ランダム媒質中のディレクティドポリマー

東北大学集中講義講義ノート

中島 誠 *

2018/11/20 版

*nakamako@math.nagoya-u.ac.jp 理学部 A 棟 453

目 次

この講義ノートは東北大学大学院理学研究科の談話会 (2018 年 11 月 12 日) および集中講義「確率過程論特選」(2018 年 11 月 13 日 ∼16 日) の講義内容とそれに関連する内容をまとめたもので, ランダム媒質中のディレクティドポリマー (DPRE) に関する進展の一部が記述されている.

集中講義ではランダム媒質中のディレクティドポリマーの定義から始めて, よく知られた性質をいくつか証明していく. 特に近年 KPZ 方程式と確率熱方程式に関連してランダム媒質中のディレクティドポリマーは注目を浴びていることも鑑みて, Alberts-Khanin-Quastel らによる 1 次元 DPRE のある種のスケール極限として確率熱方程式の難解が導けるという結果 [5] を紹介しつつ, 自身の結果に触れようと思う.

このノートを読むにあたっては Durrett[48] による確率論の教科書の知識 (測度論的確率論, 大数の法則, 中心極限定理, 独立性, マルコフ性, マルチンゲールなど) は必要であるができる限り参照していくことにする.

なお, この講義ノートは現時点では一部未完成であるが集中講義で扱う予定の内容についてはカバーしている. またこの講義ノートにおける誤りは著者の責任であり, 誤りをご指摘いただければ幸いである.

記号の定義

数列 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ と $\{b_n : n \geqslant 1\}$ に対して

- $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$
- $a_n \asymp b_n \Leftrightarrow$ ある $c_1 > 0, c_2 > 0$ が存在して $n \geqslant 1$ に対して $c_1 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant c_2$
- $a_n \approx b_n \Leftrightarrow \log a_n \sim \log b_n$

関数の場合も同様に定義する.

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}$-値確率変数が与えられたとき, $P[X]$ で X の (定義できる時に) 期待値 (平均) を表すことにする.

1 ランダム媒質中のディレクティドポリマー

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上で定義された確率変数 X に対して X の平均を $P[X]$ と書くとする.

1.1 基本設定と性質

ランダム媒質中のディレクティドポリマー (Directed polymers in random environment, DPRE) は Henley, Huse らによって導入された統計力学模型で不純物の混じった溶媒の中で成長する高分子の形状を調べるのが一つの目標である.

標準的な設定では $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークを用いて定義するが, とりあえず最初は連結な無限グラフ $G = (V, E)$ 上のマルコフ連鎖 $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ を用いることにする. この理由は既存の結果が主に単純ランダムウォークに対して得られているものでどの程度一般化して考えられるのかを今一度確認しておきたいという思いからである.

(修士論文の内容として扱うにはちょうどよいのかもしれない.)

定義 1.1. (グラフ)

- $G = (V, E)$ をグラフとする. ただし V はグラフ G の頂点集合, E はグラフ G の辺集合とする. 特に V は G の原点と呼ぶ頂点 $o \in V$ を持つとする.
- $x, y \in V$ に対して点列 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_m) \subset V$ で以下を満たすものを x から出発して y へ行く経路と呼び, m を経路の長さと呼び $\ell[\mathbf{x}]$ と表す.
  - 任意の $0 \leqslant i \leqslant m$ に対して $x_i \in V$ であり, $x_0 = x, x_m = y$.
  - 任意の $1 \leqslant i \leqslant m$ に対して x_{i-1}, x_i を結ぶ辺 $e_i \in E$ が存在する.
- 任意の点 $x, y \in V$ に対して x から y へ行く経路が存在するときグラフ G は**連結**であるという.
- x から x への経路 $\mathbf{x} = (x_0, \cdots, x_m)$ で $x_i \neq x_j$ $(i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant m)$ が成り立つものが存在するとき $\mathbf{x}$ を**閉路**という.
- グラフ $G = (V, E)$ に対して $x, y \in V$ の**グラフ距離**を

$$d_G(x, y) = \inf\{\ell[\mathbf{x}] : \mathbf{x} \text{ は } x \text{ から出発して } y \text{ へ行く経路 }\}$$

  と定義する.

例題 1.1. $V = \mathbb{Z}^d$ を頂点集合, $E = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d, |x - y| = 1\}$ と定義すると $G = (V, E)$ はグラフである. ただし $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対して $|x - y|$ は $\mathbb{R}^d$ のユークリッド距離とする.

例題 1.2. $b \in \mathbb{N}$ に対してグラフ $G = (V, E)$ を b 分木とする. すなわち原点 $o \in V$ から b 本の辺が出ており, それ以外の頂点からは $b + 1$ 本の辺が出ている閉路がないグラフのことをいう. 特に原点 o からのグラフ距離が n である点全体を第 n 世代と呼び, $x \in V$ で $d_G(o, x) = n$ であるとき $|x| = n$ と書くことがある.

ではグラフの上のマルコフ連鎖について見ていこう.

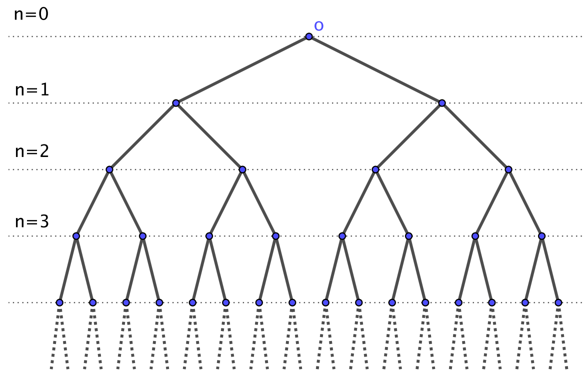


図 1: $b=2$ のときの 2 分木. 樹形図のようになっており世代の呼び方も自然である.

定義 1.2.
- $X=\{X_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ を G 上のマルコフ連鎖で遷移確率は $p=\{p(x,y):x,y\in V\}$ で与えられるとする. すなわち任意の $n\in\mathbb{N}_0, x,y\in V$ に対して

$$P(X_{n+1}=y|X_n=x)=p(x,y)$$

を満たすとする. ただし任意の $x\in V$ に対して,

$$p(x,y)\in[0,1] \text{ かつ} \sum_{y\in V} p(x,y)=1 \text{ を満たす.}$$

$x\in V$ から出発するマルコフ連鎖 X の法則を P_x と表すことにし, 特に $P_o=P$ と書くことにする. また $n\in\mathbb{N}_0, x,y\in V$ に対して

$$p_n(x,y)=P(X_n=y|X_0=x) \tag{1.1}$$

と定義する.

注意 1.1. 特に記述がない限りマルコフ連鎖 X は適当な確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上に定義されているとする.

注意 1.2. DPRE においてはマルコフ連鎖 X の時刻 n までの点列 $[X]_n:=(X_0,X_1,\cdots,X_n)$ を高分子の構造を表していると考える.

例題 1.3. (単純ランダムウォーク)
$\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖 X で遷移確率が

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2d}, & |x-y|=1\\ 0, & |x-y|\neq 1\end{cases}$$

を満たすとき, X を $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークと呼ぶ. ただし $x,y\in\mathbb{Z}^d$ に対して $|x-y|$ を x,y のユークリッド距離とする.

一般に遷移確率は対称とは限らない, すなわち $p(x,y)\neq p(y,x)$ となるようなこともある.

例題 1.4. ($\mathbb{Z}^d$ 上の対称でないマルコフ連鎖)

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{d}, & y=x+e_i,\quad i=1,\cdots,d\\ 0, & \text{それ以外},\end{cases}$$

であるとき対称ではない. ただし $e_i(i=1,\cdots,d)$ は $\mathbb{R}^d$ の標準基底とする.

例題 1.5. (b-分木上のマルコフ連鎖) b 分木上のマルコフ連鎖 X として次のような遷移確率を考える.

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & |x| = n, |y| = n+1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

注意 1.3. 例題 1.5 のようにマルコフ連鎖は既約とは限らない.

それでは早速 DPRE の定義をしていこう.

$G = (V,E)$ を連結なグラフとする.

定義 1.3. (ランダム媒質中のディレクティドポリマー **(DPRE)**)

- (ランダム媒質) $\{\eta(n,x) : (n,x) \in \mathbb{N} \times V\}$: 確率空間 $(\overline{\Omega}, \mathscr{G}, Q)$ 上に定義された $\mathbb{R}$-値の独立同分布な確率変数とし, X とは独立であると仮定する.

$\beta \in \mathbb{R}$ に対してマルコフ連鎖 X の経路空間上に次のような確率測度を定義する:

$$\mu_n^\beta(dX) := \frac{1}{Z_n(\beta,\eta)} \exp\left(\beta \sum_{k=1}^{n} \eta(k, X_k)\right) P(dX).$$

ただし

$$Z_n(\beta,\eta) := P\left[\exp\left(\beta \sum_{k=1}^{n} \eta(k, X_k)\right)\right] \tag{1.2}$$

を**分配関数**と呼ぶ. $\beta \in \mathbb{R}$ は**逆温度**という.

- $n \in \mathbb{N}, x \in V$ に対して

$$Z_{n,x}(\beta,\eta) = P\left[\exp\left(\beta \sum_{k=1}^{n} \eta(k, X_k)\right) : X_n = x\right] \tag{1.3}$$

と定義する.[1]

注意 1.4.

- $\beta > 0 (\beta < 0)$ のとき, $\sum_{k=1}^{n} \eta(k, X_k)$ が大きい (小さい) ときほどマルコフ連鎖はその経路を選びやすくなる. つまり時空間に配置された不純物は高分子を引きつける.
- $\beta > 0 (\beta < 0)$ のとき, $\sum_{k=1}^{n} \eta(k, X_k)$ が小さい (大きい) ときほどマルコフ連鎖はその経路を選びにくくなる. つまり時空間に配置された不純物と高分子は反発する.
- $\beta = 0$ のときは高分子はマルコフ連鎖 (X,P) である.

注意 1.5. β や η を特に強調する必要がないときは $Z_n(\beta,\eta)$ や $Z_{n,x}(\beta,\eta)$ を Z_n や $Z_{n,x}$ や $Z_n(\beta), Z_n(\beta)$ というように省略していく.

注意 1.6. DPRE の場合ポテンシャル η は時間 (n) と場所 $(x \in V)$ に対して独立同分布で与えられている. これを場所に関してのみ独立同分布なものを考えて考えた模型はランダムポテンシャル中のランダムウォークやパラボリックアンダーソン模型と呼ばれたりする. このノートでは扱わない. 興味のある方は [54] を参照されるとよい.

[1] $Z_n(\beta,\eta)$ を点から直線 (Point to Line) への分配関数, $Z_{n,x}(\beta,\eta)$ を点から点 (Point to Point) への分配関数と呼ぶこともある.

注意 1.7. $n \in \mathbb{N}$ を固定して $\beta \to \infty$ としたとき

$$\frac{1}{\beta}\log Z_n(\beta,\eta) \to \operatorname{ess\,sup}_X \sum_{i=1}^{n} \eta(i,X_i)$$

となることがわかる. これは有向ラストパッセージパーコレーションと呼ばれる確率模型に相当する.

さらに特に断りがない限り η には次のような仮定が与えられているものとする.

$$Q[\eta(n,x)] = 0, \quad \text{任意の}\beta \in \mathbb{R}\ \text{に対して}\ Q[\exp(\beta\eta(n,x))] < \infty \qquad \text{(仮定 A)}$$

(仮定 A) を満たすとき

$$\lambda(\beta) := \log Q[\exp(\beta\eta(n,x))] \in \mathbb{R}$$

と定義する.

このとき次のことがわかる.

命題 1.1. 任意の $\beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x \in V$ に対して

$$Q[Z_n(\beta)] = e^{n\lambda(\beta)}, \quad Q[Z_{n,x}(\beta)] = e^{n\lambda(\beta)}P(X_n = x)$$

証明. 定義に戻ると

$$Q[Z_n(\beta,\eta)] = Q\left[P\left[\exp\left(\beta\sum_{k=1}^{n}\eta(k,X_k)\right)\right]\right]$$

となる. 非負性と X と η の独立性から P と Q に関する期待値は交換可能であるので

$$\begin{aligned} Q[Z_n(\beta,\eta)] &= P\left[Q\left[\exp\left(\beta\sum_{k=1}^{n}\eta(k,X_k)\right)\right]\right] \\ &= P\left[Q\left[\prod_{k=1}^{n}\exp(\beta\eta(k,X_k))\right]\right] \\ &= P\left[e^{n\lambda(\beta)}\right] = e^{n\lambda(\beta)} \qquad (\because i \neq j\ \text{のとき}\ \eta(i,X_i)\ \text{と}\ \eta(j,X_j)\ \text{は独立}) \end{aligned}$$

である. 後半も同様. □

$(m,y) \in \mathbb{N}_0 \times V$ に対して

$$\theta_{m,y} \circ \eta := \{\eta(n+m, x+y); n \in \mathbb{N}, x \in V\}$$

でランダム媒質のシフトを定義し, 可測関数 $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ に対して

$$\theta_{m,y} \circ f(\eta) = f(\theta_{m,y} \circ \eta) \tag{1.4}$$

と定義する.

このとき X のマルコフ性から次のことがわかる: 任意の $n, m \in \mathbb{N}_0$, $z \in V$ に対して

$$\begin{aligned} Z_{n+m}(\beta,\eta) &= \sum_{y \in V} Z_{n,y}(\beta,\eta)\theta_{n,y} \circ Z_m(\beta,\eta) \\ Z_{n+m,z}(\beta,\eta) &= \sum_{y \in V} Z_{n,y}(\beta,\eta)\theta_{n,y} \circ Z_{m,z}(\beta,\eta). \end{aligned} \tag{1.5}$$

さらに重要な基本性質はマルチンゲール性である.

定理 1.1.

$$W_n(\beta,\eta)=\frac{Z_n(\beta,\eta)}{Q[Z_n(\beta,\eta)]}$$

と定義し, **正規化分配関数**と呼ぶことにする.

$\mathscr{G}_0=\{\emptyset,\overline{\Omega}\}$, $n\geqslant 1$ に対して $\mathscr{G}_n=\sigma[\eta(i,x):1\leqslant i\leqslant n, x\in V]$ とする. このとき以下が成り立つ.

(i) $W_n(\beta,\eta)$ は $\mathscr{G}_n$ に関する非負マルチンゲールである.

(ii) ある非負確率変数 $W_\infty(\beta,\eta)$ が存在して

$$W_\infty(\beta,\eta)=\lim_{n\to\infty}W_n(\beta,\eta),\quad Q\text{-a.s.} \tag{1.6}$$

となる.

