. 上記のレムニスケート積分 $u = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ に対し

$$x = sl(u) = cl(\frac{\varpi}{2} - u)$$

とおく。ここで

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Remark. sl (resp. cl) は “sinus lemniscatus” (resp. “cosinus lemniscatus”) の略である。いずれも **レムニスケート関数**と呼ばれる。

Proposition 1.1.6. $sl(u),\ cl(u)$ は次のようにおくことで，$[-\varpi/2, \varpi/2]$ 上の関数となる：

$$sl(-u) = -sl(u),\ \ cl(-u) = cl(u).$$

Proposition 1.1.7 (関数等式：Fagnano の関係式). 次の等式が成り立つ：

$$cl(u) = \sqrt{\frac{1-(sl(u))^2}{1+(sl(u))^2}},$$

あるいはこれと同値であるが

$$(sl(u))^2(cl(u))^2 + (sl(u))^2 + (cl(u))^2 - 1 = 0.$$

Proof. $u = \varpi/2,\ v = -w$ とおいて，加法定理 **Thorem (1.1.3)** を用いる。ただし $sl(u)$ は奇関数であることに注意。

Theorem 1.1.8 (レムニスケート関数の加法定理).

$$sl(u \pm v) = \frac{sl(u)cl(v) \pm cl(u)sl(v)}{1 \mp sl(u)sl(v)cl(u)cl(v)}$$

$$cl(u \pm v) = \frac{cl(u)cl(v) \mp sl(u)sl(v)}{1 \pm sl(u)sl(v)cl(u)cl(v)}.$$

Exercise 2. **Theorem (1.1.3)** から **Theorem (1.1.8)** を導け。

Proposition 1.1.9 (周期性). レムニスケート関数は実数全体 $\mathbb{R}$ に周期 2ϖ の関数として次のように拡張できる*:*

$$sl(u + \varpi/2) = cl(u), \qquad cl(u + \varpi/2) = -sl(u),$$

$$sl(u + \varpi) = -sl(u), \qquad cl(u + \varpi) = -cl(u),$$

$$sl(u + 2\varpi) = sl(u), \qquad cl(u + 2\varpi) = cl(u),$$

$$sl(n\varpi) = 0, \qquad sl((n + \frac{1}{2})\varpi) = (-1)^n,$$

$$cl(n\varpi) = (-1)^n, \qquad cl((n + \frac{1}{2})\varpi) = 0.$$

1.1.3 等分問題と複素数への拡張

Theorem 1.1.10 (倍公式).

$$sl(2u) = 2sl(u)cl(u)\frac{1 + (sl(u))^2}{1 + (sl(u))^4},$$

$$sl(3u) = sl(u)\frac{3 - 6(sl(u))^4 - (sl(u))^8}{1 + 6(sl(u))^4 - 3(sl(u))^8},$$

$$sl(5u) = sl(u)\frac{5 - 2(sl(u))^4 - (sl(u))^8}{1 - 2(sl(u))^4 + 5(sl(u))^8} \cdot \frac{1 - 12(sl(u))^4 - 26(sl(u))^8 + 52(sl(u))^{12} + (sl(u))^{16}}{1 + 52(sl(u))^4 - 26(sl(u))^8 - 12(sl(u))^{12} + (sl(u))^{16}},$$

etc.

さてここで（特殊）**等分問題**，すなわちレムニスケート曲線を同じ長さの n 個の弧に分割することを考える。すると n 等分問題から上の公式によって n^2 次方程式が得られる。円周の等分の場合には n 次方程式が得られることに注意しよう。 これらの方程式は n 個の実根と $n^2 - n$ 個の虚根を持つ。

Problem これらの虚根は何を意味するか？

おそらくこの問題から Gauss は複素領域で考えるという第２のアイデアを得たのであろう。それをうかがわせるのは彼の有名な「数論」(“Disquisitiones arithmeticae”) の円周等分方程式を扱っているところ（第７章）にある次のような言葉である：

“Ceterum principia theoriae, quam expone aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt, e.g. ad eas, quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ pendent, ...”

「ところで，われわれがここで明らかにしようとしている理論原理は，ここに述べるよりもずっと広く成立する。すなわち円関数のみならず，もっと多くの超越関数，例えば積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ から導ける関数に対しても適用することが可能なのである。…」

Gauss がここで述べている「原理」とは例えば次の有名な定理である：

Theorem 1.1.11 (Gauss). n が $2^m p_1 \cdots p_k$，ただし p_i は相異なる Fermat 素数，すなわち $2^{2^m}+1$ の形の素数であるとき，正 n 角形は定規とコンパスで作図可能である。

Gauss はこう述べたのみで，彼の楕円関数論を生前公表しなかったが，この言葉に示唆を受けて Abel と Jacobi は楕円関数の研究を始め，同じ年 1827 年に最初の論文が出版されて，近代の楕円関数論が文字通り誕生した。

ここではどのように複素数関数へと拡張するかのみを示しておく：

Theorem 1.1.12. レムニスケート関数は次の式により全複素数上の二重周期有理型関数へと拡張される：

$$sl(u+iv) = \frac{sl(u) + icl(u)sl(v)cl(v)}{cl(v) - icl(u)sl(u)sl(v)},$$
$$cl(u+iv) = \frac{cl(u) - isl(u)sl(v)cl(v)}{cl(v) - isl(v)sl(u)cl(u)}.$$

Proof. 次に注意する：

$$\frac{d(it}{\sqrt{1-(it)^4}} = i\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$
$$cl(iv) = 1/cl(v).$$

Proposition 1.1.13.

$$\begin{aligned} sl(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = (m+ni)\varpi, \\ sl(z) = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad z = ((2m+1)+(2n+1)i)\varpi/2, \\ cl(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = ((2m+1)+2ni)\varpi/2, \\ cl(z) = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad z = (2m+(2n+1)i)\varpi/2. \end{aligned}$$