分枝ブラウン運動の最大値過程の解析

塩沢　裕一　(大阪大学)*

分枝ブラウン運動とは, 分裂による個体数変動を伴いながら時間発展するブラウン粒子系のことである. 本講演では, 分枝ブラウン運動の最大値過程に関する性質を紹介する. 特に空間非一様な分枝法則を持つ場合に焦点を当て, 最大値過程の挙動に関する結果 (定理 2) や関連した結果を述べる.

1. モデル

初めに分枝ブラウン運動のモデルを導入する (分枝ブラウン運動を含む分枝マルコフ過程に関する文献として, 例えば [8, 10, 11, 12] を挙げる). $\mathbf{M} = (\{B_t\}_{t\geq 0}, \{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ を d 次元ブラウン運動とする. τ は $\mathbf{M}$ と独立な正値確率変数でパラメータ 1 の指数分布に従うものとする. $\mathbb{R}^d$ 上の非負値関数 $V(x)$ に対して確率変数 T を

$$T = \inf\left\{t > 0 \mid \int_0^t V(B_s)\,\mathrm{d}s \geq \tau\right\}$$

と定める. ただし $\inf\emptyset = \infty$ と規約する. もし $V \equiv c > 0$ ならば T はパラメータ c の指数分布に従う. $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の確率関数とする. すなわち

$$0 \leq p_n(x) \leq 1 \ (n \geq 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) = 1 \ (x \in \mathbb{R}^d)$$

点 x から出発したブラウン粒子は, 時刻 T において確率 $p_n(B_T)$ で n 個のブラウン粒子に分裂するものとする. これらの粒子が時刻 T で B_T から出発し, 独立に同様の規則に従い分裂を繰り返すことで時間発展する確率モデルのことを**分枝ブラウン運動**という. ここでは, $V(x)$ と $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ がともに x に依らないとき, 分枝ブラウン運動は空間一様であると呼ぶことにする.

点 x から 1 粒子として出発する分枝ブラウン運動の法則を $\mathbf{P}_x$ とかき, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ とする. 時刻 t での総個体数を Z_t とかき, 集合 A 上の個体数を $Z_t(A)$ とかく. 点 x での 1 回の分裂で生まれる平均個体数を

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(x)$$

とかく. このとき, V と Q に関する適当な仮定 (例えば V と Q はともに $\mathbb{R}^d$ 上の有界連続関数) の下で

$$\mathbf{E}_x\left[Z_t(A)\right] = E_x\left[\exp\left(\int_0^t (Q(B_s) - 1)V(B_s)\,\mathrm{d}s\right); B_t \in A\right] \tag{1}$$

が成立する (例えば [21, Lemma 3.9] を参照せよ). この右辺はシュレディンガー型作用素 $\mathcal{H} = -\Delta/2 - (Q-1)V$ から生成される **Feynman-Kac 半群** $e^{t\mathcal{H}}$ に対応する. 分枝ブラウン運動が空間一様のとき, $Q(x) \equiv m$, $V(x) \equiv c$ とおけば式 (1) は次のようになる.

$$\mathbf{E}_x\left[Z_t(A)\right] = e^{(m-1)ct} P_x(B_t \in A) = e^{(m-1)ct} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_A e^{-|x-y|^2/2t}\,\mathrm{d}y$$

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: `shiozawa@math.sci.osaka-u.ac.jp`

2. 最大値過程

時刻 t での k 番目の個体の位置を B_t^k とかく. 分枝ブラウン運動の**最大値過程**とは次で定義される確率過程のことである.

$$R_t = \begin{cases} \max_{1\le k\le Z_t} B_t^k & (d=1) \\ \max_{1\le k\le Z_t} |B_t^k| & (d\ge 2) \end{cases}$$

最大値過程はブラウン粒子の拡散度と分裂による個体数の増大度との兼ね合いから定まり, 分枝ブラウン運動の研究において基本的な解析対象の 1 つである. ちなみに $d=1$ のとき, R_t の分布関数 $u(t,x,y)=\mathbf{P}_x(R_t\le y)$ は, (t,x) の関数と見なせば, 次の Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 型の方程式の解である ([11, Example 3.4], [18, 19], [9]).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + V\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n u^n - u\right),\ u(0,x,y)=\mathbf{1}_{\{x\le y\}}$$

同様の関係式は $d\ge 2$ でも成立する.