(iii) $W_\infty(\beta,\eta)$ は次のことが成り立つ:

$$Q\left(W_\infty(\beta,\eta)>0\right)\in\{0,1\} \tag{1.7}$$

注意 1.8. β や η を強調する必要がないときは $W_n(\beta,\eta), W_\infty(\beta,\eta)$ を W_n, W_∞ や $W_n(\beta), W_\infty(\beta)$ と表すこともある. 以下同様に β や η に関する関数に対して β や η を省略することがある.

証明. ([39, Lemma 2.3.1])

$n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{Z}^d$ に対して

$$e_{n,x}(\beta,\eta)=\exp\left(\beta\eta(n,x)-\lambda(\beta)\right)$$

とおくと

$$Q[e_{n,x}(\beta,\eta)]=1,\quad Q[e_{n,x}(\beta,\eta)^2]=\exp\left(\lambda(2\beta)-2\lambda(\beta)\right) \tag{1.8}$$

である.

(i) $n\geqslant 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\zeta_0(\beta,\eta,X)=1\\&\zeta_n(\beta,\eta,X)=\textstyle\prod_{i=1}^n e_{i,X_i}(\beta,\eta)\qquad n\geqslant 1\end{aligned} \tag{1.9}$$

と定義すると

$$W_n(\beta,\eta)=P\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)\right]$$

であることがわかる. Fubini の定理より $n\geqslant 1$ に対して

$$\begin{aligned}Q\left[W_n(\beta,\eta)|\mathscr{G}_{n-1}\right]&=P\left[Q\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)|\mathscr{G}_{n-1}\right]\right]\\&=P\left[\zeta_{n-1}(\beta,\eta,X)Q\left[e_{n,X_n}(\beta,\eta)|\mathscr{G}_{n-1}\right]\right]\\&=W_{n-1}(\beta,\eta),\quad Q\text{-a.s.}\end{aligned}$$

となりマルチンゲールである. 非負性は定義から明らか.

(ii) (i) 非負マルチンゲールに対する収束定理から従う [48, Section 4.2, (2.10)]. また任意の $m\in\mathbb{N}_0, x\in V$ に対して

$$\theta_{m,x}\circ W_\infty(\beta,\eta)=\lim_{n\to\infty}\theta_{m,x}\circ W_n(\beta,\eta),\quad Q\text{-a.s.}$$

が成り立つことに注意する.

(iii) $\{W_\infty(\beta,\eta)>0\}$ という事象は

$$\bigcap_{n\geqslant 1}\sigma\left[\eta(j,x);j\geqslant n,x\in V\right]$$

可測である. よって Kolmogorov の $0-1$ 法則より

$$Q\left(W_\infty(\beta,\eta)>0\right)\in\{0,1\}$$

である.

□

例題 1.6. $b=1$ のときに例題 1.5 上のマルコフ連鎖に対して DPRE を考える. ($x\in V$ で $|v|=n$ となるものは唯一であることに注意する.) $\eta(n,x)\overset{d}{\sim}N(0,1)$ とすると

$$W_n(\beta,\eta)=\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\beta\eta(n,v)-\frac{\beta^2}{2}\right)$$

となる. 大数の法則から $W_\infty(\beta,\eta)=0$ (Q-a.s.) となることがわかる.

注意 1.9. 一般のマルコフ連鎖では成り立たないが $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークのとき

$$Q[W_\infty]=\begin{cases}1, & \text{(1.6) が } L^1(Q)\text{-収束する}\\ 0, & \text{(1.6) が } L^1(Q)\text{-収束しない}\end{cases}\tag{1.10}$$

が成り立つ. 実際 Fatou の補題から

$$0\leqslant\ell_x:=Q\left[\theta_{0,x}\circ W_\infty\right]\leqslant\lim_{n\to\infty}Q\left[\theta_{0,x}\circ W_n\right]=1$$

となる. グラフのシフト不変性より ℓ_x は $x\in\mathbb{Z}^d$ に依存しないことに注意し, $\ell:=\ell_0$ と定義する. このとき

$$\ell^2=\ell\tag{1.11}$$

が成り立つ.

実際, 分配関数の定義から任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$W_\infty(\beta,\eta)=\sum_{y\in V}W_{n,y}(\beta,\eta)\theta_{n,y}\circ W_\infty(\beta,\eta)$$

となることがわかる. ただし $n\geqslant 0$, $y\in\mathbb{Z}^d$ に対して $W_{n,y}(\beta,\eta)=Z_{n,y}(\beta,\eta)e^{-n\lambda(\beta)}$ とする.

Jensen の不等式より任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$Q\left[\exp\left(-W_\infty(\beta,\eta)\right)|\mathscr{G}_n\right]\geqslant\exp\left(-Q\left[W_\infty(\beta,\eta)|\mathscr{G}_n\right]\right)=\exp\left(-W_n(\beta,\eta)\ell\right)\geqslant\exp\left(-W_n(\beta,\eta)\right)$$

となり, $n\to\infty$ とすると

$$W_\infty(\beta,\eta)\ell=W_\infty(\beta,\eta)\quad Q\text{-a.s.}$$

となり両辺の Q についての期待値をとると (1.11) が求まる.

(1.6) が $L^1(Q)$-収束するとき $Q[W_\infty(\beta,\eta)]=1$ であり, $L^1(Q)$-収束しないとき $Q[W_\infty(\beta,\eta)]\neq 1$ である ([48, Section 4.5, (5.2)]) ので $\ell=0$ となる.

マルチンゲールの性質から以下の 2 つは同値であることに注意する.

- (1.6) が $L^1(Q)$-収束する.
- $\{W_n(\beta,\eta):n\in\mathbb{N}\}$ の一様可積分である.

1.2　相転移 I

この節ではマルコフ連鎖 $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ は (1.28) を満たすものとする.
このとき DPRE は次の重要な性質を満たす.

定理 1.2. **(DPRE の相転移 I)**
ある定数 $\beta_c^{1,-} \leqslant 0 \leqslant \beta_c^{1,+}$ が存在して

$$Q(W_\infty(\beta) > 0) = \begin{cases} 1, & \beta \in (\beta_c^{1,-}, \beta_c^{1,+}) \cup \{0\} \\ 0, & \beta \in (-\infty, \beta_c^{1,-}) \cup (\beta_c^{1,+}, \infty) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に前者を**媒質による摂動の弱い相**, 後者を**媒質による摂動の強い相**という.

注意 1.10. 簡単のため, 媒質による摂動の弱い相を (WD) の相, 媒質による摂動の強い相を (SD) の相と書くことにする.

注意 1.11. 臨界点 $\beta_c^{1,+}, \beta_c^{1,-}$ はマルコフ連鎖 X, η の分布 Q に依存する非ランダムな定数である.

証明. まず任意の $\delta \in (0,1)$ に対して $\{W_n(\beta,\eta)^\delta : n \geqslant 0\}$ が一様可積分であることに注意する. このとき

$$\lim_{n\to\infty} Q[W_n(\beta,\eta)^\delta] = Q[W_\infty(\beta,\eta)^\delta]$$

が成り立つ. 注意 1.9 より

$$Q(W_\infty(\beta,\eta) > 0) = 1 \Leftrightarrow (1.6) \text{ が } L^1(Q)\text{-収束}$$

が成り立つ. これと (1.7) により任意の $\delta \in (0,1)$ に対して

$$Q(W_\infty(\beta,\eta) > 0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Q[W_n(\beta,\eta)^\delta] = Q[W_\infty(\beta,\eta)^\delta] > 0 \tag{1.12}$$

が成り立つ. よって以下 $\delta \in (0,1)$ に対して $\beta \geqslant 0$ で

$$\frac{\partial}{\partial\beta} Q[W_n(\beta,\eta)^\delta] \leqslant 0$$

であることを示せばよいが, 次の補題 1.1 を $\phi(x) = x^\delta$ に対して適用すればよい. □

補題 1.1. [43, Lemma 3.3] 実数値関数 $\phi \in C^1((0,\infty))$ は, ある定数 $C > 0$ と $p \in [1,\infty)$ に対して

$$|\phi'(u)| \leqslant Cu^p + Cu^{-p}, \quad u > 0$$

を満たすとする. このとき以下が成り立つ.

(i) $\phi(W_n(\beta,\eta))$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial\beta}(W_n(\beta,\eta)) \in L^1(Q)$ であり, $Q[\phi(W_n(\beta,\eta))]$ は $\beta \in \mathbb{R}$ に関して連続微分可能. さらに

$$\frac{\partial}{\partial\beta} Q[\phi(W_n(\beta,\eta))] = Q\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\phi(W_n(\beta,\eta))\right]$$

(ii) ϕ が $(0,\infty)$ 上で凹であるとする. このとき

$$\frac{\partial}{\partial\beta} Q[\phi(W_n(\beta,\eta))] \leqslant 0, \quad \beta \geqslant 0.$$

証明. (i) $p \geqslant 1$ に対して

$$\begin{aligned}
W_n(\beta,\eta)^{-p} &= P[\zeta_n(\beta,\eta,X)]^{-p} \\
&\leqslant P\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)^{-p}\right] \qquad (\because \text{Jensen の不等式}) \\
&\leqslant e^{np\lambda(\beta)} P\left[\exp\left(p\beta \sum_{i=1}^{n} |\eta(i,X_i)|\right)\right]
\end{aligned}$$

に注意すればよい. 他も同様. 後半は Fubini の定理を用いればよい.

(ii) (i) と Fubini の定理から

$$Q\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\phi(W_n(\beta,\eta))\right] = P\left[Q\left[\phi'(W_n(\beta,\eta))\left(\sum_{i=1}^{n}\eta(i,X) - n\lambda'(\beta)\right)\zeta_n(\beta,\eta,X)\right]\right]$$

ここで各 X に対して Radon-Nikodym 微分が

$$\frac{dQ_X}{dQ}(\eta) = \zeta_n(\beta,\eta,X)$$

で与えられる $(\overline{\Omega},\mathscr{G})$ 上の確率測度 Q_X を考える. このとき ϕ の凹性を用いると

$$\eta \text{に関して} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\eta(i,X) - n\lambda'(\beta) \text{ は単調増加} \\ \phi'(W_n(\beta,\eta)) \text{ は単調減少} \end{cases}$$

であることがわかる. よって FKG 不等式から

$$\begin{aligned}
Q\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\phi(W_n(\beta,\eta))\right] &= P\left[Q\left[\phi'(W_n(\beta,\eta))\left(\sum_{i=1}^{n}\eta(i,X) - n\lambda'(\beta)\right)\zeta_n(\beta,\eta,X)\right]\right] \\
&\leqslant P\left[Q_X\left[\phi'(W_n(\beta,\eta))\right]Q_X\left[\sum_{i=1}^{n}\eta(i,X) - n\lambda'(\beta)\right]\right] = 0
\end{aligned}$$

□

$\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークで定義された DPRE に対して定理 1.2 の相転移の臨界点について次のことが知られている.

定理 1.3. (i) $d = 1,2$ のとき $\beta_c^{1,+} = \beta_c^{1,-} = 0$.

(ii) $d \geqslant 3$ のとき $\beta_c^{1,-} < 0 < \beta_c^{1,+}$.

(i) の証明は第 3.2 節で与える.

1.3 相転移 II

次に統計力学模型を解析する際に重要な役割を果たす自由エネルギーを定義する.

この節では $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークで定義された DPRE について扱う.

定理 1.4. ([39, Proposition 1.5]) 任意の $\beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(\beta) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Q[\log Z_n(\beta,\eta)] \\ &= \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} Q[\log Z_n(\beta,\eta)] \in (-\infty,\infty] \end{aligned} \tag{1.13}$$

が存在する. この $\psi(\beta)$ を DPRE の自由エネルギーと呼ぶ.

また $1 \leqslant p < \infty$ に対して

$$\frac{1}{n}\log Z_n(\beta,\eta) \to \psi(\beta) \qquad \text{in } L^p(Q),\ Q\text{-a.s.} \tag{1.14}$$

が成り立つ.

(1.13) の証明. 次のことを示せばよい.

$$\text{任意の } n,m \in \mathbb{N} \text{ に対して } Q[\log Z_{n+m}] \geqslant Q[\log Z_n] + Q[\log Z_n] \tag{1.15}$$

これは $Q[\log Z_n]$ が優加法的であることを意味しており, 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Q[\log Z_n] = \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} Q[\log Z_n] \tag{1.16}$$

が存在する.

(1.15) を示す. (1.5) より

$$\begin{aligned}\frac{Z_{n+m}(\beta,\eta)}{Z_n(\beta,\eta)} &= \frac{1}{Z_n(\beta,\eta)} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Z_{n,x}(\beta,\eta)\theta_{n,x}\circ Z_m(\beta,\eta) \\ &= \mu_n[\theta_{n,X_n}\circ Z_m(\beta,\eta)]\end{aligned}$$

となることがわかる. よって

$$\begin{aligned}Q[\log Z_{n+m}(\beta,\eta)] =& Q[\log Z_n(\beta,\eta)] + Q[\log \mu_n[\theta_{n,X_n}\circ Z_m(\beta,\eta)]] \\ \geqslant& Q[\log Z_n(\beta,\eta)] + Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_n(X_n = x)\log\theta_{n,x}\circ Z_m(\beta,\eta)\right] \qquad (\because \text{Jensen の不等式})\end{aligned}$$

となる. 特に $\{\mu_n(X_n = x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ は $\mathscr{G}_n$-可測であることと, $\log\theta_{n,x}\circ Z_m(\beta,\eta)$ は $\sigma[\eta(l,x); n+1 \leqslant l \leqslant n+m, x \in \mathbb{Z}^d]$-可測であり分布が $x \in \mathbb{Z}^d$ についてシフト不変であることから (1.15) が示される. □

(1.14) の証明は 1.4 節に回す.

注意 1.12. Jensen の不等式を用いると

$$Q[\log Z_n(\beta,\eta)] \leqslant \log Q[Z_n(\beta,\eta)] = n\lambda(\beta)$$

が成り立つので

$$F(\beta) := \psi(\beta) - \lambda(\beta) \leqslant 0 \tag{1.17}$$

となる. 以下ではこの $F(\beta)$ を正規化自由エネルギーと呼ぶことにする.

また明らかに

$$\log Z_n(\beta,\eta) \geqslant \left(\frac{1}{2d}\right)^n \exp\left(\sum_{k=1}^n \beta\eta(k,ke_1)\right)$$

であるので

$$\psi(\beta) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \beta\eta(k, ke_1) - \log 2d = -\log 2d \tag{1.18}$$

となる. ただし $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ とする.

このとき次のような相転移が成り立つことが知られている.

定理 1.5. **(DPRE の相転移 II)**
ある定数 $\beta_c^{2,-} \leqslant 0 \leqslant \beta_c^{2,+}$ が存在して

$$F(\beta) \begin{cases} = 0, & \beta \in (\beta_c^{2,-}, \beta_c^{2,+}) \cup \{0\} \\ < 0, & \beta \in (-\infty, \beta_c^{2,-}) \cup (\beta_c^{2,+}, \infty) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に後者を**媒質による摂動の非常に強い相**という.

