団代数・ルート系・散乱図式

中西 知樹 (名古屋大学)

日本数学会 2021 年年会 企画特別講演
慶應義塾大学理工学部 (オンライン開催)
2021 年 3 月 18 日

ver. 2021.3.31

(スライドとアブストラクトの最新版 (修正版) は講演者の web page に後日掲載)

はじめに

団代数 (cluster algebras):

- 2000 年ごろに Fomin-Zelevinsky が, Lie 理論における代数多様体（たとえば, Grassmann 多様体, SL_k, 半単純 Lie 群の二重 Bruhat 胞体など) に現れる代数構造を全正値性や Laurent 性の観点から一般化した可換代数のクラスである.

- ほぼ同時期に, 本質的に独立に, 曲面の Teichmüller 理論とその量子化・高次化などの幾何学的観点から, Fock-Goncharov が団代数の概念に到達した.

- 現在では, 代数学, 幾何学, 解析学, 数理物理学など広くさまざまな分野における応用や関連が知られている.

cluster: 集団, 群れ (group の類義語, 物理的に近接)
Oxford Learner's Dictionary

1. a group of things of the same type that grow or appear close together
   e.g., dense cluster of stars; flowers in clusters
2. a group of people, animals or things close together
   e.g., a cluster of spectators; a little cluster of houses

本講演のテーマ

講演者独自 (?) の視点

- 残念ながら団代数自身の「本質的な定義」にはいまだ達していない
- 問題点: 定義が具体的すぎる, 概念に基づかない.

群論で例えると

- 具体的な鏡映群は知っているが, Coxeter 群やルート系の観点には達していない.

団代数理論の当面の目標: 団代数の抽象化, 公理化

- 近いもの: 散乱図式 (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich, 2018)

プラン

1. 団代数 (35 分)
   - 団代数の良い点は何か
   - 団代数の何がわかっていないか
2. ルート系との関係 (10 分)
   - c ベクトルとルート系 (省略)
   - G 扇
3. 散乱図式 (10 分)
   - 存在定理
   - G 扇との関係

詳細はアブストラクトを参照.

Section 1. 团代数

二つの基本的な概念: 種子 (seed) と変異 (mutation)
自然数 n を固定: 団代数 (団パターン) のランク

Definition. (反対称化可能行列)
$B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$: n 次整数正方行列が**反対称化可能** (skew-symmetrizable) とは
ある正整数対角行列 $D = (d_i \delta_{ij})_{i,j=1}^n$ が存在して

$$DB \text{ が反対称行列となる (すなわち}, d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}).$$

D: B の (左) **反対称化子** (skew-symmetrizer)

Definition. (種子)
$\mathcal{F}$: n 変数の有理関数体と同形な体 (**周囲体** (ambient field)),
$\Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$: **種子** (seed)
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$: $\mathcal{F}$ の代数的に独立な n 個の元の組 (**団** (cluster))
$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$: $\mathcal{F}$ の代数的に独立な n 個の元の組
B: n 次反対称化可能 (整数) 行列 (**交換行列** (exchange matrix))
x_i: **団変数** (cluster variables), x 変数
y_i: y 変数

変異

任意の整数 a に対して,

$$[a]_+ := \max(a, 0)$$

Definition. (変異)
任意の種子 $\Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ と $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, 新しい種子 $\Sigma' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ を以下で定める.

$$x'_i = \begin{cases} x_k^{-1} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{[b_{ji}]_+} + \prod_{j=1}^{n} x_j^{[-b_{ji}]_+} \right) & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases}$$

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & i = k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+} (1 + y_k)^{-b_{ki}} & i \neq k, \end{cases}$$

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + b_{ik}[b_{kj}]_+ + [-b_{ik}]_+ b_{kj} & i, j \neq k. \end{cases}$$

種子 Σ' を Σ の k における**変異** (mutation) といい, $\mu_k(\Sigma)$ と表す.