分枝ブラウン運動が空間一様なとき, 最大値過程の挙動について次の定理が成立する.

定理 1. ([4, 20] $(d=1)$, [17] $(d\ge 2)$) $p_2(x)\equiv 1$, $V(x)\equiv 1$ と仮定する. このとき

$$R_t = \sqrt{2}t + \frac{d-4}{2\sqrt{2}}\log t + O_{\mathbf{P}}(1)\ (t\to\infty) \tag{2}$$

ただし $O_{\mathbf{P}}(1)$ は確率過程 $\{Y_t\}_{t\ge 0}$ で次の等式を満たすものである.

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\ge 0}\mathbf{P}(|Y_t|\ge k)=0$$

定理 1 より, 最大値過程は線形増大し, 対数項の係数が空間次元に依存することが分かる. なお $d\ge 2$ のとき, 式 (2) の線形項の係数は, [17] 以前にも [14] で求められている.

次に空間非一様な1次元分枝ブラウン運動について, 最大値過程の挙動に関する結果を紹介する. 簡単のために $p_2(x)\equiv 1$ を仮定し, シュレディンガー型作用素 $\mathcal{H}=-\Delta/2-V$ のスペクトルの下限を λ とかく.

定理 2. V は $\mathbb{R}$ 上の非負値連続関数で $V\not\equiv 0$ かつ $V(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$ を満たすものとする.

(i) ([9]) 次の等式が成立する.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{R_t}{t} = \sqrt{\frac{-\lambda}{2}},\ \mathbf{P}_x\text{-a.s.}$$

(ii) ([15]) さらに $\int_{\mathbb{R}} V(y)\,\mathrm{d}y<\infty$ を仮定すると, 次の等式が成立する.

$$R_t = \sqrt{\frac{-\lambda}{2}}t + O_{\mathbf{P}_x}(1)\ (t\to\infty) \tag{3}$$

ただし, $O_{\mathbf{P}_x}(1)$ は定理 1 の $O_{\mathbf{P}}(1)$ と同様に定義されるものである.

定理 2 より, たとえ遠方での分裂の効果が小さくとも, 最大値過程は線形増大することが分かる. さらに, 定理 1 の空間一様な場合とは異なり, 式 (3) の右辺には対数項が現れない.

注意 3. (i) 定理 2 の仮定の下, λ はシュレディンガー型作用素 $\mathcal{H} = -\Delta/2 - V$ の最小固有値で $\lambda < 0$ となる.

(ii) [9] では, $d = 1$ で原点のみで分裂が起こる場合 (形式的に $V(x) = \beta\delta_0(x)$ $(\beta > 0)$), もしくは $d \geq 2$ で $V(x)$ と $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ がともに球対称性を持つ場合にも, 定理 2 が成立することを注意している.

(iii) 定理 2 (ii) に関して, 実は [15] では $\mathbf{P}_x(R_t - \sqrt{-\lambda/2}t \leq \kappa)$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ の $t \to \infty$ での極限が具体的に求められており, $\mathcal{H}$ の最小固有値 λ と対応する固有関数から定まるマルチンゲールの極限に関する期待値が現れる. また, [16] では $V(x)$ が $|x| \to \infty$ で正定数に収束するような状況においても最大値過程の挙動が解析されている.

1次元分枝ブラウン運動で, 有限個の点のみで分裂が起こるものは **catalytic branching Brownian motion** とも呼ばれる. 特に原点のみで分裂が起こるモデルについて, ブラウン運動と局所時間との同時分布を用いることで, 式 (1) で述べた個体数の期待値などを具体的に計算できる. Bocharov-Harris [1, 2] (関連した結果について [3, 24] も参照せよ) はこのことに着目して, 原点のみで分裂が起こる場合に, 個体数のモーメント評価を用いて定理 2 を証明した. ちなみに, 対応するシュレディンガー型作用素 $\mathcal{H} = -\Delta/2 - \beta\delta_0$ の最小固有値は $\lambda = -\beta^2/2$ である. なお, Bocharov-Harris [1] は定理 2 (i) の証明の過程において, 時刻 t で区間 $I_t = (\delta t, \infty)$ 上にいる個体数 (ただし $\delta > \sqrt{-\lambda/2} = \beta/2$) の $t \to \infty$ での指数増大度を求めている. この結果は $d \geq 1$ で, V がコンパクト台を持つ連続関数のとき, より一般には分裂時刻の分布がある加藤クラスに属する測度から定まるときに拡張されている ([13, 22, 23]).