証明. 補題 1.1 を $\phi(x) = \log x$ に対して適用すればよい. □

注意 1.13. 相転移の定義から

$$\beta_c^{2,-} \leqslant \beta_c^{1,-} \leqslant 0 \leqslant \beta_c^{1,+} \leqslant \beta_c^{2,+}$$

が成り立つことがわかる.

注意 1.14. 簡単のために媒質による摂動の非常に強い相を (VSD) の相と表すことにする.

また定理 1.3 のように次のことが成り立つ.

定理 1.6. (i) $d = 1, 2$ のとき $\beta_c^{2,+} = \beta_c^{2,-} = 0$.

(ii) $d \geqslant 3$ のとき $\beta_c^{2,-} < 0 < \beta_c^{2,+}$.

(i) の証明は第 3.2 節, 第 5.2 節で与える.

$\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークで定義される DPRE に対して $d \geqslant 3$ のとき

Conjeccture 1. $\beta_c^{1,+} = \beta_c^{2,+}, \quad \beta_c^{1,-} = \beta_c^{2,-}$

Conjeccture 2. $W_\infty(\beta, \eta) = 0 \quad Q\text{-a.s.} \Rightarrow F(\beta) < 0$

また次のこともわかる.

定理 1.7. ([28, Theorem 1.1, Theorem 1.2]) $\Delta_d = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{Q}^d : |x_1| + \cdots + |x_d| \leqslant 1\}$ とする. $x \in \Delta_d$ に対して

$$\mathbb{N}_x := \{n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}^d, n + n|x_1| + \cdots n|x_d| \in 2\mathbb{N}\}$$

と定義する. このとき $x \in \Delta_d$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(\beta,x) &= \lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}_x} \frac{1}{n} Q\left[\log Z_{n,nx}(\beta,\eta)\right] \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}_x} \frac{1}{n} Q\left[\log Z_{n,nx}(\beta,\eta)\right] \qquad (1.19)\end{aligned}$$

が存在し, $p \in [1,\infty)$

$$\psi(\beta,x) = \lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}_x} \frac{1}{n} \log Z_{n,nx}(\beta,\eta), \quad \text{in } L^p(Q),\, Q\text{-a.s.} \qquad (1.20)$$

が成り立つ. また

$$\psi(\beta) = \sup_{x\in\Delta_d} \psi(\beta,x) = \psi(\beta,0) \qquad (1.21)$$

が成り立つ.

(1.19), (1.20) の証明. $x \in \Delta_d$ を固定する. このとき定義から容易にわかることとして任意の $m,n \in \mathbb{N}_x$ に対して

$$Z_{m+n,(m+n)x}(\beta,\eta) \geqslant Z_{m,nx}(\beta,\eta)\theta_{n,nx} \circ Z_{m,mx}(\beta,\eta)$$

である. 特に

$$\begin{aligned}\theta_{n,nx} \circ Z_{m,mx}(\beta,\eta) &\overset{\mathrm{d}}{\sim} Z_{m,mx}(\beta,\eta), \\ \log Z_{m,mx}(\beta,\eta) &\in L^1(Q)\end{aligned}$$

であり $Z_{m,nx}(\beta,\eta)$ と $\theta_{n,nx} \circ Z_{m,mx}(\beta,\eta)$ は独立なので Kingman の劣加法エルゴード定理 (定理 1.10) より (1.19), (1.20) の概収束性が従う. □

1.4 (1.14), (1.21) の証明

この節では (1.14), (1.21) の証明を与える.

証明には次の優マルチンゲールに対する concentration 不等式が重要になる.

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とし, 情報増大系 $\{\mathscr{F}_i : 0 \leqslant i \leqslant n\}$ は $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ を満たすとする.

さらに $\{S_i : 0 \leqslant i \leqslant n\}$ を $\mathbb{R}$-値の $\mathscr{F}_i$-優マルチンゲールで $S_0 = 0$ を満たすものとし, $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $X_i = S_i - S_{i-1}$ と定義する.

定理 1.8. ある定数 $K > 0$ が存在して $\{X_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ に対して

$$P\left[e^{|X_i|} | \mathscr{F}_{i-1}\right] \leqslant K, \quad P\text{-a.s.}$$

を満たすとき

$$P\left[e^{tS_n}\right] \leqslant \exp\left(\frac{nKt^2}{1-t}\right), \quad t \in (0,1) \qquad (1.22)$$

が成り立つ. さらに

$$P\left(\frac{S_n}{n} > x\right) \leqslant \exp\left(-n\left(\sqrt{x+K} - \sqrt{K}\right)^2\right), \quad x > 0 \qquad (1.23)$$

が成り立つ.

定理 1.8 の証明はこの節の最後に回して (1.14), (1.21) の証明を先に与えよう. 証明は [39, Proposition 1.5] 証明を用いる. この証明のアイデアは第 5.3 節でも利用する.

記号の簡略化のために $(\bar{\Omega},\mathscr{G},Q)$ 上の確率変数 V が $V\in L^1(Q)$ であるとき $n=1,2,\cdots,$ に対して

$$Q_n[V]:=Q[V|\mathscr{G}_n]$$

と定義する.

(1.14), (1.20) の証明. $\log Z_n(\beta,\eta)-Q[\log Z_n(\beta,\eta)]$ と $\log Z_{n,x}(\beta,\eta)-Q[\log Z_{n,x}(\beta,\eta)]$ について調べていきたいが, これは定義から $\log W_n(\beta,\eta)-Q[\log W_n(\beta,\eta)]$ や $\log W_{n,x}(\beta,\eta)-Q[\log W_{n,x}(\beta,\eta)]$ を調べることと同値であることに注意する.

以下, $n\in\mathbb{N}$ に対して $U_n=W_n(\beta,\eta)$ または $W_{n,x}(\beta,\eta)$ とおく. ただし $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{Z}^d$ は $|x_1|+\cdots+|x_d|+n\in 2\mathbb{N}$ を満たすとする.

このとき $j=1,\cdots,n$ に対して $\mathscr{G}_j$-可測確率変数

$$V_{n,j}=Q_j[\log U_n]-Q_{j-1}[\log U_n]$$

を考えると

$$\log U_n-Q[\log U_n]=\sum_{j=1}^n V_{n,j}$$

となる. ある定数 $K>0$ が存在して

$$Q_{j-1}\left[e^{|V_{n,j}|}\right]\leqslant K,\quad Q\text{-a.s.} \tag{1.24}$$

が成り立つとき, 定理 1.8 より

$$Q\left[\exp\left(t(\log U_n-Q[\log U_n])\right)\right]\leqslant\exp\left(-\frac{nKt^2}{1-|t|}\right),\quad |t|\in(0,1) \tag{1.25}$$

$$P\left(\log U_n-Q[\log U_n]>ns\right)\leqslant\exp\left(-n\left(\sqrt{s+K}-\sqrt{K}\right)^2\right),\quad s>0 \tag{1.26}$$

が成り立つ. よって (1.24) を確認すればよい.

ここで $j=1,\cdots,n$ に対して

$$\hat{\zeta}_n^j(\beta,\eta,X)=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}e_{i,X_i}(\beta,\eta)$$

とし,

$$\hat{U}_n^j=\begin{cases}P\left[\hat{\zeta}_n^j(\beta,\eta,X)\right], & U_n=W_n(\beta,\eta)\\ P\left[\hat{\zeta}_n^j(\beta,\eta,X):X_n=x\right], & U_n=W_{n,x}(\beta,\eta)\end{cases}$$

とすると明らかに

$$Q_j[\log\hat{U}_n^j]=Q_{j-1}[\log\hat{U}_n^j],\quad Q\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

よって

$$V_{n,j}=Q_j\left[\log\frac{U_n}{\hat{U}_n^j}\right]-Q_{j-1}\left[\log\frac{U_n}{\hat{U}_n^j}\right]$$

と書ける.

ここでまず

$$0 \leqslant -Q_{j-1}\left[\log \frac{U_n}{\hat{U}_n^j}\right] \leqslant \lambda(\beta)$$

を示す. $\mathbb{Z}^d$ 上の確率測度を

$$\hat{\mu}_{n,j}^{\beta}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\hat{U}_n^j} P\left[\hat{\zeta}_n^j(\beta,\eta,X) : X_j = y\right], & U_n = W_n(\beta,\eta) \\ \dfrac{1}{\hat{U}_n^j} P\left[\hat{\zeta}_n^j(\beta,\eta,X) : X_j = y, X_n = x\right], & U_n = W_{n,x}(\beta,\eta) \end{cases}$$

と定義すると

$$\frac{U_n}{\hat{U}_n^j} = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \hat{\mu}_{n,j}^{\beta}(y) e_{j,y}(\beta,\eta)$$

となる. Jensen の不等式から

$$\begin{aligned} -Q_{j-1}\left[\log \frac{U_n}{\hat{U}_n^j}\right] &= -Q_{j-1}\left[\log\left(\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \hat{\mu}_{n,j}^{\beta}(y) e_{j,y}(\beta,\eta)\right)\right] \\ &\begin{cases} \geqslant -\log Q_{j-1}\left[\left(\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \hat{\mu}_{n,j}^{\beta}(y) e_{j,y}(\beta,\eta)\right)\right] = 0 \\ \leqslant -Q_{j-1}\left[\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \hat{\mu}_{n,j}^{\beta}(y) \log\left(e_{j,y}(\beta,\eta)\right)\right] = \lambda(\beta) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $t \in \{1,-1\}$ に対して Jensen の不等式と $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x$ の凸性より

$$\begin{aligned} Q_{j-1}\left[e^{tV_{n,j}}\right] &\leqslant \exp\left(\lambda(\beta)t^+\right) Q_{j-1}\left[\exp\left(tQ_j\left[\log \frac{U_n}{\hat{U}_n^j}\right]\right)\right] \\ &\leqslant \exp\left(\lambda(\beta)t^+\right) Q_{j-1}\left[Q_j\left[\left(\frac{U_n}{\hat{U}_n^j}\right)^t\right]\right] \\ &\leqslant \begin{cases} \exp\left(\lambda(\beta)\right), & t = 1 \\ \exp\left(\lambda(\beta)+\lambda(-\beta)\right), & t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

となり, $K = 2\exp\left(\lambda(\beta)+\lambda(-\beta)\right)$ にとして (1.24) が確認できた. ただし, $t^+ = \max\{t,0\}$. □

注意 1.15. 証明から (1.25), (1.26) に現れる K は x, n に依存しない定数であることがわかる. これはこの後で重要な役割を果たす.

(1.21) の証明は [28, Proposition 2.4] を用いる.

(1.21) の証明. まず次のことに注意する. $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ が $|x_1| + \cdots + |x_d| + n \in 2\mathbb{N}$, $|x_1| + \cdots + |x_d| \leqslant n$ を満たすとき

$$Z_{2n,0}(\beta,\eta) \geqslant Z_{n,x}(\beta,\eta)\theta_{n,x} \circ Z_{n,0}(\beta,\eta)$$

が成り立つので

$$Q[\log Z_{2n,0}(\beta,\eta)] \geqslant 2Q[\log Z_{n,x}(\beta,\eta)]. \tag{1.27}$$

$\varepsilon \in (0,1)$ に対して Jensen の不等式より

$$
\begin{aligned}
Q[\log Z_n(\beta,\eta)] &= \frac{1}{\varepsilon} Q\left[\log\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Z_{n,x}(\beta,\eta)\right)^{\varepsilon}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\log Q\left[\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Z_{n,x}(\beta,\eta)\right)^{\varepsilon}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\log\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Q\left[Z_{n,x}(\beta,\eta)^{\varepsilon}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\log\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Q\left[\exp\left(\varepsilon(\log Z_{n,x}(\beta,\eta) - Q[\log Z_{n,x}(\beta,\eta)])\right)\exp\left(\varepsilon Q[\log Z_{n,x}(\beta,\eta)]\right)\right]\right).
\end{aligned}
$$

ただし 3 行目は $\varepsilon \in (0,1)$ に対して $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ ならば $(a+b)^{\varepsilon} \leqslant a^{\varepsilon} + b^{\varepsilon}$ が成り立つことを用いた. ここで (1.25) より

$$
Q[\log Z_n(\beta,\eta)] \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\log\left((2n+1)^d \exp\left(-\frac{nK\varepsilon^2}{1-\varepsilon}\right)\exp\left(\varepsilon Q[\log Z_{n,x}(\beta,\eta)]\right)\right)
$$

が成り立つことがわかる. (1.27) より

$$
Q[\log Z_n(\beta,\eta)] \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\log(2n+1)^d - \frac{nK\varepsilon^2}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} Q[\log Z_{2n,0}(\beta,\eta)]\right)
$$

となり両辺を n で割り, $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ の順で極限をとると (1.21) が従う. □

1.4.1 定理 1.8 の証明

定理 1.8 の証明を与える. ここでは一般的な議論を行うので用いる記号は DPRE のものとは独立している.

補題 1.2. ([58, Lemma 2.6])

X を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上で定義された $\mathbb{R}$-値確率変数で $P[X] \leqslant 0$, ある $K > 0$ が存在し $P[\exp(|X|)] \leqslant K$ を満たすとする. このとき $t \in (0,1)$ に対して

$$
P[\exp(tX)] \leqslant \exp\left(\frac{Kt^2}{1-t}\right)
$$

が成り立つ.

証明. $t \in (0,1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
P[\exp(tX)] &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{X^k}{k!}\right] t^k \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{\infty} E\left[\frac{X^k}{k!}\right] t^k \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{\infty} E[e^{|X|}] t^k \leqslant 1 + \frac{Kt^2}{1-t} \leqslant \exp\left(\frac{Kt^2}{1-t}\right).
\end{aligned}
$$

□

定理 *1.8* の証明. 補題 1.2 より帰納的に (1.22) がわかる. また任意の $x > 0$, $t \in (0,1)$ に対して

$$
P\left(\frac{S_n}{n} > x\right) \leqslant e^{xnt} P[\exp(tS_n)] \leqslant \exp\left(-n\left(xt - \frac{Kt^2}{1-t}\right)\right)
$$

となる.

$$\sup_{t\in(0,1)}\left\{xt-\frac{Kt^2}{1-t}\right\}=(\sqrt{x+K}-\sqrt{K})^2$$

であるので示された. □

とりあえずこの章はこの程度で終えておく. 残りの 1.5 節では上で定義したものとは少し異なるランダム媒質中のディレクティドポリマーを紹介しておく. 1.6 節では DPRE と分枝ランダムウォークとの関連について紹介する. 詳しくは分枝ランダムウォークの文献を参照することを勧める.

次章以降は考える DPRE は基本的には $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークで定義されるものを考える. 興味のあるものは一般のマルコフ連鎖に対してどこまで同じことができるのかを考えながら読み進めるとよい.

1.5 様々なランダム媒質中のディレクティドポリマー

この節ではこの章を通して考えてきたランダム媒質中のディレクティドポリマーとは設定を変えて定義されているランダム媒質中のディレクティドポリマーを紹介しておこう. ここで出てきた記号はこのノートで主に扱う内容のものとは独立である.