- μ_k は対合的である, すなわち,

$$\Sigma = \mu_k(\Sigma')$$

- B の反対称化子 D は, B' の反対称化子

定義の当面の正当化: このように定義すると色々な「奇跡」が起こる.

$\mathbb{T}_n$: n **正則木** (n-regular tree)
各頂点からちょうど n 本の辺が出ているサイクルを持たないグラフ (tree)
各頂点から出ている辺には 1 から n までのラベルが重複なく付与
記号を濫用してグラフ $\mathbb{T}_n$ の頂点の集合も $\mathbb{T}_n$ と表す.

Definition. (団パターン)
$\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: n 正則木の頂点集合 $\mathbb{T}_n$ を添字集合に持つ種子の族
ラベル k を持つ辺で結ばれている任意の頂点のペア $t, t' \in \mathbb{T}_n$ に対して

$$\Sigma_{t'} = \mu_k(\Sigma_t)$$

となるとき, $\mathbf{\Sigma}$ を**団パターン** (cluster pattern) という.

団パターン $\mathbf{\Sigma}$ の種子 $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ に対して

$$\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t}), \quad \mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t}), \quad B_t = (b_{ij}^t)_{i,j=1}^n.$$

n 正則木 $\mathbb{T}_n$ の任意の頂点 t_0 を一つ固定: **初期頂点** (initial vertex)
初期頂点 t_0 における種子 Σ_{t_0}: **初期種子** (initial seed)

団パターン $\mathbf{\Sigma}$ は初期種子 Σ_{t_0} から $\mathbb{T}_n$ 上で変異を繰り返すことにより一意的に定まる.

団代数

Definition. (団代数)
団パターン $\mathbf{\Sigma}$ に対して, 周囲体 $\mathcal{F}$ において全ての団変数 $x_{i,t}$ $(i = 1, \dots, n; t \in \mathbb{T}_n)$ の生成する $\mathbb{Z}$ 部分代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{\Sigma})$ を $\mathbf{\Sigma}$ の定める**団代数** (cluster algebra) という.

団変数 $x_{i,t}$ がどの団 $\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$ に入っているかが大事.
例: 団単項式を用いた $\mathcal{A}$ の基底の構成. (Fomin-Zelevinksy の元々の動機の一つ)

本講演では, 団代数そのものではなく, その背後にある団パターンをより基本的な「団構造 (cluster structure)」の核心と考え, もっぱら団パターンについて論じる.

例: A_2 型団パターン

2 正則木 $\mathbb{T}_2$ 上の団パターン:

$$\cdots \overset{\mu_2}{\leftrightarrow} \Sigma(-2) \overset{\mu_1}{\leftrightarrow} \Sigma(-1) \overset{\mu_2}{\leftrightarrow} \Sigma(0) \overset{\mu_1}{\leftrightarrow} \Sigma(1) \overset{\mu_2}{\leftrightarrow} \Sigma(2) \overset{\mu_1}{\leftrightarrow} \cdots$$

$\Sigma(0) = (\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), B(0))$: 初期種子
初期交換行列 $B(0)$:

$$B(0) = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

初期変数 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}$

例: A_2 型団パターン

$$B(0) = B, \quad \begin{cases} x_1(0) = x_1, \\ x_2(0) = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = y_1, \\ y_2(0) = y_2, \end{cases}$$

$$B(1) = -B, \quad \begin{cases} x_1(1) = x_1^{-1}(1+x_2), \\ x_2(1) = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(1) = y_1^{-1}, \\ y_2(1) = y_2(1+y_1), \end{cases}$$

$$B(2) = B, \quad \begin{cases} x_1(2) = x_1^{-1}(1+x_2), \\ x_2(2) = x_1^{-1}x_2^{-1}(1+x_1+x_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(2) = y_1^{-1}(1+y_2+y_1y_2), \\ y_2(2) = y_2^{-1}(1+y_1)^{-1}, \end{cases}$$

