団代数と団散乱図

中西　知樹 (Tomoki Nakanishi)

Nagoya University

代数学シンポジウム August 31, 2022

ver. 2022.9.1

プログラムでアナウンスされたタイトルは「団代数と団散乱図式」であったが, 講演およびスライドでは scattering diagram の訳語を「散乱図式」から「散乱図」に変更した.

本講演の詳細は以下をご参照ください.

[N21] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part III. Cluster scattering diagrams*, preliminary draft for a monograph, arXiv:2111.00800, v4, 108 pp.

講演予定

背景

- 団代数 (cluster algebras) の研究
  - 基礎：団代数理論そのものの研究 (本講演のテーマ)
  - 応用：さまざまな分野との関連の研究

- 団代数理論の歴史はやわかり
  - Fomin-Zelevinsky-(Berenstein) [CA1 (02)], [CA2 (03)], [CA3 (05)], [CA4 (07)]

    団代数理論の基礎の整備

    （Laurent 現象，有限型の分類，分離公式，など）
  - 2014 年ごろまでにわかったこと

    団代数の理論にはなかなか渡れぬ 2 つの大きな川がある
    - C 行列の符号同一性予想
    - Laurent 正値性予想

    川の向こうには良い結果がある. (双対性, 脱トロピカル化, 同期性, など)
  - Gross-Hacking-Keel-Kontsevich [GHKK18] が上の 2 つの予想を同時に解決（橋をかけた）

    （プレプリント 2014，出版 2018 (JAMS)）

    用いた手法：散乱図（scattering diagram）

ポイント: [GHKK] は何を示したか

団代数（団パターン）は**団散乱図**（cluster scattering diagram (CSD)）に埋め込まれる.

団散乱図に関する参考文献

散乱図：Scattering diagrams (Wall-crossing structures):
ホモロジカル・ミラー対称性の研究（特に Calabi-Yau 多様体のトーリック縮退の逆問題, Donaldson-Thomas 不変量）に関連して導入された.

[KS06] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Affine structures and non-Archimedean analytic spaces*, Prog. Math. 244 (2006), 321–385; arXiv:math/0406564

[GS11] M. Gross, B. Siebert, *From affine geometry to complex geometry*, Annals of Math. 174 (2011), 297–362, arXiv:math/0703822

[KS14] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Wall-crossing structures in Donaldson-Thomas invariants, integrable systems and mirror symmetry*, in Homological mirror symmetry and tropical geometry, Lect. Notes Unione Ital., vol. 15, Springer, 2014, pp. 197–308; arXiv:1303.3253 [math.AG]

団散乱図：Cluster scattering diagrams:
団散乱図の導入と団代数との関係

[GHKK18] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), 497–608, arXiv:1411.1394 [math.AG]

団散乱図のレビュー（本講演のメインの文献）: ([KS14]+[GHKK18])/2 + new results

[N21] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part III. Cluster scattering diagrams*, preliminary draft for a monograph, arXiv:2111.00800, v4, 108 pp.

団代数 (団パターン) vs 団散乱図

定義. 整数正方行列 B は**反対称化可能** (skew-symmetrizable)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある正有理対角行列 D が存在して DB は反対称行列

また, このとき D を B の**反対称化子** (skew-symmetrizer) という. (D は一意的ではない.)

例.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad DB = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって, B は反対称化可能.

	団代数 / 団パターン 代数的組み合わせ論的構造	団散乱図 (CSD) 代数的幾何的構造
初期データ	B: 反対称化可能 $r \times r$ 整数行列	B: 反対称化可能 $r \times r$ 整数行列
(+ 補足データ)	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$: 変数の組 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$: 変数の組	N: rank r の格子 $e_1, \dots, e_r$: N の基底
構成の原理	変異 (mutation)	整合性 (consistency)
背後にある構造	なし	構造群 G

[GHKK18]: 団代数（団パターン）は団散乱図に「埋め込まれる」

ポイント: 団散乱図を考える利点

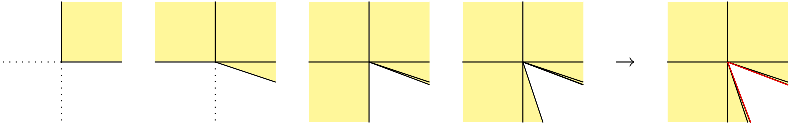
- 構造群 G が団散乱図を局所的かつ大域的に制御する.
- 群 G では無限積が扱える. $\Longrightarrow$ 変異では越えられない壁 (wall) を越えられる.
- 団代数 (団パターン) のより内在的な理解を与える.