1.5.1 時空間 Parabolic Anderson 模型

まずは DPRE を時間を連続化したものと捉えることが出来る模型を紹介する.

定義 1.4. **(時空間 parabolic Anderson 模型 (時空間 PAM))**

- ランダムウォーク: $\{\{X_t\}_{t\geqslant 0},P^\kappa\}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の原点出発のジャンプレートが $\kappa>0$ の単純ランダムウォーク, $(\Omega,\mathscr{F})$ をランダムウォーク $\{X_t:t\geqslant 0\}$ の経路空間,
- ランダム媒質: $\{\{B_t(x)\}_{t\geqslant 0},x\in\mathbb{Z}^d\}$ を確率空間 $(\bar{\Omega},\mathscr{G},Q)$ 上で定義された 1 次元ブラウン運動の族,

とし これらは独立であるとする.

このとき $\beta\in\mathbb{R}$ に対して $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の確率測度 $\mu_t^{\kappa,\beta}$ を次のように定義する:

$$\mu_t^{\kappa,\beta}(dX)=\frac{1}{Z_t^{\kappa,\beta}(B)}\exp\left(\beta\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\int_0^t 1\{X_s=x\}dB_s(x)\right)P^\kappa(dX)$$

ただし,

$$Z_t^{\kappa,\beta}(B)=P^\kappa\left[\exp\left(\beta\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\int_0^t 1\{X_s=x\}dB_s(x)\right)\right]$$

を分配関数, β を逆温度という.

注意 1.16. 時空間 PAM は DPRE と同様の結果が概ね確認できる [29]. また DPRE とは異なる解析手法 (Malliavin 解析等) が利用でき, DPRE より詳しいことがわかることもある [60, 36]. [29] 以降に DPRE で新しくわかった結果がどこまで時空間 PAM で成立するかを確認することは重要だがほとんどが未着手である.

注意 1.17. $t \geqslant 0, x \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$Z_{t,x}^{\kappa,\beta}(B) = P^\kappa\left[\exp\left(\beta\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\int_0^t 1\{X_s = x\}dB_s(x)\right) : X_t = x\right]$$

と定義すると

$$dZ_{t,x}^{\kappa,\beta} = \kappa\Delta Z_{t,x}^{\kappa,\beta}dt + \beta Z_{t,x}^{\kappa,\beta}dB_t(x)$$

を満たすことが知られている. ただし $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ に対して

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d, |y-x|=1}(f(y) - f(x))$$

を離散ラプラシアンとする.

1.5.2 ブラウン媒質中のディレクティドポリマー

次は DPRE の空間を連続化した模型を紹介する.

定義 1.5. (ブラウン媒質中のディレクティドポリマー)

- ランダムウォーク: $\{\{X_n\}_{n\geqslant 0}, P\}$ を $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォークで遷移確率が

$$P(X_{n+1} \in dy|X_n = x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2}\right)dy$$

  で与えられるものとする. $(\Omega, \mathscr{F})$ をランダムウォーク $\{X_n : n \geqslant 0\}$ の経路空間とする.

- ランダム媒質: $\{\{W_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d} : n \geqslant 1\}$ を確率空間 $(\bar{\Omega}, \mathscr{G}, Q)$ 上で定義された独立なガウス場の列で次を満たすとする:

  - 任意の $x \in \mathbb{R}^d, n \geqslant 1$ に対して $Q[W(x)] = 0$.
  - ある正定値関数 $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が存在して

$$Q[W_m(x)W_n(y)] = \delta_{n,m}g(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^d, n, m \in \mathbb{N}.$$

とし, これらは独立であるとする.

このとき $\beta \in \mathbb{R}$ に対して $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度 μ_n^β を次のように定義する:

$$\mu_n^\beta(dX) = \frac{1}{Z_n^\beta(W)}\exp\left(\beta\sum_{i=1}^n W_i(X_i)\right)P(dX)$$

ただし,

$$Z_n^\beta(B) = P\left[\exp\left(\beta\sum_{i=1}^n W_i(X_i)\right)\right]$$

を分配関数, β を逆温度という.

注意 1.18. 通常 g には連続性や平行移動不変性, $|x-y| \to \infty$ としたときの減衰の速さ等について様々な仮定を与える.

注意 1.19. ブラウン媒質中のディレクティドポリマーに関してはランダムウォークの遷移確率が熱核で与えられることにより, 離散的な Girsanov の定理を用いて DPRE では得られていない優拡散性を証明できる [68].

1.5.3 ポアッソン媒質中のディレクティドブラウン運動

次は DPRE の時間と空間を連続化した模型の一つを紹介する.

定義 1.6. (ポアッソン媒質中のディレクティドブラウン運動)

- ブラウン運動: $\{\{B_t\}_{t\geqslant 0}, P\}$ を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上で定義された $\mathbb{R}^d$ 上の標準ブラウン運動とする.
- ランダム媒質: η を確率空間 $(\bar{\Omega}, \mathscr{G}, Q)$ 上で定義された $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の強度が 1 のポアッソンランダム測度とする. すなわち任意の $A_1, \cdots A_k \in \mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ が有界で互いに素なものに対して

$$Q\left(\bigcap_{i=1}^{k}\eta(A_i)=n_i\right)=\prod_{i=1}^{k}\exp\left(-|A_i|\right)\frac{|A_i|^{n_i}}{n_i!},\qquad n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{N}_0$$

  が成り立つ. ただし $A\in\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ に対して $|A|$ を A のルベーグ測度とする.
- $\mathbb{R}^d$ のブラウン運動のグラフ $\{(s,B(s)) : s\geqslant 0\}$ に対して

$$V_t = V_t(B) = \{(s,x) : 0\leqslant s\leqslant t, x\in U(B_s)\}$$

  と定義する. ただし $U(x)$ は $x\in\mathbb{R}^d$ を中心とする体積が 1 の閉球とする.

これらは独立であるとする.
このとき $\beta\in\mathbb{R}$ に対して $(\Omega,\mathscr{F})$ 上の確率測度 μ_t^β を次のように定義する:

$$\mu_t^\beta(dB)=\frac{1}{Z_t^\beta(\eta)}\exp\left(\beta\eta(V_t(B))\right)P(dX)$$

ただし,

$$Z_n^\beta(B)=P\left[\exp\left(\beta\eta(V_t(B))\right)\right]$$

を分配関数, β を逆温度という.

注意 1.20. ポアッソン媒質中のディレクティドブラウン運動は DPRE と同様の結果が概ね確認できる [42, 41, 34]. またブラウン媒質中のディレクティドポリマーのように空間次元が 1 次元のときは優拡散性が証明できる [74]. 他にもこの講義ノート 4 章で扱う内容のことも示されている [46].

1.5.4 確率熱方程式

次は DPRE の時間と空間の別の連続化した模型を紹介する.

定義 1.7. (確率熱方程式)

- ブラウン運動: $\{\{B_t\}_{t\geqslant 0}, P\}$ を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上で定義された $\mathbb{R}^d$ 上の標準ブラウン運動とする.

- ランダム媒質: $\{W(t,x) : t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d\}$ を確率空間 $(\bar{\Omega}, \mathscr{G}, Q)$ 上で定義されたガウス場で次を満たすとする:
  - 任意の $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geqslant 0$ に対して $Q[W(t,x)] = 0$.
  - ある正定値関数 $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が存在して

$$Q[W(s,x)W(t,y)] = (s \wedge t) g(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^d, s, t \geqslant 0$$

とし, これらは独立であるとする.

このとき $\beta \in \mathbb{R}$ に対して $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度 μ_t^β を次のように定義する:

$$\mu_t^\beta(dB) = \frac{1}{Z_t^\beta(W)} \exp\left(\beta \int_0^t W(ds, dB_s)\right) P(dB)$$

ただし,

$$Z_t^\beta(W) = P\left[\exp\left(\beta \int_0^t W(ds, dB_s)\right)\right]$$

を分配関数, β を逆温度という.

注意 1.21. $\int_0^t W(ds, dB_s)$ の定義は形式的なものである. 正確な定義は [16] の 2 章を参照するとよい.

注意 1.22. 通常 g には連続性や平行移動不変性, $|x-y| \to \infty$ としたときの減衰の速さ等について様々な仮定を与える.

注意 1.23. $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ に対して

$$Z_{t,x}^\beta(W) = P\left[\exp\left(\beta \int_0^t W(ds, dB_s)\right) | B_t = x\right] \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

とおくと,

$$\partial_t Z_{t,x}^\beta(W) = \frac{1}{2} \Delta Z_{t,x}^\beta(W) + \beta Z_{t,x}^\beta(W) \dot{W}(t,x), \quad \lim_{t \to 0} Z_{t,x}^\beta(W) dx = \delta_0(dx)$$

という確率熱方程式の解になる.

注意 1.24. 上で与えた確率熱方程式をポリマーの分野で研究されることもある [16, 35, 25, 24, 64] が, やはり大半は確率熱方程式そのものが研究対象となっている.

1.6 分枝ランダムウォーク

この節では分枝ランダムウォークの研究に現れるランダム媒質中のディレクティドポリマーについて挙げておく.

例題 1.2 の頂点に次のように名前をつける.

定義 1.8. $b \geqslant 1$ の b-分木 $G = (V, E)$ の頂点に次のように名前をつける.

(i) 原点を o と名付ける.

(ii) 第 n 世代の頂点 v と繋がっている第 $n+1$ 世代の b 個の頂点をそれぞれ $v1, v2, \cdots, vb$ と名付ける.

また第 n 世代の頂点 v が $v = oi_1 \cdots i_n$ $(i_1, \cdots, i_n \in \{1, \cdots, b\})$ という名前を持っていたとき $0 \leqslant k \leqslant n$ に対して

$$[v]_k = oi_1 \cdots i_k$$

と定義する.

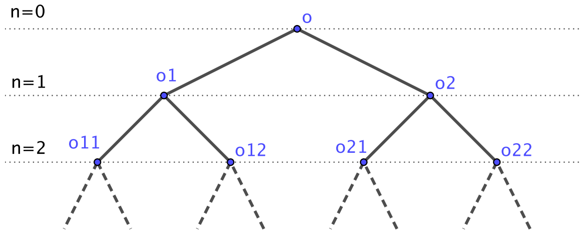


図 2: 2-分木のときの名付け

注意 1.25. $[v]_k$ は頂点 v と原点 o を結ぶ最短の経路上にある第 k 世代の頂点である.

次のように分枝ランダムウォークを定義する.

定義 1.9. ($\mathbb{R}$ 上の分枝ランダムウォーク)

(i) 時刻 $n = 0$ で原点に 1 つの個体 $(o \in V)$ がいる.

(ii) 時刻 n にいる個体 $v \in V$ はそれぞれ b 個の個体 $v1, \cdots, vb$ に分裂し消滅し, 分裂してできた個体は親のいた位置からそれぞれ $L_{vi}(1 \leqslant i \leqslant b)$ だけ移動する. ただし $\{L_v : v \in V\}$ は $\mathbb{R}$-値の独立同分布な確率変数で

$$E[\exp(\beta L_v)] < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

を満たすものとする.

注意 1.26. 第 n 世代の個体頂点 v の $\mathbb{R}$ 内の位置 S_v は

$$S_v = \sum_{i=1}^{n} L_{[v]_i}$$

と書ける.

補題 1.3. b-分木 $G = (V, E)$ に対して定義された分枝ランダムウォークに対して

$$M_n = \sum_{\substack{v \in V \\ |v| = n}} e^{S_v}$$

と定義する. 例題 1.5 のマルコフ連鎖 (X,P) に対して

$$Z_n(\beta,L) = P\left[\exp\left(\beta\sum_{i=1}^{n} L_{[X_n]_i}\right)\right]$$

と定義すると

$$M_n = b^n Z_n(1,L)$$

が成り立つ.

注意 1.27. $Z_n(\beta,L)$ は $\eta(n,v) = L_v$ ($v \in V$, $|v| = n$) としてランダム媒質を定義したランダム媒質中のディレクティドポリマーの分配関数であることがわかる.

問 1.1. 補題 1.3 で定義した分配関数に関して定理 1.2, 定理 1.5 が成り立つことを確認せよ.

分枝ランダムウォークの性質から次のこと知られている.

定理 1.9. ([50, Theorem1.1], [1, Theorem 1.1], [17, Corollary 1], [10, Theorem 0])
次のような $-\infty < \beta_0^- < 0 < \beta_0^+ < \infty$ が存在するとする:

$$\lambda(\beta_0) = \beta_0\lambda'(\beta_0).$$

このときこの DPRE の臨界点について

$$\beta_c^+ = \beta_c^{1,+} = \beta_c^{2,+} \qquad\qquad \beta_c^- = \beta_c^{1,-} = \beta_c^{2,-}$$

が成り立つ. さらに $i \in \{+,-\}$ に対して, ある確率変数 D^+, D^- で $Q(D^+ > 0) = Q(D^- > 0) = 1$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} W_n(\beta_c^i,\eta) = D^i \quad \text{in } Q\text{-probability}$$

を満たすものが存在する.

注意 1.28. b-分木グラフ上で定義された DPRE に関しては Conjecture 2 が成り立たないことがわかる.

注意 1.29. 1.5 節では主に考えていたグラフは $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ かそのいずれかまたは両方の連続版のグラフであったのに対して, 1.6 では木で与えられるグラフに対して考えていた. 当然他にも考えられるグラフはある. ここでは紹介しなかったがダイヤモンド格子上 [56, 3, 2, 31, 32] や完全グラフ上 [37] で定義された模型に対しても一部結果は得られている.

1.7 補遺

1.7.1 Kingman の劣加法エルゴード定理

定理 1.10. ([57, Chapter VI, 2, Theorem 2.6]) $\mathbb{R}$-値確率変数の族 $\{X_{m,n} : m \leqslant n\}$ が以下を満たすとする.

(i) $0 \leqslant m \leqslant n$ に対して $X_{0,0} = 0$, $X_{0,n} \leqslant X_{0,m} + X_{m,n}$.

(ii) 各 $k \geqslant 1$ に対して $\{X_{(n-1)k,nk} : n \geqslant 1\}$ は定常エルゴード的である.

(iii) 各 $m \geqslant 0$ に対して $\{X_{m,m+k} : k \geqslant 0\} \stackrel{d}{=} \{X_{m+1,m+k+1} : k \geqslant 0\}$.

(iv) $P\left[X_{0,1}^{+}\right] < \infty$.

ただし $\mathbb{R}$-値確率変数 X に対して $X^{+} = \max\{X, 0\}$ とする.