$$B(3) = -B, \quad \begin{cases} x_1(3) = x_2^{-1}(1+x_1) \\ x_2(3) = x_1^{-1}x_2^{-1}(1+x_1+x_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(3) = y_1(1+y_2+y_1y_2)^{-1}, \\ y_2(3) = y_1^{-1}y_2^{-1}(1+y_2), \end{cases}$$

$$B(4) = B, \quad \begin{cases} x_1(4) = x_2^{-1}(1+x_1), \\ x_2(4) = x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(4) = y_2^{-1}, \\ y_2(4) = y_1y_2(1+y_2)^{-1}, \end{cases}$$

$$B(5) = -B, \quad \begin{cases} x_1(5) = x_2, \\ x_2(5) = x_1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(5) = y_2, \\ y_2(5) = y_1. \end{cases}$$

observation (奇跡の雛形):

- 半周期性 (五角恒等式 (pentagon identity))
- x 変数は初期 x 変数の Laurent 多項式 (Laurent 性)
- どこにも負号が現れない (Laurent 正定値性). 注意: $(x^3+1)/(x+1) = x^2 - x + 1$

Laurent 性と有限型の分類

Theorem. (Laurent 性 (Laurent phenomenon) [Fomin-Zelevinsky02, CA1])
任意の団パターン $\mathbf{\Sigma}$ に対して, 任意の x 変数 $x_{i;t}$ は初期変数 $\mathbf{x}$ の整数係数 Laurent 多項式で表せる.

Definition. (有限型団パターン)
異なる有限個の種子しか持たない団パターンを**有限型** (finite type) という.

B: 反対称化可能行列
$A(B) = (a_{ij})$: B **に付随する Cartan 行列**

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j, \\ -|b_{ij}| & i \neq j. \end{cases}$$

Kac-Moody Lie 代数の意味での対称化可能 (一般) Cartan 行列
Example.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A_2 \text{ 型 Cartan 行列})$$

Theorem. (有限型団パターンの分類 [Fomin-Zelevinsky03, CA2])
団パターン Σ が有限型であるための必要十分条件は, ある $t \in \mathbb{T}_n$ に対して, 交換行列 B_t に付随する Cartan 行列 $A(B_t)$ が有限型の Cartan 行列になることである.

(入門編おわり)

C 行列と G 行列

以下は, [Fomin-Zelevinsky07, CA4] で導入された.
$\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t\in\mathbb{T}_n}$: 団パターン
$\mathbf{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{T}_n}$: $\mathbf{\Sigma}$ の B パターン
$t_0 \in \mathbb{T}_n$: 初期頂点

n 次正方行列の二つの族が定まる:
C パターン: $\mathbf{C}^{t_0} = \{C_t = (c^t_{ij})\}_{t\in\mathbb{T}_n}$ (C 行列 (C-matrices))
G パターン: $\mathbf{G}^{t_0} = \{G_t = (g^t_{ij})\}_{t\in\mathbb{T}_n}$ (G 行列 (G-matrices))

$$C_{t_0} = I,$$
$$c^{t'}_{ij} = \begin{cases} -c^t_{ik} & j = k, \\ c^t_{ij} + c^t_{ik}[b^t_{kj}]_+ + [-c^t_{ik}]_+ b^t_{kj} & j \neq k, \end{cases}$$
$$G_{t_0} = I,$$
$$g^{t'}_{ij} = \begin{cases} -g^t_{ik} + \sum_{\ell=1}^{n} g^t_{i\ell}[-b^t_{\ell k}]_+ - \sum_{\ell=1}^{n} b^{t_0}_{i\ell}[-c^t_{\ell k}]_+ & j = k, \\ g^t_{ij} & j \neq k. \end{cases}$$

t と t': ラベル k の辺で結ばれる
これらの変換は対合的

F 多項式

$\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: 団パターン
$\mathbf{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: $\mathbf{\Sigma}$ の B パターン
$t_0 \in \mathbb{T}_n$: 初期頂点