また, 整数格子状の分枝ランダムウォークで, 有限個の点でのみ分裂が起こるものは **catalytic branching random walk** とも呼ばれる. このモデルでは, 各粒子の動きを定めるランダムウォークが非対称で, 飛躍幅の裾が重い場合を含め, 最大値過程の挙動が解析されている ([5, 6, 7]). 特に, ランダムウォークの非対称性は最大値過程の方向ごとの振る舞いに影響を与えるが, 分裂が起こる格子点の個数や配置は影響を与えない. さらに, ランダムウォークの飛躍幅の裾が重いと, 最大値過程は指数増大的に振る舞う ([6]).

参考文献

[1] S. Bocharov and S. C. Harris, Branching Brownian motion with catalytic branching at the origin, *Acta. Appl. Math.* **134** (2014), 201–228.

[2] S. Bocharov and S. C. Harris, Limiting distribution of the rightmost particle in catalytic branching Brownian motion, *Electron. Commun. Probab.* **21** (2016), 12pp.

[3] S. Bocharov and L. Wang, Branching Brownian motion with spatially-homogeneous and point-catalytic branching, preprint, arXiv:1803.10479.

[4] M. D. Bramson, Maximal displacement of branching Brownian motion, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 531–581.

[5] E. Vl. Bulinskaya, Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice, *Stochastic Process. Appl.* **128** (2018), 2325–2340.

[6] E. Vl. Bulinskaya, Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails, preprint, arXiv:1808.01465.

[7] P. Carmona and Y. Hu, The spread of a catalytic branching random walk, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **50** (2014), 327–351.

[8] J. Engländer, *Spatial Branching in Random Environments and with Interaction*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015.

[9] K. B. Erickson, Rate of expansion of an inhomogeneous branching process of Brownian particles, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **66** (1984), 129–140.

[10] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe, Branching Markov processes I, *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), 233–278.

[11] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe, Branching Markov processes II, *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), 365–410.

[12] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe, Branching Markov processes III, *J. Math. Kyoto Univ.* **9** (1969), 95–160.

[13] L. Koralov and S. Molchanov, Structure of population inside propagating front, Problems in Mathematical Analysis. No. 69, *J. Math. Sci.* (*N.Y.*) **189** (2013), 637–658.

[14] A. Kyprianou, Asymptotic radial speed of the support of supercritical branching Brownian motion and super-Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, *Markov Process. Related Fields*, **11** (2005), 145–156.

[15] S. Lalley and T. Sellke, Traveling waves in inhomogeneous branching Brownian motions. I, *Ann. Probab.* **16** (1988), 1051–1062.

[16] S. Lalley and T. Sellke, Travelling waves in inhomogeneous branching Brownian motions. II, *Ann. Probab.* **17** (1989), 116–127.

[17] B. Mallein, Maximal displacement in the d-dimensional branching Brownian motion, *Electron. Commun. Probab.* **20** (2015), 12 pp.

[18] H. P. McKean, Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov, *Comm. Pure. Appl. Math.* **28** (1975), 323–331.

[19] H. P. McKean, A correction to: Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov, *Comm. Pure. Appl. Math.* **29** (1976), 553–554.

[20] M. I. Roberts, A simple path to asymptotics for the frontier of a branching Brownian motion, *Ann. Probab.* **41** (2013), 3518–3541.

[21] Y. Shiozawa, Exponential growth of the numbers of particles for branching symmetric α-stable processes, *J. Math. Soc. Japan* **60** (2008), 75–116.

[22] Y. Shiozawa, Spread rate of branching Brownian motions, *Acta. Appl. Math.* **155** (2018), 113–150.

[23] Y. Shiozawa, Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions, submitted, arXiv:1807.11778.

[24] L. Wang and G. Zong, Supercritical branching Brownian motion with catalytic branching at the origin, to appear in *Sci. China Math.*
`http://engine.scichina.com/doi/10.1007/s11425-017-9267-2`