このとき

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_{0,n}}{n} = \inf_{n \geqslant 1} \frac{P[X_{0,n}]}{n} \in [-\infty, \infty), \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

1.8 問題

問題 1.1. $G = (V, E)$ 上のマルコフ連鎖 $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ は遷移確率 $p = \{p(x,y) : x, y \in V\}$ で定義されているとする. このとき V 上の関数 $h : V \to \mathbb{R}$ が $x \in V$ で**正則**であるとは

$$h(x) = P_x\left[h(X_1)\right] = \sum_{y \in V} p(x,y) h(y)$$

を満たすときをいう.

マルコフ連鎖 X が次を満たすとき, (1.10) を満たすことを示せ.

$$\text{任意の } x \in V \text{ で正則な有界な関数 } h : V \to \mathbb{R} \text{ は定数関数のみである.} \tag{1.28}$$

問題 1.2. 一般のマルコフ連鎖で (1.10) が成り立たないようなものを作れ.

問題 1.3. 自由エネルギー $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数であることを示せ. (これにより $\psi, F \in C(\mathbb{R})$ となり $F(\beta_c^{2,-}) = F(\beta_c^{2,+}) = 0$ がわかる.)

2　媒質の摂動の弱い相

この章では DPRE の摂動の弱い相での性質を述べていく.

まず定理 1.2 と例題 1.9 により媒質の摂動の弱い (WD) 相であることは,

$$\text{マルチンゲール } \{W_n(\beta,\eta) : n \geqslant 0\} \text{ が一様可積分である} \tag{2.1}$$

ことと同値であったことに注意しよう.

2.1　2 次モーメント

$d \geqslant 3$ のとき DPRE に対して媒質の摂動が弱い相が存在するための条件を確認しよう.

$$\begin{aligned}&\text{マルチンゲール } \{W_n : n \geqslant 0\} \text{ が一様二乗可積分}\\ &\Rightarrow \text{マルチンゲール } \{W_n : n \geqslant 0\} \text{ が一様可積分}\end{aligned}$$

であることとマルチンゲールの性質から

$$\sup_{n\geqslant 0} Q\left[W_n^2\right] < \infty \Rightarrow \text{(WD)}$$

がわかる.

まずは $Q\left[W_n(\beta)^2\right]$ を求めてみよう.

補題 2.1. ([23, Lemma 2])

任意の $\beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$Q\left[W_n(\beta)^2\right] = P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left((\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta))L_n(X,\hat{X})\right)\right]$$

が成り立つ. ただし $(\hat{X},\hat{P})$ を (X,P), $\{\eta(n,x) : n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d\}$ と独立な単純ランダムウォーク, $P_{X,\hat{X}} = P \otimes \hat{P}$ とし, $\mathbb{Z}^d$ 上の 2 つの経路 $\gamma = (x_i)_{i\geqslant 0}$, $\hat{\gamma} = (\hat{x}_i)_{i\geqslant 0}$ に対して $L_n(\gamma,\hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^n 1\{x_i = \hat{x}_i\}$ と定義する.

証明. 定義より 2 つの独立な単純ランダムウォーク $X, \hat{X}$ を用いて

$$W_n(\beta,\eta)^2 = P\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)\right]\hat{P}\left[\zeta_n(\beta,\eta,\hat{X})\right]$$

書くことができる. $\zeta_n(\beta,\eta,X)\zeta_n(\beta,\eta,\hat{X})$ は非負確率変数なので Fubini の定理より

$$\begin{aligned}Q\left[W_n(\beta,\eta)^2\right] &= Q\left[P\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)\right]\hat{P}\left[\zeta_n(\beta,\eta,\hat{X})\right]\right]\\ &= P_{X,\hat{X}}\left[Q\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)\zeta_n(\beta,\eta,\hat{X})\right]\right].\end{aligned}$$

固定されたランダムウォークの経路 $X, \hat{X}$ に対して

$$\begin{aligned}Q\left[\zeta_n(\beta,\eta,X)\zeta_n(\beta,\eta,\hat{X})\right] &= Q\left[\prod_{i=1}^n e_{i,X_i}(\beta,\eta)e_{i,\hat{X}_i}(\beta,\eta)\right]\\ &= \prod_{i=1}^n \left(Q[e_{i,X_i}(\beta,\eta)^2]1\{X_i = \hat{X}_i\} + 1\{X_i \neq \hat{X}_i\}\right)\\ &= \prod_{i=1}^n \exp\left(\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta))1\{X_i = \hat{X}_i\}\right)\end{aligned}$$

となるので示された. □

補題 2.1 より次のことがわかる.

定理 2.1. ([72, Lemma 1])
$d \geqslant 3$ かつ

$$\gamma_1(\beta) := \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < -\log \pi_d \tag{2.2}$$

であるとき (WD) である. ただし $\pi_d = P($ ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $X_n = 0)$ を単純ランダムウォークの再帰確率とする.

特に $\beta_*^-(d) < 0 < \beta_*^+(d)$ を方程式 $\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) = -\log \pi_d$ の解とすると

$$\beta_c^{1,-} \leqslant \beta_*^-(d) < 0 < \beta_*^+(d) \leqslant \beta_c^{1,+} \tag{2.3}$$

が成り立つ.

注意 2.1. 単純ランダムウォークの対称性から

$$\pi_d = P_{X,\hat{X}}(\text{ ある } n \geqslant 1 \text{ が存在して } X_n = \hat{X}_n)$$

であることに注意する.

例題 2.1. $\eta(n,x) \sim N(0,1)$ であるとき, $\lambda(\beta) = \dfrac{\beta^2}{2}$ より $\gamma_1(\beta) = \beta^2$ である. これより $|\beta| < \sqrt{\log \dfrac{1}{\pi_d}}$ のとき (WD) である.

問 2.1. $\eta(n,x)$ が $Q(\eta(n,x) = 1) = p = 1 - Q(\eta(n,x) = 0)$ とする. このとき, $\pi_d < p \leqslant 1$ ならば $\beta_*^+(d) = \infty$ であることを示せ. これより $\beta \geqslant 0$ では常に (WD) となるようなものが存在することがわかる.

証明. 定義から固定されたランダムウォークの経路 $X, \hat{X}$ に対して

$$\exp\left(\gamma_1(\beta) L_n(X,\hat{X})\right) \nearrow \exp\left(\gamma_1(\beta) L(X,\hat{X})\right) \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. ただし

$$L(X,\hat{X}) = \sum_{n \geqslant 1} 1\{X_n = \hat{X}_n\}.$$

よって補題 2.1 と単調収束定理より

$$\sup_{n \geqslant 0} Q\left[W_n(\beta)^2\right] = P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left(\gamma_1(\beta) L(X,\hat{X})\right)\right]$$

ここで $k \geqslant 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\tau_0(X,\hat{X}) = 0, \\ &\tau_k = \inf\{i > \tau_{k-1} : X_i = \hat{X}_i\}, \quad k \geqslant 1 \end{aligned}$$

と定義するとランダムウォークの Markov 性より

$$\begin{aligned} P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left(\gamma_1(\beta) L(X,\hat{X})\right)\right] &= P_{X,\hat{X}}(\tau_1(X,\hat{X}) = \infty) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left(\gamma_1 L(X,\hat{X})\right) : \tau_1(X,\hat{X}) = k\right] \\ &= (1 - \pi_d) + e^{\gamma_1(\beta)} \pi_d P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left(\gamma_1(\beta) L(X,\hat{X})\right)\right] \end{aligned}$$

となる. よって

$$P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left(\gamma_1(\beta) L(X,\hat{X})\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1-\pi_d}{1 - \pi_d e^{\gamma_1(\beta)}}, & \gamma_1(\beta) < -\log \pi_d \\ \infty, & \gamma_1(\beta) \geqslant -\log \pi_d \end{cases}.$$

となる. □

では (2.3) において等号は成り立つのだろうか. Garel, Monthus ら [62] はこの等号が成立すると予想したが Birkner ら [13, 20, 21, 22, 11] によってこの予想は否定された. (第 2.3 節)

2.2　中心極限定理

ひとまず (WD) の存在は言えたので, (WD) ではポリマーはどのような挙動をするのか調べていこう. (WD) ではランダム媒質の影響は非常に小さく, μ_n は元の確率測度 P から "大きくずれる" ことはないと思われる. このことを正当化していこう.

命題 2.1. ([43, Proposition 4.1]) $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォーク $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ に対して, $\mathscr{F}_n = \sigma[X_0, \cdots, X_n]$, $\mathscr{F}_\infty = \sigma\left[\bigcup_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n\right]$ と定義する. $\beta \in \mathbb{R}$ で (WD) であるとき $A \in \mathscr{F}_\infty$ に対して

$$\mu_\infty^\beta(A) := \lim_{m\to\infty}\mu_m^\beta(A), \quad Q\text{-a.s.} \tag{2.4}$$

が存在する. また $\mathscr{F}_\infty$ 上の確率測度 $Q\mu^\beta$ で

$$Q\mu^\beta(A) = Q\mu_\infty^\beta(A), \quad A \in \bigcup_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n$$

を満たすものが一意に存在する. このとき

$$Q\mu^\beta(A) = \lim_{n\to\infty} Q\mu_n^\beta(A), \quad A \in \mathscr{F}_\infty$$
$$P \ll Q\mu^\beta \ll P$$

が成り立つ.

証明. 定義より $A \in \mathscr{F}_\infty$ を固定したとき

$$\mu_m^\beta(A) = \frac{P[\zeta_m(\beta,\eta,X) : A]}{W_m(\beta,\eta)}$$

である. ただし ζ は (1.9)) で定義したものとする. このとき容易に $\{P[\zeta_m(\beta,\eta,X) : A] : m \in \mathbb{N}_0\}$ が非負マルチンゲールであり極限 $W_\infty^\beta(\eta, A)$ が存在することがわかる. また (WD) であることから $W_m(\beta,\eta)$, $P[\zeta_m(\beta,\eta,X) : A]$ は共に一様可積分であることも従う.

よって $Q\mu_\infty^\beta$ は $\bigcup_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n$ 上の有限加法的測度で $Q\mu_\infty^\beta(\Omega) = 1$ となることがわかり, Hopf の拡張定理から $\mathscr{F}_\infty$ 上の確率測度 $Q\mu^\beta$ で $Q\mu_\infty^\beta$ の拡張となるものが一意に存在する.

また (2.4) の収束は $L^1(Q)$-収束でもあることは容易に分かる.

今, $A \in \mathscr{F}_\infty$ が $P(A) = 0$ ならば $Q\mu^\beta(A) = 0$ となるので $Q\mu^\beta \ll P$ が従う. 一方 $A \in \mathscr{F}_\infty$ に対して $Q\mu^\beta(A) = 0$ とすると Q-a.s. で $\lim_{n\to\infty}\mu_n^\beta(A) = 0$ となる. これにより Q-a.s. で $W_n(\beta,\eta)\mu_n^\beta(A) \to 0$ となり $W_n^\beta(\eta)$ の一様可積分性から $W_n(\beta,\eta)\mu_n^\beta(A)$ は 0 に $L^1(Q)$-収束する. すなわち

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} Q\left[W_n(\beta,\eta)\mu_n^\beta(A)\right] = 0$$

となり $P \ll Q\mu^\beta$ が従う. □

これにより, 例えば次のようなことがわかる.

$$Q\mu^\beta\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1, \quad (\text{重複大数の法則})$$

これより (WD) ではランダムウォークで成り立ったことが, μ_n に対して成り立つと期待してもよさそうである. ここでは次のような中心極限定理が成り立つことを確かめる.

定理 2.2. ([23, 6, 39] et.al.) $d \geqslant 3$ かつ (2.2) を仮定する. このとき任意の $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\mu_n^\beta \left[f\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right) \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx, \quad Q\text{-a.s.} \tag{2.5}$$

が成り立つ.

注意 2.2. $f \in C_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d)$ に対しても (2.5) が成り立つ. ただし $C_b(S)$ は S 上の有界連続関数全体, $C_{\mathrm{pol}}(S)$ は S 上の高々多項式増大の連続関数全体を表す.

注意 2.3. (2.2) を仮定しているので (WD) 全体に対して (2.5) が成り立つかどうかは言えていない. しかし Comets, Yoshida[43] により (WD) であれば (2.5) が Q-a.s. を Q-確率収束に置き換えて成立することが示されている.

証明のアイデアは

(1) (WD) であるので $W_n(\beta, \eta)$ をかけたものに対して収束をいえば十分,

(2) 一般の $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ ではなく, $x = (x_1, \cdots, x_d)$ に関する多項式に対する収束,

(3) 多項式の中でもランダムウォーク X に対してマルチンゲール性を持つようなものに対する収束,

といったものである. ただし $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $n = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$ に対して

$$x^n = \prod_{i=1}^d x_i^{n_i}, \quad |n| = \sum_{i=1}^d n_i$$

とし, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d, |n| \leqslant m} a_n x^n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ と表される関数を m 次以下の多項式と呼ぶ.

証明. $a \in \mathbb{N}_0^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\varphi_a(n,x) = \left.\frac{\partial^{a_1}}{\partial \theta_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_d}}{\partial \theta_d^{a_d}} \exp\left(\theta \cdot x - n\rho(\theta)\right)\right|_{\theta=0}$$

と定義する. ただし $\exp(\rho(\theta)) = P_X\left[\exp(\theta \cdot X_1)\right]$ とする.
このとき容易に次のことがわかる.

(P1) $\varphi_a(n,x)$ は $|a|$ 次以下の多項式で $C_1, C_2, C_3 > 0$ で

$$|\varphi_a(n,x)| \leqslant C_1 + C_2|x|^{|a|} + n^{|a|/2}$$

が成り立つ.

(P2) $\{\varphi_a(n, X_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ は $\mathscr{F}_n$-マルチンゲールである.

(P2) より Fubini の定理から

$$Y_a(n) = P_X\left[\varphi_a(n, X_n)\zeta_n(\beta, \eta, X)\right]$$

は $\mathscr{G}_n$-マルチンゲールであることがわかる.
このマルチンゲールに対して次のことが成り立つ (問 2.3).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_a(n)}{n^{|a|/2}} = 0, \quad Q\text{-a.s.} \tag{2.6}$$

ここで, $a \in \mathbb{N}_0^d, x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\psi_a(n,x) = \frac{\partial^{a_1}}{\partial \theta_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_d}}{\partial \theta_d^{a_d}} \exp\left(\theta \cdot x - n\frac{|\theta|^2}{2d}\right)\Bigg|_{\theta=0}$$

とおき, $\varphi_a(n,x)$ と $\psi_a(n,x)$ を比較すると, ある $A_a(b,j) \in \mathbb{R}$ $(b \in \mathbb{N}_0^d,\ j \in \mathbb{N}_0)$ で

$$\begin{aligned}\varphi_a(n,x) &= x^a + \sum_{\substack{|b|+2j \leqslant |a|,\\ j \geqslant 1}} A_a(b,j) x^b n^j \\ \psi_a(n,x) &= x^a + \sum_{\substack{|b|+2j = |a|,\\ j \geqslant 1}} A_a(b,j) x^b n^j\end{aligned} \tag{2.7}$$

と書けるものが存在することがわかる. また ψ_a の定義から

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_a\left(1, \frac{x}{\sqrt{d}}\right) \exp\left(-\frac{|x|^2}{2d}\right) dx = 0 \tag{2.8}$$

であることがわかる.