初期 y 変数 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ の有理関数の n 組の族が定まる:
$\mathbf{F} = \{F_t = (F_{1;t}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;t}(\mathbf{y}))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ (F **多項式** (F-polynomials))

$$F_{i;t_0}(\mathbf{y}) = 1,$$
$$F_{i;t'}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{F_{k;t}(\mathbf{y})} \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n} y_j^{[-c^t_{jk}]_+} \prod_{j=1}^{n} F_{j;t}(\mathbf{y})^{[-b^t_{jk}]_+} \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\prod_{j=1}^{n} y_j^{[c^t_{jk}]_+} \prod_{j=1}^{n} F_{j;t}(\mathbf{y})^{[b^t_{jk}]_+} \right) & i = k, \\ F_{i;t}(\mathbf{y}) & i \neq k. \end{cases}$$

t と t': ラベル k の辺で結ばれる
この変換は対合的

以下は, Laurent 性の主張と同値

Theorem. ([Fomin-Zelevinsky07,CA4])
$F_{i;t}(\mathbf{y})$ は $\mathbf{y}$ の整数係数多項式である.

分離公式

$\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t\in\mathbb{T}_n}$: 団パターン
$t_0 \in \mathbb{T}_n$: 初期頂点
$\Sigma_{t_0} = \Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$: 初期種子

初期 $\hat{y}$ 変数: $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$

$$\hat{y}_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{ji}}.$$

Theorem. (分離公式 (separation formulas) [Fomin-Zelevinsky07,CA4])

$$x_{i;t} = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{g_{ji}^t}\right) F_{i;t}(\hat{\mathbf{y}}),$$
$$y_{i;t} = \left(\prod_{j=1}^{n} y_j^{c_{ji}^t}\right) \prod_{j=1}^{n} F_{j;t}(\mathbf{y})^{b_{ji}^t}.$$

- x 変数, y 変数 は, C 行列, G 行列, F 多項式に帰着.
- **トロピカル化** $F_{i;t}(\mathbf{y}) \to 1$: G 行列, C 行列 $\longleftrightarrow$ トロピカル x 変数, トロピカル y 変数
- 団パターンの様々な応用の多くはこの分離公式に基づく
- 問「何がしかの数学的対象が団代数 (団パターン) に帰着されて何がうれしいのですか?」
  答「分離公式で制御できること」

符号同一性と Laurent 正値性

以下は [Fomin-Zelevinsky07,CA4] により予想された.

Conjecture A. (C 行列の列符号同一性 (sign-coherence))
C 行列 C_t の各列ベクトルは正ベクトルまたは負ベクトルである.

Conjecture B. (Laurent 正値性 (Laurent positivity))
任意の F 多項式 $F_{i;t}(\mathbf{y})$ の (整数) 係数は全て非負である.

多くの研究者による部分的解決を経て, [Gross-Hacking-Keel-Kontsevich18] により**散乱図式** (scattering diagram) の方法により証明された.

Theorem A. [Gross et al.18] Conjecture A は正しい.

Theorem B. [Gross et al.18] Conjecture B は正しい.

Theorem A と Theorem B から様々な帰結が得られる.

同期性

Theorem A と Theorem B の応用
$\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: ランク n の団パターン

S_n: n 次対称群
置換 $\sigma \in S_n$ の x 変数, y 変数, 交換行列, C 行列, G 行列への左作用:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \sigma \mathbf{x}_t, & x'_i &= x_{\sigma^{-1}(i);t}, \\
\mathbf{y}' &= \sigma \mathbf{y}_t, & y'_i &= y_{\sigma^{-1}(i);t}, \\
B' &= \sigma B_t, & b'_{ij} &= b_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j);t}, \\
C' &= \sigma C_t, & c'_{ij} &= c_{i\sigma^{-1}(j);t}, \\
G' &= \sigma G_t, & g'_{ij} &= g_{i\sigma^{-1}(j);t}.
\end{aligned}$$

種子への σ の作用: $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\sigma\mathbf{x}, \sigma\mathbf{y}, \sigma B)$

同期性

$\boldsymbol{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: 団パターン
$t_0 \in \mathbb{T}_n$: 初期頂点

以下は, Theorem A と Theorem B の帰結である.