団代数（団パターン）は団散乱図に「埋め込まれる」とは

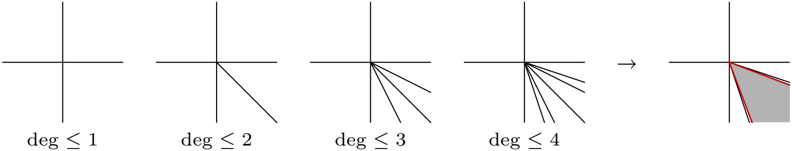
例: 初期データ

$$r = 2, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

G 扇 (G-fan) = 団パターンの G 行列のなす扇 = 団パターンのトロピカル化 = 団パターンを再現可能



団散乱図 (壁 (wall) の台のみを表示): 次数 (degree) に関して帰納的に構成される



「壁」が次々と放出される様を粒子の散乱に例えて “scattering diagram” と呼んだと思われる.

ポイント: 団パターンと団散乱図の関係

- 団散乱図は G 扇 (したがって団パターン) の全てを知っている.
- 加えて, 団散乱図は G 扇の外側にも複雑な構造を持つ. (the Badlands)
- 団パターンと団散乱図は「一体のもの」としてみなすべき.

the Badlands (the dark side)

Badlands National Park, South Dakota, USA

Lie 代数 $\mathfrak{g}_\Omega$

しばらく, 初期データの反対称化可能行列 B は忘れる.

- 初期データ

$\Omega = (\omega_{ij})$: 反対称 $r \times r$ 有理行列
$N \simeq \mathbb{Z}^r$: ランク r の格子
$e_1, \dots, e_r$: N の基底
これらに対して以下が定まる.

- (a). 反対称双線形形式 $\{\cdot, \cdot\} : N \times N \to \mathbb{Q}$:

$$\{e_i, e_j\} := \omega_{ij}.$$

- (b). N の正元のなす半群

$$N^+ := \left\{ \sum_{i=1}^r a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \sum_{i=1}^r a_i > 0 \right\}.$$

- Lie 代数 $\mathfrak{g}_\Omega$

上のデータに付随する N^+ 次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}_\Omega$ を以下で定める.

- 基底 (生成元): X_n $(n \in N^+)$

$$\mathfrak{g}_\Omega = \bigoplus_{n \in N^+} \mathbb{Q} X_n.$$

- Lie 括弧

$$[X_n, X_{n'}] = \{n, n'\} X_{n+n'}.$$

これは, Jacobi 恒等式をみたすことが簡単に確かめられる.

以下で述べることはある意味全て上の Lie 括弧の帰結.

群 G_Ω

- 完備化 $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$

$n = \sum_i a_i e_i \in N^+$ に対して次数 $\deg(n)$ を

$$\deg(n) = \sum_{i=1}^{r} a_i$$

と定めると, $\mathfrak{g}_\Omega$ を deg に関して完備化した Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$ が定まる. $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$ の元は以下の形をしている.

$$\sum_{n \in N^+} c_n X_n \quad \text{(無限和も許す)}$$

- 群 G_Ω

群 G_Ω を以下で定める.

$$G_\Omega = \{\exp(X) \mid X \in \widehat{\mathfrak{g}}_\Omega\}$$

ここで,

$$\exp : \widehat{\mathfrak{g}}_\Omega \xrightarrow{\sim} G_\Omega$$

は形式的な全単射であり, 積は以下の Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式により定める.

$$\begin{aligned} &\exp(X)\exp(Y) \\ &= \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \cdots\right). \end{aligned}$$

- Lie 代数の元 x の形式和 $\exp x = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k!$ のみたす関係式.
- $\widehat{\mathfrak{g}}$ は N^+-graded なので右辺の無限和は well-defined.