よって (2.6), (2.7), (2.8) より帰納的に任意の $a \in \mathbb{N}_0^d$ に対して

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^a W_{n,x}(\beta,\eta) \to W_\infty(\beta,\eta) \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right)^a \exp\left(-\frac{|x|^2}{2d}\right) dx, \quad Q\text{-a.s.} \tag{2.9}$$

が成り立つことが示される. 正規分布のモーメント問題は解けることから定理が示された. □

問 2.2. (P1), (P2) を確かめよ.

問 2.3. ([39, Lemma 3.2.2]) (2.6) を以下の要領で示せ.

(1) $Q\left[(Y_a(n) - Y_a(n-1))^2\right] = P_{X,\hat{X}}\left[\varphi_a(n,X_n)^2 \exp\left(\gamma_1(\beta) L_n(X,\hat{X})\right) : X_n = \hat{X}_n\right]$ が成り立つことを示せ. ただし $(\hat{X}, P_{\hat{X}})$, $P_{X,\hat{X}}$, $L_n(X,\hat{X})$ は補題 2.1 で与えられたものとする.

(2) (難) (1) と (P1) より

$$Q\left[(Y_a(n) - Y_a(n-1))^2\right] \leqslant P_{X,\hat{X}}\left[\left(C_1 + C_2|X_n|^{|a|} + C_3 n^{|a|/2}\right) \exp\left(\gamma_1(\beta) L_n(X,\hat{X})\right) : X_n = \hat{X}_n\ \right]$$

となる. ここで

$$Q\left[(Y_a(n) - Y_a(n-1))^2\right] \leqslant C_a n^{|a| - \frac{d}{2}}$$

であることを示せ. (ヒント: $\exp\left(\gamma_1(\beta) L_n(X,\hat{X})\right) = \sum_{k=1}^{n} (\exp(\gamma_1(\beta)) - 1)^k \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant n} \prod_{i=1}^{k} 1\{X_{j_i} = \hat{X}_{j_i}\}$ を用いる.)

(3) (2) から $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{|a|}} Q\left[(Y_a(n) - Y_a(n-1))^2\right] < \infty$ となる. $\mathscr{G}_n$-マルチンゲール $Z_a(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_a(n) - Y_a(n-1)}{n^{|a|/2}}$ が Q-a.s. で収束することを示せ. (Kronecker の補題より $\lim_{n \to \infty} \frac{Y_a(n)}{n^{|a|/2}} = 0$, Q-a.s. が従う.)

問 2.4. (2.7) を証明せよ.

問 2.5. (2.8) を証明せよ.

問 2.6. (2.9) の証明を与えよ. ($a = (0, \cdots, 0)$ の場合から始め, $|a|$ に関する帰納法を用いる.)

中心極限定理が示されると普遍原理が成立するのかが問題になるが, これは [6] で示されている. このノートでは扱わないことにする.

2.3 Size-biased directed polymers in random environment

ここでは (WD) となるための必要十分条件を size-biased DPRE(SBDPRE) と呼ばれるものを用いて記述してみることにする.

注意 1.9 より

$$(\mathrm{WD}) \Leftrightarrow \{W_n(\beta,\eta) : n \geqslant 1\} \text{ が一様可積分}$$

であることがわかる. さらに次の命題を考える.

命題 2.2. $T = \mathbb{N}$ または $(0,\infty)$ とする. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上で定義された $[0,\infty)$-値の確率変数の族 $\{X_t : t \in T\}$ は $P[X_t] = \theta > 0$ を満たすとする.

このとき以下が成り立つ.

$$\{X_t : t \in T\} \text{ が一様可積分} \Leftrightarrow \{\hat{X}_t : t \in T\} \text{ が緊密, すなわち } \lim_{K\to\infty} \sup_{t\in T} \hat{P}_t(\hat{X}_t > K) = 0 \tag{2.10}$$

および

$$X_t \xrightarrow{P} 0 \quad (t \to \infty) \Leftrightarrow \hat{X}_t \xrightarrow{P} \infty \quad (t \to \infty) \tag{2.11}$$

ただし, ここで $\hat{X}_t$ は

$$\hat{P}_t(\hat{X}_t \in A) = \frac{1}{\theta} P[X_t : X_t \in A], \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

という分布に従う確率変数とする.

証明. (2.10): 定義から任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(X_t : X_t > K) = \theta \hat{P}_t(\hat{X}_t > K)$$

であるのでわかる.

(2.11) の $\Rightarrow$: $X_t \xrightarrow{P} 0$ $(t \to \infty)$ と仮定する. このとき任意の $0 < \varepsilon < K$ に対して

$$\hat{P}_t(\hat{X}_t \leqslant K) = \frac{1}{\theta} P[X_t : X_t \leqslant K] = \frac{1}{\theta} \int_0^K x P(X_t \in dx) \leqslant \frac{\varepsilon}{\theta} P(X_t \in [0,\varepsilon)) + \frac{K}{\theta} P(X_t \in (\varepsilon, K])$$

となる. よって

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \hat{P}_t(\hat{X}_t \leqslant K) \leqslant \frac{\varepsilon}{\theta}$$

となる. さらに $\varepsilon \to 0$ とすることで示された.

(2.11) の $\Leftarrow$: $\hat{X}_t \xrightarrow{P} \infty (t \to \infty)$ と仮定する. $\delta > 0, \varepsilon > 0$ は $\varepsilon\delta < \theta$ を満たすとする. このとき

$$P(X_t \geqslant \delta) = P\left(X_t \in \left[\delta, \frac{\theta}{\varepsilon}\right]\right) + P\left(X_t \geqslant \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \leqslant P\left(X_t \in \left[\delta, \frac{\theta}{\varepsilon}\right]\right) + \varepsilon$$

となる. さらに $\hat{P}_t\left(\hat{X}_t \in \left[\delta, \frac{\theta}{\varepsilon}\right]\right) = \frac{1}{\theta} P\left[X_t : X_t \in \left[\delta, \frac{\theta}{\varepsilon}\right]\right] \geqslant \frac{\delta}{\theta} P\left(X_t \in \left[\delta, \frac{\theta}{\varepsilon}\right]\right)$ に注意すると

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, P(X_t \geqslant \delta) \leqslant \varepsilon$$

となり $\varepsilon > 0$ は任意に小さく取れるので示された. □

さて, では DPRE の正規化分配関数 $W_n(\beta,\eta)$ に対して命題 2.2 で現れたような size-biased な確率変数列はどのようなものであろうか.

定理 2.3. ([19, Lemma 1]) $\beta\in\mathbb{R}$ に対して確率空間 $(\bar{\Omega},\mathscr{G},Q)$ 上に $\{e_{i,x}(\beta,\eta):(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d\}$ と独立な確率変数の族

$$\{\hat{e}_{n,x}:(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d\}$$

を次のようにとる.

(1) $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ に関して独立同分布である.

(2) $Q(\hat{e}_{n,x}(\beta,\eta)\in dr)=Q\left[e_{n,x}(\beta,\eta):e_{n,x}(\beta,\eta)\in dr\right]$

さらに $(\hat{X},P_{\hat{X}})$ を原点出発の単純ランダムウォークで $X,e,\hat{e}$ と独立なものとし,

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_n(\beta,\eta,\hat{e},X,\hat{X})&=\prod_{i=1}^n\left(\hat{e}_{i,\hat{X}_i}(\beta,\eta)1\{X_i=\hat{X}_i\}+e_{i,X_i}1\{X_i\neq\hat{X}_i\}\right)\\ \hat{W}_n(\beta,\eta,\hat{e},\hat{X})&=P_X\left[\tilde{\zeta}_n(\beta,\eta,\hat{e},X,\hat{X})\right]\end{aligned}$$

このとき任意の有界ボレル可測関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して

$$Q\left[W_n(\beta,\eta)f(W_n(\beta,\eta))\right]=P_{\hat{X}}Q\left[\left[f\left(\hat{W}_n(\beta,\eta,\hat{e},\hat{X})\right)\right]\right]$$

が成り立つ.

注意 2.4. $\hat{e}$ として良い性質を持つものを構成することができる. (問題 2.1)

命題 2.2 と合わせることにより $\hat{W}_n$ の緊密性が与えられれば (WD) であることがわかる. これにより

$$Q\left[\hat{W}_n(\beta,\eta,\hat{e},\hat{X})\right]=P_X\left[\exp\left(\gamma_1 L_n(X,\hat{X})\right)\right]<\infty,\quad P_{\hat{X}}\text{-a.s.}$$

が成り立てば (WD) であるということになる. Birkner はこのことに注目し (WD) となるための十分条件を考察し, (2.3) の等式が成立しないことを示した. 特に右辺はランダムウォークの経路を界面とするピニング模型の分配関数とみなすことができ様々な研究がなされている [13, 20, 21, 22, 11].

2.4 問題

問題 2.1. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上で定義された確率変数 U は $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする. また $\mathbb{R}$-値の確率変数 η は任意の $\beta\in\mathbb{R}$ に対して $\lambda(\beta):=P[e^{\beta\eta}]\in\mathbb{R}$ が成り立つものとし, その分布関数を F とする. すなわち

$$F(x)=P(\eta\leqslant x),\quad x\in\mathbb{R}$$

とする. 以下の問に答えよ.

(i) $F^{-1}(u)=\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)\geqslant u\}$ とする. このとき $F^{-1}(U)\stackrel{d}{=}\eta$ を示せ.

(ii) $\beta\in[0,\infty)$ に対して $F_\beta(x)=P[\exp(\beta\eta-\lambda(\beta)):\eta\leqslant x]$ $(x\in\mathbb{R})$ とする. このとき $0\leqslant\beta\leqslant\gamma$ ならば $F_\beta(x)\leqslant F_\gamma(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ. (Hint: FKG 不等式を使う.)

(iii) 確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の確率変数の族 $\{\eta^\beta:\beta\in[0,\infty)\}$ で以下を全ての条件を満たすものが存在することを示せ.

(a) 任意の $\beta \geqslant 0$ に対して $P(\eta^{\beta} \leqslant x) = F_{\beta}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(b) $P(\gamma \geqslant \beta \geqslant 0$ ならば$\eta^{\gamma} \geqslant \eta^{\beta}) = 1$.

注意 2.5. 問題 2.1 を用いると

$$\hat{W}_n(\beta, \eta, \hat{e}, \hat{X}) \stackrel{d}{=} P_X\left[\zeta_n(\beta, \eta^{\beta}_{\hat{X}}, X)\right]$$

が成り立つことがわかる. ただし

$$\eta^{\beta}_{\hat{X}} = \eta(i,x) + (\eta^{\beta}(i,x) - \eta(i,x))1\{\hat{X}_i = x\}.$$

3　媒質の摂動の強い相

この章では媒質の摂動の強い相 (SD) での性質を見ていく.

3.1　局在化

媒質の摂動が強いときには μ_n^β の下での高分子の形状として現れるものは単純ランダムウォークとは性質が大きく異なることが知られている.

$\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークの場合にはランダムウォークの対称性と局所極限定理から, ある定数 $C = C_d > 0$ が存在して任意の $n \geqslant 1$ に対して

$$P_{X,\hat{X}}(X_n = \hat{X}_n) = P(X_{2n} = 0) \leqslant \frac{C}{n^{d/2}}$$

が成り立つことが知られている. つまり独立な 2 つのランダムウォークが時刻 n で出会う確率は $n^{-d/2}$ の速さで減衰するのである. しかし (SD) の下ではこのようなことが起きない. 実際次のことが知られている.

定理 3.1. ([28, 38, 75]) $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \geqslant 0$ に対して

$$\mathscr{R}_n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n^\beta (X_n = x)^2 \tag{3.1}$$

と定義する. このとき

$$\{W_\infty(\beta,\eta) > 0\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n < \infty \right\}, \quad Q\text{-a.s.} \tag{3.2}$$

が成り立つ. 特に, ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$\{W_\infty(\beta,\eta) = 0\} \overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \left\{ \text{十分大きい } n \geqslant 1 \text{ に対して } -c_1 \log W_n(\beta,\eta) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{R}_k \leqslant -c_2 \log W_n(\beta,\eta) \right\} \tag{3.3}$$

が成り立つ.

注意 3.1. (SD) であるときある定数 $C > 0$ が存在して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n^\beta (X_n = x) > C, \quad Q\text{-a.s.} \tag{3.4}$$

が成り立つことも知られている [75, Theorem 1.4.2].

注意 3.2. $\mathscr{R}_n$ はスピングラスの用語に倣って**レプリカオーバーラップ**と呼ばれている. これは μ_n^β に従う独立な経路 $X, \hat{X}$ を考えたときに

$$\mathscr{R}_n = \left(\mu_n^\beta\right)^{\otimes 2} (X_n = \hat{X}_n)$$

となり, X と $\hat{X}$ が時刻 n でぶつかる確率を表している. (3.4) から (SD) であるときは空間内に高い確率で高分子 (X_n) が集まるような点がある (**局在化**) ということを言っている.

μ_n^β は $\mathbb{Z}^d$ 上の確率測度であるので

$$\max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n^\beta (X_n = x)^2 \leqslant \mathscr{R}_n \leqslant \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n^\beta (X_n = x)$$

が成り立つ.
　証明には主に

$$\tilde{\mathscr{R}}_{n-1} = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}^{\beta}(X_n = x)^2$$

が現れるが

$$\mu_{n-1}^{\beta}(X_n = x) = \sum_{y:|y-x|=1} \frac{1}{2d}\mu_{n-1}^{\beta}(X_{n-1} = y)$$

であるので

$$\frac{1}{2d}\mathscr{R}_{n-1} \leqslant \tilde{\mathscr{R}}_{n-1} \leqslant \mathscr{R}_{n-1}$$

となり結論は変わらない.

注意 3.3. (3.3) と正規化自由エネルギーの定義を見比べると

$$F(\beta) < 0 \Leftrightarrow \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathscr{R}_k > \exists c > 0, \quad Q\text{-a.s.}$$

がわかる.

注意 3.4. 時空間 Parabolic Anderson 模型に対してはより強い経路のレプリカオーバーラップ

$$\int_0^T \left(\mu_T^{\kappa,\beta}\right)^{\otimes 2}(X_t = \hat{X}_t)dt$$

に関する結果が得られている [36]. ポアソン媒質中のディレクティドブラウン運動に対しても経路に対するレプリカオーバーラップに関する結果が得られている [44].