Theorem. (同期性 (synchronicity) [N.20])
置換 $\sigma \in S_n$ および $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_n$ に対する以下の周期条件は互いに同値:

(i). $\mathbf{x}_{t_1} = \sigma \mathbf{x}_{t_2}$.

(ii). $\mathbf{y}_{t_1} = \sigma \mathbf{y}_{t_2}$.

(iii). $C_{t_1} = \sigma C_{t_2}$.

(iv). $G_{t_1} = \sigma G_{t_2}$.

(v). $\Sigma_{t_1} = \sigma \Sigma_{t_2}$.

特に, $\mathbf{x}_t$, $\mathbf{y}_t$ はトロピカル化 G_t, C_t から一意的に定まる. (脱トロピカル化 (detropicalization))

- 問「何がしかの数学的対象が団代数 (団パターン) に帰着されて何がうれしいのですか?」
  答「トロピカル化で制御できること」

(以上で「団代数の良い点は何か」おわり)

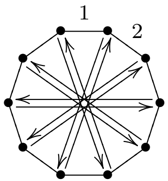
本講演の主題:「団代数とは何か」

- 「団パターン」がより基本的な「団構造 (cluster structure)」の核心.
- 「団パターンとは何か」を考える.

Definition. (団パターン $\mathbf{\Sigma}$ の交換グラフ)
団パターン $\mathbf{\Sigma}$ の **(ラベル付き) 交換グラフ** (labeled exchange graph) $\Gamma(\mathbf{\Sigma})$ を以下で定める.

- 団パターン $\mathbf{\Sigma}$ について, $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_n$ に対して $\Sigma_{t_1} = \Sigma_{t_2}$ が成り立つときに t_1 と t_2 を同一視することにより, 辺のラベルを保った $\mathbb{T}_n$ の商グラフが定まる.
- この商グラフの異なる頂点 t_1, t_2 と置換 $\sigma \in S_n$ に対して $\Sigma_{t_1} = \sigma\Sigma_{t_2}$ が成り立つとき, t_2 から t_1 へ矢 (向きのついた辺) を加えラベル σ をつける.

Example. A_2 型の団パターンの交換グラフ (矢印のラベル τ_{12} は省略)



交換グラフを団パターンの本質と考える.

団代数とは何か

Definition. (亜群)
全ての射が可逆である圏を亜群 (groupoid) という.

- 交換グラフ $\Gamma(\mathbf{\Sigma})$ は亜群とみなせる. (Σ に付随する**団亜群** (cluster groupoid))
- アナロジー：

有限鏡映群	$\longleftrightarrow$	Coxeter 群 (抽象群)
交換グラフ (団亜群)	$\longleftrightarrow$	抽象亜群としての団亜群

- Coxeter 群: 生成元 $s_1, \dots, s_n$ と基本関係式

$$s_i^2 = \mathrm{id}, \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathrm{id} \quad (i \neq j)$$

- 団亜群の生成元と基本関係式は何か?

以下の変異の関係式は Coxeter 群の関係式の自然な類似とみなせる.
(i) 変異の対合性: $\mu_i^{t_1}\mu_i^t = \mathrm{id}^t, \quad s_i^2 = \mathrm{id}$ に対応
(ii). ランク 2 の周期
可換な変異 : $b_{ij}^t = 0 \Longrightarrow \mu_i^{t_3}\mu_j^{t_2}\mu_i^{t_1}\mu_j^t = \mathrm{id}^t, \quad (s_i s_j)^2 = \mathrm{id}$ に対応
A_2 型周期 : $|b_{ij}^t| = |b_{ji}^t| = 1 \Longrightarrow \mu_j^{t_4}\mu_i^{t_3}\mu_j^{t_2}\mu_i^{t_1}\mu_j^t = \tau_{ij}^t, \quad (s_i s_j)^{5/2} = \tau_{ij}$ に対応
B_2 型, G_2 型周期: 同様に, $(s_i s_j)^3 = \mathrm{id}$, $(s_i s_j)^4 = \mathrm{id}$ に対応.