以上の G_Ω の構成は [KS14] による.
G_Ω の固有の名前は特にないが,（のちに定める散乱図の）**構造群** (structure group) と呼ぶ.

正規部分群 $G^{>\ell}$ と商群 $G^{\leq\ell}$

以下, 適宜 Ω を省略して G_Ω を G と表す.

- 正規部分群 $G^{>\ell}$

正の整数 ℓ に対して,

$$(N^+)^{>\ell} := \{n \in N^+ \mid \deg(n) > \ell\}$$

と定め,

$$\exp\left(\sum_{n \in (N^+)^{>\ell}} c_n X_n \right) \quad \text{(無限和も許す)}$$

という形の元全体のなす G の部分集合を $G^{>\ell}$ とおくと G の正規部分群となる.

- 商群 $G^{\leq\ell}$

上の $G^{>\ell}$ に対して,

$$G^{\leq\ell} := G/G^{>\ell}$$

と定める. このとき, 作り方より

$$G = \varprojlim G^{\leq\ell}$$

となる.

ポイント

G における無限積は $G^{\leq\ell}$ における有限積の極限で与えられる.

二重対数元

- 二重対数関数 (dilogarithm): Euler による.

$$\mathrm{Li}_2(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} x^j, \quad -\mathrm{Li}_2(-x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} x^j,$$

$$x\frac{d}{dx}(-\mathrm{Li}_2(-x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j = \log(1+x).$$

- 二重対数元：各 $n \in N^+$ に対して,

$$\Psi[n] = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} X_{jn} \right) \in G$$

と定め, これらを**二重対数元** (dilogarithm element) という.

- y-表現: 変数 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ の形式的冪級数環 $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$ に対して, X_n の作用を

$$X_n(y^{n'}) := \{n, n'\} y^{n+n'}$$

と定めると, これは $\widehat{g}$ の表現かつ微分 (derivation) であり, 群準同形写像

$$\rho_y : G \mapsto \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]), \quad \exp(X) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k!$$

を誘導する. これを G の y **表現**と呼ぶ. この作用のもとで

$$\Psi[n](y^{n'}) = y^{n'}(1+y^n)^{\{n,n'\}}$$ (団パターンの y 変数の変異 (mutation) の形)

ポイント: 二重対数元の意味

二重対数元 $\Psi[n]$ は団パターンにおける変異を G の言葉に翻訳したものである.

五角関係式

定理 [GHKK18, N21]

任意の $n', n \in N^+$ と $c, c' \in \mathbb{Q}$ に対して，以下の関係式が成り立つ.
(a). $\{n', n\} = 0$ のとき,

$$\textbf{可換関係式 (commutative relation))} \quad \Psi[n']^{c'}\Psi[n]^{c} = \Psi[n]^{c}\Psi[n']^{c'}.$$

(b). $\{n', n\} = c\ (\neq 0)$ のとき,

$$\textbf{五角関係式 (pentagon relation))} \quad \Psi[n']^{1/c}\Psi[n]^{1/c} = \Psi[n]^{1/c}\Psi[n+n']^{1/c}\Psi[n']^{1/c}.$$

証明: (a) $[X_n, X_{n'}] = \{n, n'\}X_{n+n'} = 0$. (b) y 表現を用いる. □
これは, 二重対数関数に対する**五角恒等式** (pentagon identity, Abel の恒等式)

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(y) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + \mathrm{Li}_2(1-xy) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{2} - \log x \log(1-x) - \log y \log(1-y) - \log\left(\frac{1-x}{1-xy}\right)\log\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)$$
$$(0 \le x, y \le 1).$$

の「代数化」とみなせる.

ポイント

二重対数元と五角関係式が (これから述べる) 団散乱図の主役である.