　この節では数列 $\{a_n : n \geqslant 0\}$ に対して

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

と定義する.
　$W_n(\beta,\eta)$ は $\mathscr{G}_n$-マルチンゲールなので $\mathscr{X}_n(\beta,\eta) := -\log W_n(\beta,\eta)$ は $\mathscr{G}_n$-劣マルチンゲールである. Doob 分解 [48, Theorem 5.2.10] によって

$$\mathscr{X}_n = \mathscr{M}_n + \mathscr{A}_n, \quad \mathscr{M}_0 = 0, \mathscr{A}_0 = 0$$

となる $\mathscr{G}_n$-マルチンゲール $\mathscr{M}_n$ と $\mathscr{G}_n$-可予測で単調非減少な $\mathscr{A}_n$ が取れる. すなわち

$$\mathscr{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\mathscr{M}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathscr{X}_k - Q\left[\mathscr{X}_k|\mathscr{G}_{k-1}\right]\right)$$

$$\mathscr{A}_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\mathscr{A}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(Q\left[\mathscr{X}_k|\mathscr{G}_{k-1}\right] - \mathscr{X}_{k-1}\right)$$

ただし $\log W_0 = 0$ を用いた. ここで $\mathscr{G}_n$-劣マルチンゲール $\mathscr{M}_n^2$ に対して Doob 分解を行うことで

$$\mathscr{M}_n^2 = \mathscr{Y}_n + \langle\mathscr{M}\rangle_n$$

とできる. ただし $\mathscr{Y}_n$ は $\mathscr{G}_n$-マルチンゲール部分で $\langle\mathscr{M}\rangle_n$ は $\mathscr{M}_n^2 - \mathscr{Y}_n, \langle\mathscr{M}\rangle_0 = 0$ で定義される $\mathscr{G}_n$-可予測な単調非減少列であり

$$\Delta\langle\mathscr{M}\rangle_n = Q\left[(\Delta\mathscr{M}_n)^2 |\mathscr{G}_{n-1}\right]$$

で表される [48, 5.4.1 節].

このとき, ある $c>0$ が存在して

$$\Delta\langle\mathscr{M}\rangle_n \leqslant c\mathscr{R}_{n-1} \tag{3.5}$$

$$\mathscr{R}_{n-1} \asymp \Delta\mathscr{A}_n \tag{3.6}$$

が成り立つ. これらを一旦認めて (3.2), (3.3) の証明を与える.

(3.2), (3.3) の証明. 次を示す.

(1) $\{W_\infty = 0\} \overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \{\mathscr{A}_\infty = \infty\} \overset{Q\text{-a.s.}}{=} \{\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{R}_n = \infty\}$.

(2) $\{\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{R}_n = \infty\} \overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \{$ 十分大きい $n \geqslant 1$ に対して $c_1\mathscr{X}_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\mathscr{R}_k \leqslant c_2\mathscr{X}_n\}$

二乗可積分マルチンゲールに対する性質 [48, Theorem 5.4.9, Theorem 5.4.10] から

$$\{\langle\mathscr{M}\rangle_\infty < \infty\} \overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \left\{\lim_{n\to\infty}\mathscr{M}_n\text{が存在}\right\}$$

$$\{\langle\mathscr{M}\rangle_\infty = \infty\} \overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\mathscr{M}_n}{\langle\mathscr{M}\rangle_n} = 0\right\}$$

がわかる. (3.5), (3.6) と合わせると

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{R}_n < \infty\right\} &= \{\mathscr{A}_\infty < \infty\} \\ &= \{\mathscr{A}_\infty < \infty, \langle\mathscr{M}\rangle_\infty < \infty\} \\ &\overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \left\{\mathscr{A}_\infty < \infty, \lim_{n\to\infty}\mathscr{M}_n\text{が存在}\right\} \subset \{W_\infty > 0\}\end{aligned}$$

となる.

また $\{\mathscr{A}_\infty = \infty\} \overset{Q\text{-a.s.}}{=} \{\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{R}_n = \infty\}$ であることと (3.6) より

$$\frac{\mathscr{X}_n}{\sum_{k=0}^{n-1}\mathscr{R}_k} \asymp \frac{\mathscr{X}_n}{\mathscr{A}_n} = \frac{\mathscr{M}_n}{\mathscr{A}_n} + 1 \tag{3.7}$$

となる. (2) は

$$\{\mathscr{A}_\infty = \infty\} \overset{Q\text{-a.s.}}{\subset} \left\{\frac{\mathscr{M}_n}{\mathscr{A}_n} \to 0\right\} \tag{3.8}$$

を示せばよい. $\mathscr{A}_\infty = \infty$ を仮定する. もし $\langle\mathscr{M}\rangle_\infty < \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}\mathscr{M}_n$ が存在するので (3.7) から $\frac{\mathscr{M}_n}{\mathscr{A}_n} \to 0$ となる. また $\langle\mathscr{M}\rangle_\infty = \infty$ のとき

$$\frac{\mathscr{M}_n}{\mathscr{A}_n} = \frac{\mathscr{M}_n}{\langle\mathscr{M}\rangle_n}\frac{\langle\mathscr{M}\rangle_n}{\mathscr{A}_n}$$

となるが (3.5), (3.6) と合わせるとこれは 0 に収束することがわかるので (3.8) が示せた. □

3.1.1 (3.5), (3.6) の証明

まずは以下のことに注意する.

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{A}_n &= Q\left[\mathscr{X}_k|\mathscr{G}_{k-1}\right] - \mathscr{X}_{k-1} = Q\left[-\log\frac{W_n}{W_{n-1}}\middle|\mathscr{G}_{n-1}\right] \\ &= Q\left[-\log\left(1+\mu_{n-1}^{\beta}\left[e_{n,X_n}-1\right]\right)\middle|\mathscr{G}_{n-1}\right] \\ \Delta\mathscr{M}_n &= -\log\left(1+\mu_{n-1}^{\beta}\left[e_{n,X_n}-1\right]\right) + Q\left[\log\left(1+\mu_{n-1}^{\beta}\left[e_{n,X_n}-1\right]\right)\middle|\mathscr{G}_{n-1}\right]\end{aligned}$$

であることに注意する. 特に

$$\Delta\langle\mathscr{M}\rangle = Q\left[\left(\log\left(1+\mu_{n-1}^{\beta}\left[e_{n,X_n}-1\right]\right)\right)^2\middle|\mathscr{G}_{n-1}\right]$$

まずは次の一般の確率変数に関する補題を示す.

補題 3.1. ([38, Lemma 2.1]) $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上定義された定数でない非負値独立同分布な確率変数列 $\{e_i : 1\leqslant i\leqslant m\}$ は

$$Q[e_1]=1, Q[e_1^3+\log^2 e_1]<\infty,$$

を満たすとする. $I=\{1,\cdots,m\}$ 上の確率測度 $\alpha=\{\alpha_i : 1\leqslant i\leqslant m\}$ に対して $U=\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i - 1$ と定義したとき, ある定数 $c\in(0,\infty)$ が存在して

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leqslant P\left[\frac{U^2}{2+U}\right] \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leqslant -P\left[\log(1+U)\right] \leqslant c\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \tag{3.10}$$

$$P\left[\log^2(1+U)\right] \leqslant \frac{1}{c}\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \tag{3.11}$$

これが示されると (3.5), (3.6) は $\alpha_\cdot=\mu_{n-1}^{\beta}(X_n=\cdot)$, $e_\cdot=\exp(\beta\eta(n,\cdot)-\lambda(\beta))$ とすることで従う.

注意 3.5. e_i が定数の場合は $U=0$ となるので当然成り立たない.

証明. 容易に

$$P[U^2]=Q[e_1^2]\sum_{i=1}^m \alpha_i^2, \quad P[U^3]\leqslant c_1\sum_{i=1}^m \alpha_i^2$$

が成り立つことがわかる.

(3.9) は

$$P[U^2]=P\left[\frac{U}{\sqrt{U+2}}U\sqrt{2+U}\right]\leqslant P\left[\frac{U^2}{2+U}\right]^{1/2}P[U^2+U^3]^{1/2}\leqslant CP\left[\frac{U^2}{2+U}\right]^{1/2}\sum_{i=1}^m \alpha_i^2$$

から従う.

$\phi:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ を $\phi(x)=x-\log(1+x)$ とすると $\phi(x)\geqslant\frac{x^2}{4(2+x)}$ $(x>-1)$ を満たし, 特に $-P[\log(1+U)]=P[\phi(U)]$ なので (3.10) の左側が上からわかる.

$\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}P[\phi(U)] &= P[\phi(U):1+U\geqslant\varepsilon]+P[\phi(U):1+U<\varepsilon]\\ &\leqslant P[\phi(U):1+U\geqslant\varepsilon]-P[\log(1+U):1+U<\varepsilon]\end{aligned}$$

が成り立ち, $1+x\geqslant\varepsilon$ のとき $\phi(x)\leqslant\frac{x^2}{x\varepsilon^2}$ が成り立つので

$$P[\phi(U):1+U\geqslant\varepsilon]\leqslant\frac{1}{2\varepsilon^2}P[U^2]\leqslant c_2\sum_{i=1}^m \alpha_i^2$$

となる. また $\gamma:=-P[\log e_1]\geqslant 0$ に対して $\varepsilon>0$ を $\log(1/\varepsilon)-\gamma\geqslant 1$ となるようにする. $V=\sum_{i=1}^m \alpha_i(\log e_i+\gamma)$ とすると

$$\{1+U\leqslant\varepsilon\}=\{V-\varepsilon\leqslant\log(1+U)\leqslant\log\varepsilon\}\subset\{-\log(1+U)\leqslant -V+\gamma\}\cap\{1\leqslant -V\}$$

が Jensen の不等式からわかるので

$$-P[\log(1+U):1+U<\varepsilon]\leqslant P[-V:1\leqslant -V]+\gamma P(1\leqslant -V)\leqslant (1+\gamma)P[V^2]\leqslant c_2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2$$

となるので (3.10) の右側の不等式が示された.

(3.11) も同様に示される.(問題 3.1)

□

3.2　臨界点 $\beta_c^{1,\pm}$, $\beta_c^{2,\pm}$

この節では定理 1.3 の (1) の証明と定理 1.6(1) の $d=1$ の証明, (VSD) となるための十分条件を与える. 第 5 章で定理 1.6 の (1) のより強い結果の証明を与えるので定理 1.3(1) の証明は飛ばしてもよい.

(1.12) から次のことがわかる.

補題 3.2. ある定数 $c\in(0,\infty)$, $\theta\in(0,1)$, と非負単調増加数列 $\{a_n:n\geqslant 0\}$ で $a_n\to\infty$ となるものが存在して

$$Q\left[W_n^\theta\right]\leqslant c\exp(-a_n)$$

となれば $Q(W_\infty>0)=0$.

これを用いて次のことがわかる.

定理 3.2. $d\geqslant 1$ に対して

$$\beta\lambda'(\beta)-\lambda(\beta)>\log(2d)$$

ならば $F(\beta)<0$ が成り立つ.

証明. マルコフ性から

$$W_n(\beta,\eta)=\sum_{x:|x|=1}\frac{\exp(\beta\eta(1,x)-\lambda(\beta))}{2d}\theta_{1,x}\circ W_{n-1}(\beta,\eta)$$

が成り立つ. シフト $\theta_{n,x}$ の定義は (1.4) 参照.

$x\geqslant 0, y\geqslant 0$ のとき $\theta\in(0,1)$ に対して $(x+y)^\theta\leqslant x^\theta+y^\theta$ が成立するので

$$W_n(\beta,\eta)^\theta\leqslant\sum_{x:|x|=1}\left(\frac{\exp(\beta\eta(1,x)-\lambda(\beta))}{2d}\right)^\theta\theta_{1,x}\circ W_{n-1}(\beta,\eta)^\theta$$

となり

$$\begin{aligned}Q\left[W_n(\beta,\eta)^\theta\right]&\leqslant\sum_{x:|x|=1}Q\left[\left(\frac{\exp(\beta\eta(1,x)-\lambda(\beta))}{2d}\right)^\theta\right]Q\left[W_{n-1}(\beta,\eta)^\theta\right]\\&=(2d)^{1-\theta}\exp(\lambda(\theta\beta)-\theta\lambda(\beta))Q\left[W_{n-1}(\beta,\eta)^\theta\right]\end{aligned}$$

$r(\theta)=\log\left((2d)^{1-\theta}\exp(\lambda(\theta\beta)-\theta\lambda(\beta))\right)$ は 2 階連続微分可能であり $r''(\theta)>0$ となる. さらに $r(1)=0<r(0)=\log(2d)$ であるので $\theta\in(0,1)$ で $r(\theta)<0$ となるのは

$$0<\left.\frac{d}{d\theta}r(\theta)\right|_{\theta=1}=-\log(2d)+\beta\lambda'(\beta)-\lambda(\beta)$$

のときである.

□

3.2.1 $d = 1,2$

この節では補題 3.2 が

$$a_n = \begin{cases} c_1 n^{1/3}, & d = 1 \\ c_2\sqrt{\log n}, & d = 2 \end{cases}$$

として成立することを示す.
次の補題を用意する.

補題 3.3. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ を有限集合とする. $\theta \in (0,1)$ に対して

$$Q\left[W_n^\theta \mathscr{R}_n\right] \geqslant \frac{1}{|\Lambda|} Q\left[W_n^\theta\right] - \frac{2}{|\Lambda|} P\left(X_n \notin \Lambda\right)^\theta$$

が成り立つ. ただし $|\Lambda|$ は Λ の要素の数とする.

証明.

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_n &\geqslant \sum_{z\in\Lambda} \mu_n^\beta (X_n = z)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{|\Lambda|} \mu_n^\beta (X_n \in \Lambda)^2 = \frac{1}{|\Lambda|}\left(1 - \mu_n^\beta (X_n \notin \Lambda)\right)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{|\Lambda|}\left(1 - 2\mu_n^\beta (X_n \notin \Lambda)\right) \\
&\geqslant \frac{1}{|\Lambda|}\left(1 - 2\mu_n^\beta (X_n \notin \Lambda)^\theta\right)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
Q\left[W_n^\theta \mathscr{R}_n\right] &\geqslant \frac{1}{|\Lambda|} Q\left[W_n^\theta\right] - \frac{2}{|\Lambda|} Q\left[W_n^\theta \mu_n^\beta (X_n \notin \Lambda)^\theta\right] \\
&\geqslant \frac{1}{|\Lambda|} Q\left[W_n^\theta\right] - \frac{2}{|\Lambda|} Q\left[W_n \mu_n^\beta (X_n \notin \Lambda)\right]^\theta \\
&\geqslant \frac{1}{|\Lambda|} Q\left[W_n^\theta\right] - \frac{2}{|\Lambda|} P(X_n \notin \Lambda)^\theta.
\end{aligned}$$

□

定理 *1.3(1)* の証明 *[39].* $\theta \in (0,1)$ とする. $f : (-1,\infty) \to [0,\infty)$ を

$$f(x) = 1 + \theta x + (1+x)^\theta$$

とする. このときある $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$\frac{Cx^2}{2+\theta} \leqslant f(x), \quad x \in (-1,\infty)$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}
Q\left[W_n^\theta - W_{n-1}^\theta | \mathscr{G}_{n-1}\right] &= W_{n-1}^\theta Q\left[(1 + \mu_{n-1}^\beta [e_{n,X_n} - 1])^\theta - 1 | \mathscr{G}_{n-1}\right] \\
&= -W_{n-1}^\theta Q\left[f(\mu_{n-1}^\beta [e_{n,X_n} - 1]) | \mathscr{G}_{n-1}\right] \\
&\leqslant -W_{n-1}^\theta Q\left[\frac{C\mu_{n-1}^\beta [e_{n,X_n} - 1]^2}{2 + \mu_{n-1}^\beta [e_{n,X_n} - 1]} | \mathscr{G}_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

(3.9) と注意 3.2 を用いると

$$Q\left[W_n^\theta - W_{n-1}^\theta | \mathscr{G}_{n-1}\right] \leqslant -C' W_{n-1}^\theta \mathscr{R}_{n-1}$$

がわかる. よって補題 3.3 から

$$\left[W_n^\theta\right] \leqslant \left(1-\frac{C'}{|\Lambda|}\right) Q\left[W_{n-1}^\theta\right] + \frac{2C'}{|\Lambda|} P(X_{n-1} \notin \Lambda)^\theta$$

となる.