- これらは基本関係式になるか?
反例あり [Fomin-Shapiro-Thurston08] (2 点穴あきトーラスに付随する団パターン)

Problem. 任意の団パターン Σ の交換グラフ $\Gamma(\mathbf{\Sigma})$ の亜群としての生成元と基本関係式を B パターン $\mathbf{B}$ を用いて記述せよ.

問題の言い換え: ランク 2 (A_2 型, B_2 型, G_2 型) の周期に帰着できない非自明な周期はどれぐらいあるか？

同期性の意味:

- 同期性: x 変数, y 変数, C 行列, G 行列のいずれもが, 団パターンと全く同じ交換グラフを持つ.

- 実は他にもたくさんある！(一般団代数 (generalized cluster algebras) [Chekhov-Shapiro14], [N.20])

見方の逆転:

- 「団亜群という抽象的な亜群が始めにあって, それが, 種子, $\mathbf{x}$ 変数, $\mathbf{y}$ 変数, C 行列, G 行列などによるさまざまな「実現 (忠実な表現)」を持つ」と考える.

- 行列により定義される線形 Lie 代数が, 抽象 Lie 代数として様々な表現を持つこととパラレルな視点.

以上より, 団代数 (団構造) の本質的な定義にはいまだ達していない, と講演者は考える.

Section 2. ルート系との関係

c ベクトルとルート系

略：アブストラクト参照

$\mathbf{\Sigma} = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: 団パターン
$t_0 \in \mathbb{T}_n$: 初期頂点
$\mathbf{G}^{t_0} = \{G_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$: G パターン

Definition. G 行列 G_t の第 i 列を $\mathbf{g}_{i;t}$ と表し, これらを g **ベクトル** (g-vectors) という.

- $\mathbf{g}_{i;t} \leftrightarrow x_{i;t}$ の (ある意味の) トロピカル化 であった.
- ユニモジュラー性 $|G_t| = \pm 1$.

Definition. $\mathbb{R}^n$ において G_t の g ベクトルたち $\mathbf{g}_{1;t}, \ldots, \mathbf{g}_{n:t}$ の張る有理強凸多面錐 $\sigma(G_t)$ を G **錐** (G-cone) という.

Definition. 空でない $\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐の集合 Δ に対して以下がなりたつとき, Δ を **扇** (fan) という. (ここでは Δ が有限集合であることは要請しない.)

- $\sigma \in \Delta$ の任意の面は Δ に含まれる.
- 任意の $\sigma, \tau \in \Delta$ に対して $\sigma \cap \tau$ は σ の面かつ τ の面となる.

$\Delta(\mathbf{G}^{t_0})$ を, 団パーターン $\boldsymbol{\Sigma}$ の全ての G 錐 $\sigma(G_t)$ の面全体の集合とする.

- $\Delta(\mathbf{G}^{t_0})$ は扇になるか?

- t, t' は k をラベルに持つ辺でつながっているとする. c ベクトル $\mathbf{c}_{k;t}$ の符号 (トロピカル符号) $\varepsilon_{k;t}$ を用いて, g ベクトルの変異は以下で与えられる.

$$\mathbf{g}_j^{t'} = \begin{cases} -\mathbf{g}_k^t + \sum_{\ell=1}^{n} [-\varepsilon_{k;t} b_{\ell k}^t]_+ \mathbf{g}_{i\ell}^t & j = k, \\ \mathbf{g}_j^t & j \neq k. \end{cases}$$

$b_{kk} = 0$ に注意すると, $\sigma(G_t)$ と $\sigma(G_{t'})$ は共通の (codimension 1 の) 面で張り合うことがわかる.

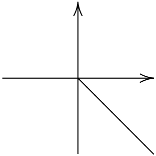
- しかし, 変異を何度もくり返して得られる錐 $\sigma(G_{t''})$ が $\sigma(G_t)$ と共通の面で張り合うかはすぐにはわからない.