これは講演者の導入した観点である. [GHKK18] には, 二重対数元も五角関係式も「一言も」出てこない. (一方, [KS14] では, G_Ω の変種に対する二重対数元が出てくる.)

壁

引き続き, 初期データ:
$\Omega = (\omega_{ij})$: 反対称 $r \times r$ 有理行列
$N \simeq \mathbb{Z}^r$: ランク r の格子; $e_1, \dots, e_r$: N の基底
G_Ω: 上から定まる群

- いくつかの追加の定義
  - $M := \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^r$, $M_\mathbb{R} := M \otimes_\mathbb{R} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ とする. ($M_\mathbb{R}$ 内に散乱図が定義される.)
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を標準的ペアリング (の線形拡張) とする.
  - $n \in N^+$ に対して, 次元 $r-1$ の超平面 $n^\perp$ を以下で定める.

$$n^\perp := \{z \in M_\mathbb{R} \mid \langle n, z \rangle = 0\}.$$

  - $n \in N^+$ に対して, 「$n = tn'$ ($t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, n' \in N^+$) ならば, $t = 1$」が成り立つとき, n は**原始的** (primitive) という. N^+_{pr} を N^+ の原始的元の集合とする.
  - $n \in N^+_{\mathrm{pr}}$ に対して, G_n を $\exp(\sum_{j=1}^\infty c_j X_{jn})$ (無限和も可) という元全体のなす G の部分アーベル群とする. G_n を n の**平行部分群** (parallel subgroup) という.

- 壁

以下の三つ組 $\mathbf{w} = (\mathfrak{d}, g)_n$ を壁 (wall) という.
  - 法ベクトル：$n \in N^+_{\mathrm{pr}}$,
  - 台 (support)：$\mathfrak{d} \subset n^\perp$, $M_\mathbb{R}$ の次元 $r-1$ の錐 (cone): 強凸とは限らない
  - 壁元 (wall element)：$g \in G_n$

壁の台のこともしばしば壁という. (例: $M_\mathbb{R}$ の曲線が壁と交わる.)
例: $n \in N^+_{\mathrm{pr}}$ に対して, $\mathbf{w} = (n^\perp, \Psi[n])_n$ は壁である.

散乱図

- 散乱図
  - 壁の集まり $\mathfrak{D} = \{\mathbf{w}_\lambda = (\mathfrak{d}_\lambda, g_\lambda)_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ が以下の有限性条件をみたすとき**散乱図** (scattering diagram) という.

    有限性条件 (finiteness condition):
    任意の正整数 ℓ に対して, $\pi_\ell(g_\lambda) \neq \mathrm{id}$ が成り立つ λ は有限個である.
    (ただし, $\pi_\ell : G \to G^{\leq \ell} := G/G^{>\ell}$ は標準射影.)
  - 各 ℓ に対して, 以下の $\mathfrak{D}$ の部分有限集合 $\mathfrak{D}_\ell$ を $\mathfrak{D}$ の次数 ℓ への**縮小** (reduction) という.

$$\mathfrak{D}_\ell = \{\mathbf{w}_\lambda \in \mathfrak{D} \mid \pi_\ell(g_\lambda) \neq \mathrm{id}\}.$$

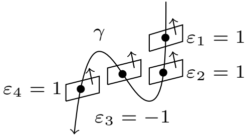
  - 壁の台の和集合 $\mathrm{Supp}(\mathfrak{D}) := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{d}_\lambda$ を $\mathfrak{D}$ **の台**という.
- 道順序積

散乱図 $\mathfrak{D}$ と $M_\mathbb{R}$ 内の適当な条件 (略) をみたすなめらかな曲線 γ (許容曲線という) に対して, **道順序積** (path-ordered product) $\mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma} \in G$ を以下で定める.
正整数 ℓ に対して, γ が $\mathfrak{D}_\ell$ の壁 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ と順に交わるとき,

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{D}_\ell,\gamma} = g_k^{\varepsilon_k} \cdots g_1^{\varepsilon_1},$$

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma} = \lim_{\ell\to\infty} \mathfrak{p}_{\mathfrak{D}_\ell,\gamma} \quad \text{(有限性条件より well-defined.)}$$

ただし, 交差符号 ε_i を以下の図のように定める.