Theorem. [Gross-Hacking-Keel-Kontsevich18, Reading20](C 行列の符号同一性の帰結)
$\Delta(\mathbf{G}^{t_0})$ は扇となる.

これを G **扇** (G-fan) という. (普通は g-ベクトル扇という.)

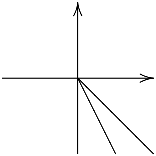
ランク 2 の G 扇 (有限型)

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



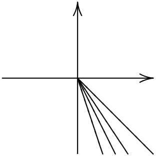
(a) A_2 型

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$



(b) B_2 型

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

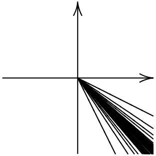


(c) G_2 型

- $\Delta(\mathbf{G}^{t_0}) = \mathbb{R}^2$, すなわち**完備扇** (complete fan) となる.
- G 錐の数は, $h+2$ に等しい. ($h = 3, 4, 6$ は A_2, B_2, G_2 の Coxeter 数.)
- ルート系の Weyl chamber の類似 (?)

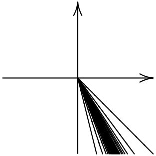
ランク 2 の G 扇 (無限型)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



(d) $A_1^{(1)}$ 型

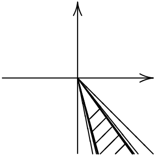
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$



(e) $A_2^{(2)}$ 型

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$bc \geq 5$



(f) 非アフィン型

$\Delta(\mathbf{G}^{t_0})$ は完備でない.

- (d). $\mathbb{R}^2$ から半直線 $\mathbb{R}_+(1,-1)$ を除いた部分を埋め尽くす.
- (e). $\mathbb{R}^2$ から半直線 $\mathbb{R}_+(1,-2)$ を除いた部分を埋め尽くす.
- (f). $\mathbb{R}^2$ から二つの半直線のなす錐 (図の斜線部分) を除いた部分を埋め尽くす.

Section 3. 散乱図式

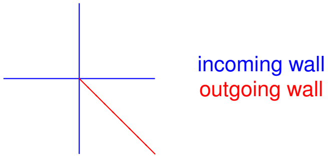
散乱図式

散乱図式 (scattering diagram) の導入と研究の動機

- [Kontsevich-Soibelman06], [Gross-Siebert11], [Kontsevich-Soibelman14]
ホモロジカルミラー対称性における Calabi-Yau 多様体のトーリック縮退の研究

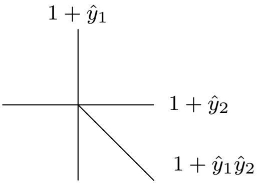
- [Kontsevich-Soibelman14]: wall-crossing structure と呼ばれる.

- [Gross-Siebert11]: incoming wall が衝突して, outgoing wall が散乱 (scatter) する.
$\Longrightarrow$ scattering diagram と呼んだ (と思われる).



例: A_2 型の散乱図式

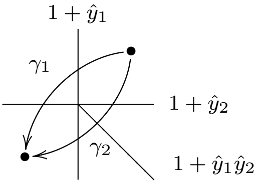
A_2 型の散乱図式は以下のとおり.



見た目の特徴:

- 図は A_2 型の G 扇と一致する.
- 余次元 1 の錐 (これを壁の台 (the support of a wall) という) を 5 つ持つ.
- 各壁の台には初期 $\hat{y}$ 変数の関数 (壁関数) $1+\hat{y}_1, 1+\hat{y}_2, 1+\hat{y}_1\hat{y}_2$ がついている.
- 壁の台と壁関数のペアを壁という. (壁の台もしばしば壁という.)