整合的散乱図

- 散乱図の同値

散乱図 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}'$ は**同値** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の許容曲線 γ に対して，$\mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{D}',\gamma}$ が成り立つ

壁の台の分割・統合, 壁元の分解・統合などにより, 与えられた散乱図 $\mathfrak{D}$ に対して無限個の同値な散乱図が存在する.

- 整合的散乱図

散乱図 $\mathfrak{D}$ は**整合的** (consistent) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の許容閉曲線 γ に対して，$\mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma} = \mathrm{id}$ が成り立つ

- 整合的散乱図に関する基本定理

$$\mathcal{C}^{+} := \{z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle e_i, z\rangle \geq 0 \quad (i = 1, \dots, r)\},$$
$$\mathcal{C}^{-} := \{z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle e_i, z\rangle \leq 0 \quad (i = 1, \dots, r)\}.$$

γ_{+-} を始点が $\mathrm{Int}(\mathcal{C}^{+})$ の点, 終点が $\mathrm{Int}(\mathcal{C}^{-})$ の点であるような任意の許容曲線とする.
任意の整合的散乱図 $\mathfrak{D}$ に対して, $\mathfrak{D}$ の壁は $\mathrm{Int}(\mathcal{C}^{\pm})$ と交わらないことから, 群 G の元 $g(\mathfrak{D}) := \mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma_{+-}}$ が一意的に定まる. また, $g(\mathfrak{D})$ は整合的散乱図の同値類にのみ依存する.

定理 ([KS14, GHKK18])

写像

$$\begin{array}{ccc} \{\ \text{整合的散乱図の同値類}\ \} & \longrightarrow & G \\ [\mathfrak{D}] & \mapsto & g(\mathfrak{D}) \end{array}$$

は全単射である.

ランク 2 の例

例 1.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{e_2, e_1\} = 1.$$

以下の五角関係式が成り立つ.

$$\Psi[e_2]\Psi[e_1] = \Psi[e_1]\Psi[e_1 + e_2]\Psi[e_2].$$

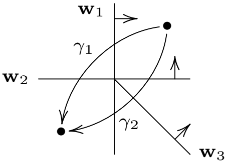
これは, 以下の壁

$$\mathbf{w}_1 = (e_1^{\perp}, \Psi[e_1])_{e_1}, \quad \mathbf{w}_2 = (e_2^{\perp}, \Psi[e_2])_{e_2}, \quad \mathbf{w}_3 = (\mathbb{R}_{\geq 0}(e_1^* - e_2^*), \Psi[e_1 + e_2])_{e_1+e_2}$$

を持つ整合的散乱図 $\mathfrak{D}$ の整合条件

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma_1} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{D},\gamma_2}.$$

を与える.



ポイント

二重対数元と五角関係式 (のみ) を用いてある特別な整合的散乱図が構成できた.

ランク 2 の例 (続き)

例 2. 引き続き

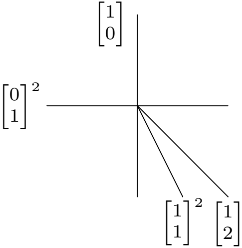
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{e_2, e_1\} = 1.$$

以下, $n = n_1 e_1 + n_2 e_2$ に対して, $\Psi[n]$ を $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ と表す.

五角関係式を繰り返し適用すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2. \end{aligned}$$

これは, 以下の整合的散乱図 $\mathfrak{D}$ の (ただ一つの) 整合条件を与える.



ただし, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ は $e_1^* \mapsto \mathbf{e}_1$, $e_2^*/2 \mapsto \mathbf{e}_2$ で与えた. (理由は後述)

ランク 2 の例 (続き)

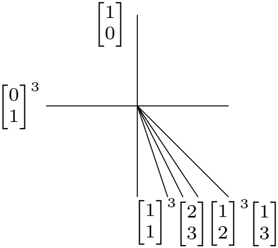
例 3. 引き続き

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{e_2, e_1\} = 1.$$

同様に, 五角関係式を繰り返し適用すると

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2 \right) \\
&= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3 \\
&= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3 .
\end{aligned}$$

これは, 以下の整合的散乱図 $\mathfrak{D}$ の整合条件を与える.



ただし, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ は $e_1^* \mapsto \mathbf{e}_1, e_2^*/3 \mapsto \mathbf{e}_2$ で与えた. (理由は後述)

団散乱図の初期データ

- 初期データ:

反対称化可能 $r \times r$<u>整数</u>行列 B
分解

$$B = \Delta\Omega$$

Δ: 正<u>整数</u>対角行列, Ω: 反対称 $r \times r$<u>有理</u>行列

例えば, B の反対称化子 D に対して, $\Delta = \lambda D^{-1}$ (λ: 正の有理数) ととる. (分解は一意的でない.)

- 今までと同じく

$\Omega = (\omega_{ij})$: 上の反対称 $r \times r$ 有理行列
$N \simeq \mathbb{Z}^r$: ランク r の格子; $e_1, \dots, e_r$: N の基底
$\{e_i, e_j\} = \omega_{ij}$: N 上の反対称双線形形式
G_Ω: 上から定まる群

- 一方, 上の $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$ から

$N^\circ := \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\delta_i e_i$: N の部分格子
$M^\circ := \mathrm{Hom}(N^\circ, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i^*/\delta_i$: $M \subset M^\circ \subset M_\mathbb{R}$ が定まる.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: $N^\circ \times M^\circ \to \mathbb{Z}$ を標準的ペアリングとする. $N \times M_\mathbb{R}$ に対する標準的ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と整合的.
また, $n \in N^+$ に対して, $\delta(n)n \in N^\circ$ となる最小の正の有理数 $\delta(n)$ を n の**正規化因子** (normalization factor) という. 例. $\delta(e_i) = \delta_i$.

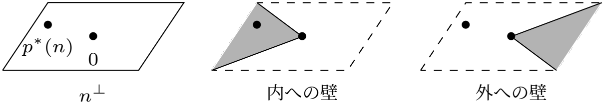
- このとき, アーベル群の準同形写像 $p^* : N \to M^\circ, n \mapsto \{\cdot, n\}$ が定まる. また, p^* の上の基底に関する表現行列は B となる.

団散乱図

- 内への壁, 外への壁

構造群 G_Ω の散乱図 $\mathfrak{D}$ の壁 $\mathbf{w} = (\mathfrak{d}, g)_n$ が $p^*(n) \in \mathfrak{d}$ をみたすとき, **内への壁** (incoming wall), そうでないときは**外への壁** (outgoing wall) という.

$\langle n, p^*(n) \rangle = \{n, n\} = 0$ より, $p^*(n) \in n^\perp$ に注意する.



- 団散乱図

準備が整ったのでいよいよ団散乱図の定義を与える.

定理 [GHKK18]

反対称化可能 $r \times r$ 整数行列 B とその分解 $B = \Delta\Omega$ に対して, 構造群 G_Ω の整合的散乱図 $\mathfrak{D}$ で以下の条件をみたすものが同値を除き一意的に存在する.

(条件) $\mathfrak{D}$ の内への壁全体の集合は $\{\mathbf{w}_{e_i} := (e_i^\perp, \Psi[e_i]^{\delta_i})_{e_i} \mid i = 1, \dots, r\}$.

B の異なる分解 $B = \Delta'\Omega'$ に対しても, 構造群の同形写像 $G_\Omega \longrightarrow G_{\Omega'}$ を通して, 対応する散乱図が同一視できる.

定義. 上の定理で定まる構造群 G_Ω の整合的散乱図を B に付随する**団散乱図** (cluster scattering diagram) といい, $\mathfrak{D}(B)$ と表す. (一意的ではない.)