例: A_2 型の散乱図式



A_2 型

見た目ではわからない特徴:

- 壁を $(\mathfrak{d}, f_\mathfrak{d})$ と表す. $\mathfrak{d}$: 壁の台, $f_\mathfrak{d}$ 壁関数
- 各壁に対して初期 x 変数 x の有理関数体の自己同形写像 $\mathfrak{p}_{f_\mathfrak{d}}$ を以下で定める.

$$\mathfrak{p}_{f_\mathfrak{d}}(x^m) = x^m f_\mathfrak{d}^{(n_0,m)}, \quad (n_0 \text{ は } \mathfrak{d} \text{ の正の原始法ベクトル})$$

(**壁越え自己同形写像** (wall-crossing automorphism))

- 図の道 γ_1, γ_2 に沿った壁越え自己同形写像の積をそれぞれ $\mathfrak{p}_{\gamma_1}, \mathfrak{p}_{\gamma_2}$ とする.
このとき, $\mathfrak{p}_{\gamma_1} = \mathfrak{p}_{\gamma_2}$ が成り立つ. (散乱図式が**整合的** (consistent))

散乱図式

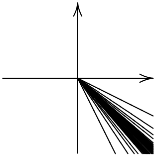
以下の存在定理が最も基本的で重要.

Theorem. [Gross-Siebert11, Kontsevich-Soibelman14]
任意の非退化な反対称化可能行列 B に対して, 以下をみたす散乱図式 $\mathfrak{D}$ が同値を除き一意的に存在する.

- $\mathfrak{D}$ は内向きの壁の集合 $\mathfrak{D}_{\mathrm{in}} = \{(e_i^{\perp}, 1 + \hat{y}_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ を含む.
- $\mathfrak{D}_{\mathrm{in}}$ の壁以外のすべての $\mathfrak{D}$ の壁は外向きである.
- $\mathfrak{D}$ は整合的である.

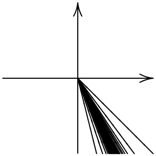
ランク 2 の散乱図式 (無限型)

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$



(d) $A_1^{(1)}$ 型

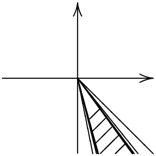
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$



(e) $A_2^{(2)}$ 型

$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$bc \geq 5$



(f) 非アフィン型

- (d). G 扇から得られる壁たちに加えて, G 扇の空白部分を埋める壁の台 $\mathfrak{d} = \mathbb{R}_{\geq 0}(1, -1)$ が付け加わり, その壁関数 $f_{\mathfrak{d}}$ は以下の無限和

$$f_{\mathfrak{d}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_1^k \hat{y}_2^k \right)^2, \quad \hat{y}_1 = x_2^2,\ \hat{y}_2 = x_1^{-2}$$

で与えられる [Reineke09]. (このように, 無限個の壁があるときは無限級数が現れる.)

- (f). G 扇の壁に加えて, さらに斜線部分 (dark side) にも無限個の壁が存在する.

Theorem. [Gross-Hacking-Keel-Kontsevich18]
初期交換行列 B_{t_0} が非退化である団パターン $\mathbf{\Sigma}$ に対して, $\mathbf{\Sigma}$ の G 扇 $\Delta(\mathbf{G}^{t_0})$ は前の定理における整合的散乱図式 $\mathfrak{D}$ の台に自然に埋め込まれる.

団パターン	散乱図式	ルート系 (?)
G 行列	壁の台	ウエイト空間の基本領域 (?)
C 行列	壁の法ベクトル	ルート (?)
F 多項式	壁越自己同型	鏡映の有理表現 (?)
x 変数	テータ関数	(?)

団代数に対するさまざまな応用は上の定理を経由して得られる.

- 壁の法ベクトルは正または負ベクトル $\Longrightarrow$ C 行列の符号同一性
- 上の $\mathfrak{D}$ に対するテータ関数は非負係数多項式 $\Longrightarrow$ Laurent 正値性

Problem. 散乱図式はなんらかの意味でルート系の理論の拡張とみなせるか?

Problem. 散乱図式における dark side は団パターンのどのような拡張を与えるのか?

Problem. 散乱図式は団代数にとって不可欠なものか?

団パターンと散乱図式の関係については以下の解説論文を挙げる (2021.3.31 追記)

T. Nakanishi, Cluster patterns and scattering diagrams, arXiv:2103.16309, 70 pages.