例: ランク 2 有限型団散乱図

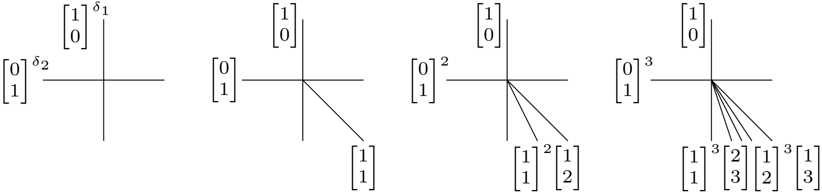
壁が有限個しかない散乱図と同値な散乱図を**有限型**散乱図という.
ランク 2 の有限型団散乱図は本質的に以下で尽くされる.
(a) $B = O$: $A_1 \times A_1$ 型

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \ (\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ は任意}), \quad \Omega = O.$$

以下, $B \neq O$ として,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_2 \\ \delta_1 & 0 \end{pmatrix} \ (\delta_1 \leq \delta_2), \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $p^*(n)$ ($n \in N^+$) は (原点を除く) 第 2 象限に含まれる.
したがって, 前節で与えた整合的散乱図の例が対応する団散乱図を与える.
(b). $(\delta_1, \delta_2) = (1, 1)$: A_2 型
(c). $(\delta_1, \delta_2) = (1, 2)$: B_2 型
(d). $(\delta_1, \delta_2) = (1, 3)$: G_2 型



(a) $A_1 \times A_1$　(b) A_2　(c) B_2　(d) G_2

ただし, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ は $e_i^* \mapsto \delta_i \mathbf{e}_i$ で与えた. これらは対応する団パターンの G 扇と一致する.

例: ランク 2 無限型団散乱図

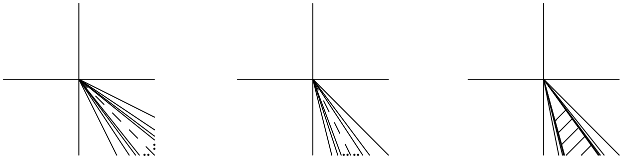
(e). $(\delta_1, \delta_2) = (2, 2)$: $A_1^{(1)}$ 型 ([GHKK18], [Reineke11], etc.)

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^2 \cdots \prod_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix}2^j\\2^j\end{bmatrix}^{2^{2-j}} \cdots \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2.$$

この関係式は五角関係式を「無限回」適用して得られる [N22, Matsushita21].
$\mathfrak{D}(B)$ の台から $\mathbb{R}_{>0}(1, -1)$ (図の点線) を除いたものが, 対応する団パターンの G 扇と一致する.
(f). $(\delta_1, \delta_2) = (2, 2)$: $A_2^{(2)}$ 型 ([GHKK18], [Reading20], etc.)

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2 \prod_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix}2^j\\2^{j+1}\end{bmatrix}^{2^{2-j}} \cdots \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^4.$$

(e) と同様の事実が成り立つ.
(g). 非アフィン型. $\delta_1\delta_2 > 4$. (図は $(\delta_1, \delta_2) = (1, 4)$.)
斜線部分 (the *Badlands*) が通常の変異では到達できない部分である.
この中の壁元の具体形についてはまだ良くわかっていない.
$\delta_1 = \delta_2$ のときは, すべての有理傾きに対して壁元が非自明となることが知られている [Davison-Mandel21].



(e) $A_1^{(1)}$　(f) $A_2^{(2)}$　(g) non-affine

整列補題

このページではランク 2 の場合を考える. $B \neq 0$ とする.

- 整列, 反整列

二重対数元の有理べき $\Psi[n]^c$ たちの (無限かもしれない) 積に対して, 全ての隣り合う因子 $\Psi[n']^{c'}\Psi[n]^c$ が $\{n', n\} \geq 0$ をみたすとき**反整列** (anti-ordered), $\{n', n\} \leq 0$ をみたすとき**整列** (ordered) という.
例. $\{n', n\} = c > 0$ のとき, 五角関係式

$$\Psi[n']^{1/c}\Psi[n]^{1/c} = \Psi[n]^{1/c}\Psi[n+n']^{1/c}\Psi[n']^{1/c}.$$

の左辺は反整列, 右辺は整列である.

- 整列問題

ランク 2 の散乱図の整合条件は, (反整列)=(整列) という等式で与えられることに注意する.
問題. 任意の反整列積は, 五角関係式を用いて整列積に書き換えられるか?

定理 (整列補題 (Ordering Lemma) [N22])

任意の $\Psi[n]^{\delta(n)}$ の有限反整列積は, 五角関係式を (必要ならば無限回) 用いて, $\Psi[n]^{\delta(n)}$ の (無限かもしれない) 整列積に書き換えられる.

証明. 具体的なアルゴリズムが与えられる. □ SageMath で実行できるプログラムもある [N22].
例:

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^3 \equiv \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}^3 \left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}^{18} \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^{39} \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}^{204} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^{18} \right.$$
$$\left. \times \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}^{54} \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}^{204} \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{39} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}^{18} \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}^9 \right) \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3 \mod G^{>7}.$$

団散乱図の主要定理

定理 A. (団散乱図の正実現, [GHKK18])

任意の反対称化可能整数行列 B に対して, 全ての壁の元が $\Psi[n]^{\delta(n)}$ の形であるような団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ が存在する. (特に, 負べきが出てこない.)

証明には, 先の存在定理とは別の構成を用いる.

定理 B. ([GHKK18])

団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ を定理 A のようにとったとき, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^r$, $e_i^*/\delta_i \mapsto \mathbf{e}_i$ のもとで, 対応する団パターンの G 扇は $\mathrm{Supp}(\mathfrak{D}(B))$ に埋め込まれる.

証明は, 定理 A における $\mathfrak{D}(B)$ の構成法から $\mathfrak{D}(B)$ の**変異不変性**を示し, それを用いて主張を示す.

定理 B を用いて, 団パターンの C **行列の符号同一性**が証明される.
また, 定理 A, B を用いて, 団パターンの **Laurent 正値性**が証明される.

さらに, 定理 A の $\mathfrak{D}(B)$ の構成と整列補題を組み合わせて以下が得られる.

定理 C. ([N21])

団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ の任意の整合関係式は, 可換関係式と五角関係式を（必要ならば無限回）用いて自明なもの（$g = g$）に簡約できる.

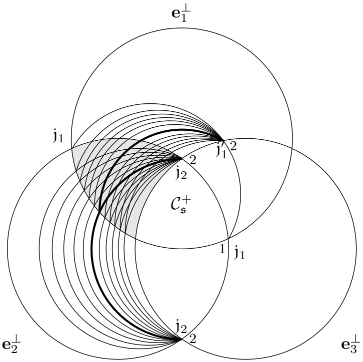
まとめ

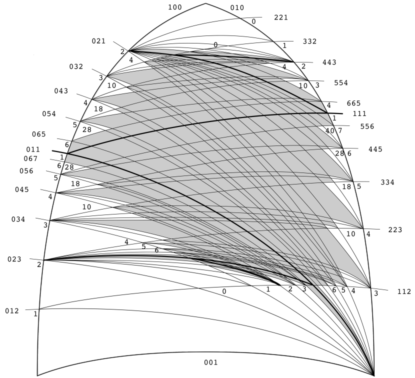
- 二重対数元は, 団パターンの変異と散乱図の壁という概念を結びつける.
- 団散乱図の構造は, 二重対数元と五角関係式のみで記述される.

例：ランク 3 無限型（非アフィン型）

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = I, \quad \Omega = B.$$

散乱図の立体射影（右図は左図のグレーの部分を拡大したもの，右図のグレーの部分が the Badlands に相当）





詳しくは

[N21] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part III. Cluster scattering diagrams*, preliminary draft for a monograph, arXiv:2111.00800, 106 pp.