$d=1$ のとき $\Lambda = (-n^{2/3}, n^{2/3}]$, $d=2$ のときは $\Lambda = (-n^{1/2}\log^{1/4} n, n^{1/2}\log^{1/4} n]^2$ とおくと示される.

□

定理 1.3(1) のより簡潔な証明が [33] で与えられている.(問題 3.2, 問題 3.3)

3.2.2　定理 1.6(1) の証明 ($d=1$)

ここでは $d=1$ のときに定理 1.6(1) の証明を [40] に従って行う.

証明. $\theta \in (0,1)$ に対して $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ ならば

$$(x+y)^\theta \leqslant x^\theta + y^\theta$$

が成り立つことから任意の $n, m \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mn} Q[\log W_{mn}] &= \frac{1}{mn\theta} Q\left[\log W_{mn}^\theta\right] \\
&\leqslant \frac{1}{mn\theta} \log Q\left[W_{mn}^\theta\right] \\
&\leqslant \frac{1}{mn\theta} \log Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{(n-1)m,x}^\theta \theta_{(n-1)m,x} \circ W_m^\theta\right] \\
&\leqslant \frac{1}{mn\theta} \log Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{(n-1)m,x}^\theta \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \theta_{(n-1)m,x} \circ W_{m,y}^\theta\right] \\
&\leqslant \frac{1}{mn\theta} \log Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{m,x}^\theta\right]^n \\
&= \frac{1}{m\theta} \log Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{m,x}^\theta\right].
\end{aligned}$$

ただし 2 行目では Jensen の不等式を用いた. ここで $n\to\infty$ とすると

$$F(\beta) \leqslant \frac{1}{m\theta} \log Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{m,x}^\theta\right]$$

となる. よって

$$Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{m,x}^\theta\right] < 1 \tag{3.12}$$

となるような $\theta \in (0,1)$ と $m \in \mathbb{N}$ が存在すれば $F(\beta) < 0$ がわかる. 一方で

$$Q\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} W_{m,x}^\theta\right] \leqslant (2m) Q\left[W_m^\theta\right]$$

は明らかであるが 3.2.1 節で $\theta \in (0,1)$ に対して $d=1$ のとき十分大きい m に対して

$$Q\left[W_m^\theta\right] \leqslant e^{-cm^{1/3}}$$

が成り立つことが言えていたので, これにより (3.12) が成り立つような $\theta \in (0,1), m \in \mathbb{N}$ の存在が言えた. □

3.3 ポリマーの挙動

最後に媒質の摂動が強い相におけるポリマー測度 μ_n^β の下での X の挙動について述べておく.
そのために次のようなものを考える.

定義 3.1. $d \geqslant 1, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\xi(d,\beta) := \inf\left\{\xi > 0 : Q\left[\mu_n^\beta\left(|X_n| \geqslant n^\xi\right)\right] \to 0\right\}$$
$$\chi(d,\beta) := \inf\{\chi > 0 : Q(|\log Z_n(\beta) - Q[\log Z_n(\beta)]| \geqslant n^\chi) \to 0\}$$

とする. それぞれ**ポリマーの揺らぎ指数, 自由エネルギーの揺らぎ指数**

注意 3.6. 揺らぎ指数の定義の仕方はこれ以外にも考えられるが, それらが本当に一致するかどうかは調べられてはいない. この講義では定義の 1 つとして上のものを挙げておく. 文献ごとに異なる指数の定義をしているので注意が必要である.

このように指数を定義すると第 2.2 節でも述べたように (WD) のときは μ_n^β の下で X は中心極限定理が成り立つ. よって次のことがわかる.

$d \geqslant 3$ かつ $\beta \in \mathbb{R}$ で DPRE が (WD) であるとき $\xi(d,\beta) = \dfrac{1}{2}, \chi(d,\beta) = 0.$

では (SD) の場合はどうだろうか. 上で見てきた結果ではポリマーは局在するということはわかったが, それがどのような点であるかといったことは何も教えてくれない. そして知られている結果もほとんどない. しかし, Auffinger-Damron[9] らは次のような関係が任意の $d \geqslant 1, \beta \neq 0$ に対して成り立つことを示した.[2]

$$\chi(d,\beta) = 2\xi(d,\beta) - 1$$

この指数に関する関係は統計物理の分野では**スケーリング等式**と呼ばれており, 様々な模型に対して成り立つと予想している.

また $d = 1$ のときは次のことが成り立つことが知られている.

- [69] $\beta \neq 0$ のとき $\xi(1,\beta) > \dfrac{1}{2}$.
- [61, 69] 任意の $d \geqslant 1, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\xi(d,\beta) \leqslant \dfrac{3}{4}$.

特に $d = 1$ のときは次のことが成り立つことが期待されている.

Conjeccture 3. $\beta \neq 0$ のとき $\xi(1,\beta) = \dfrac{2}{3}, \chi(1,\beta) = \dfrac{1}{3}$.

この予想は KPZ 方程式と KPZ 普遍クラスに関する予想 (第 4.1.4 節) から来ている.

- $Q\left(e^{-\eta(0,0)} \in dx\right) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x} dx$ で与えられているとき, 予想は証明されている [71]. 証明には Gamma 分布に対する Burke 型定理を用いており, この場合にはある種の境界条件のようなものを与えることで自由エネルギーが具体的に計算できる.
- ブラウン媒質中のディレクティドポリマー (定義 1.5) および確率熱方程式 (定義 1.7) に対しては $\xi \geqslant \frac{3}{5}$ であることが証明されている [68, 16].

[2] 彼らが考えている模型は少しだけ定義が異なっている.

3.4 問題

問題 3.1. (3.11) を以下の要領で示せ.

(i) $\varepsilon \in (0,1)$ とする. このとき $\varepsilon \leqslant 1+x$ に対して

$$|\log(1+x)| \leqslant \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon}|x|$$

が成り立つことを示し,

$$P[\log^2(1+U)] \leqslant \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon}P[U^2]$$

が成り立つことを示せ.

(ii) 次の事象の包含関係

$$\{1+U \leqslant \varepsilon\} \subset \{\log^2(1+U) \leqslant 2V^2 + 2\gamma^2\} \cap \{-1 \leqslant V\}$$

が成り立つことを示し, ある定数 $c \in (0,\infty)$ が存在して

$$P[\log^2(1+U) : 1+U \leqslant \varepsilon] \leqslant c\sum_{i=1}^m \alpha_i^2$$

が成り立つことを示せ.

問題 3.2. ($d=1$ のときの定理 1.3(1) の証明 [33, Section 6.2.1])

(i) 任意の $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(\mu_n^\beta\right)^{\otimes 2}(X_n = \hat{X}_n + z) \leqslant \mathscr{R}_n$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $1 \leqslant (2n+1)\mathscr{R}_n$ が成り立つことを示すことで $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mathscr{R}_n = \infty$ が成り立つことを示せ.

問題 3.3. ($d=2$ のときの定理 1.3(1) の証明 [33, Section 6.2.1]) $\beta \neq 0$ のときに $W_\infty(\beta,\eta) > 0$ となったと仮定する. また $K > 0$ として

$$A_n^K = \{X_n^{(1)} \leqslant K\sqrt{n\log n}, X_n^{(2)} \leqslant K\sqrt{n\log n}\}, \quad W_n(\beta,\eta,A_n^K) = P\left[\exp\left(\beta\sum_{i=1}^n \eta(i,X_i) - n\lambda(\beta)\right) : \left(A_n^K\right)^c\right]$$

とおく. ただし $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ と成分表示したものとする. 以下の問に答えよ.

(i) $Q\left(X_n \geqslant e^{-\frac{K^2}{4}\log n}\right) \leqslant 4e^{-\frac{K^2}{4}\log n}$ が成り立つことを示せ.

(ii) ある $K^* > 0$ に対して $W_n(\beta,\eta,A_n^{K^*}) \to 0$, Q-a.s. であることを示せ.

(iii) $C(n,K^*) = [-K^*\sqrt{n\log n}, K^*\sqrt{n\log n}]^2$ としたとき

$$\left(1 - \mu_n^\beta\left(\left(A_n^{K^*}\right)^c\right)\right)^2 \leqslant \sum_{C(n,2K^*)}\left(\mu_n^\beta\right)^{\otimes 2}(X_n = \hat{X}_n + z) \leqslant \left(4K^*\sqrt{n\log n}\right)^2\mathscr{R}_n$$

が成り立つことを示すことで矛盾を導け.

4　KPZ 方程式との関連

ランダム媒質中のディレクティドポリマーは KPZ 普遍クラスに入っているという予想がある. これについて見ていこう.

4.1　KPZ 方程式

KPZ 方程式とは物理学者の Mehran Kardar, Giorgio Parisi, Yi-Cheng Zhang[53] らによって導出された, ある界面の成長を記述する $d=1$ 上の非線形確率偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t,x)=\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(t,x)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h(t,x)\right)^2+\sqrt{D}\dot{\mathscr{W}}(t,x), \tag{4.1}$$

のことである. ただし $\lambda,\nu,D>0$ は定数で $\mathscr{W}$ は時空間 $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上のホワイトノイズで $\dot{\mathscr{W}}$ をその超関数としての微分とする.

KPZ 方程式は様々な確率模型と関連があり, その研究は非常に多岐に渡っている. 例えば非対称排他過程 (asymmetric exclusion process), first/passage percolation, ランダム行列, 確率 Burgers 方程式, 確率反応方程式, 6-vertex model などとの関連が知られている.

4.1.1　時空間ホワイトノイズと確率積分

この節ではこの講義ノートで必要な範囲でのホワイトノイズと確率積分の定義と性質を与えておく.

定義 4.1. $(S,\mathscr{B}(S),\mu)$ をボレル可測空間とする. また $\mathscr{B}_f(S)=\{A\in\mathscr{B}(S):\mu(A)<\infty\}$ とする.

このとき確率空間 $(\Omega^{\mathscr{W}},\mathscr{F}^{\mathscr{W}},\mathscr{Q})$ 上に定義された確率変数の系 $\mathscr{W}=\{\mathscr{W}(A):A\in\mathscr{B}_f(S)\}$ がホワイトノイズであるとは

- 任意の $A\in\mathscr{B}_f(S)$ に対して $\mathscr{W}(A)\stackrel{d}{=}N(0,\mu(A))$.
- 任意の $A,B\in\mathscr{B}_f(S)$ に対して $\mathscr{Q}[\mathscr{W}(A)\mathscr{W}(B)]=\mu(A\cap B)$

を満たすときをいう.[3]

注意 4.1. 正規分布の性質から $A,B\in\mathscr{B}_f(S)$ が $A\cap B=\varnothing$ ならば $\mathscr{W}(A)$ と $\mathscr{W}(B)$ は独立であり,

$$\mathscr{W}(A\cup B)=\mathscr{W}(A)+\mathscr{W}(B),\quad \mathscr{Q}\text{-a.s.}$$

となる.

例題 4.1. $S=[0,1]$ のとき $\mathscr{B}(S)$ をボレル集合族, μ をルベーグ測度とする. このとき

$$B_t=\mathscr{W}([0,t]),\quad t\in[0,1]$$

とすると, $B=\{B_t:t\in[0,1]\}$ の連続な修正として 1 次元標準ブラウン運動がある[4].

[3] このようなガウス系が存在するのかは問題となるが $L^2(S)$ が可分な Hilbert 空間ならばその完全正規直交系 $\{\phi_k:k\in\mathbb{N}\}$ と独立同分布な確率変数 $\{B_k:k\in\mathbb{N}\}$ で $B_1\stackrel{d}{=}N(0,1)$ を用いて

$$\mathscr{W}(A)=\sum_{k\in\mathbb{N}}B_k(\phi_k,1_A),\quad A\in\mathscr{B}_f(S)$$

と与えると得られる. ただし $f,g\in L^2(S)$ に対して $(f,g)=\int_S f(s)g(s)\mu(ds)$ と定義する. 右辺は $L^2(\mathscr{Q})$-収束しガウス確率変数の和なので分布は正規分布である. 特に平均は 0 で分散は $\sum_{k\in\mathbb{N}}(\phi_k,1_A)^2=\mu(A)$ と与えられる. また $\mathscr{Q}[\mathscr{W}(A)\mathscr{W}(B)]=\mu(A\cap B)$ を満たす.

[4] 定義 4.1 から独立増分性やその分布はわかるが連続性は定義の性質から導けるものではない

注意 4.2. $\dot{\mathscr{W}}(t,x)$ を $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の超関数値ガウス場で平均 0 で共分散が

$$\mathscr{Q}[\dot{\mathscr{W}}(t,x)\dot{\mathscr{W}}(t',x')] = \delta_{t-t'}\delta_{x-x'}, \quad t,t'\in[0,\infty), x,x'\in\mathbb{R}^d$$

となるものと書くこともある.

例題 4.2. ユークリッド空間で考えているときに時空間ホワイトノイズとは $d\geqslant 1$ に対して

$$S=[0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \quad \mathscr{B}(S)=\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d), \quad \mu(ds)=dtdx\,(\text{ルベーグ測度}) \tag{4.2}$$

という測度空間 (もしくはその制限) に対して定義されたホワイトノイズを指す.

では時空間ホワイトノイズに関する確率積分の定義を与える [70].

まずはランダムでない可測関数に対して定義していく. $\mathscr{W}$ が S 上の符号付き測度のようなものであると思えば構成方法は単関数から始めて, 何らかの可測関数に拡張するという流れは自然である.

定義 4.2. (S 上の可測関数に対する確率積分)
$(S,\mathscr{S},\mu)$ を (4.2) のようにとる.

- $a_1,\cdots a_n\in\mathbb{R}, A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{B}_f(S)$ で $A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$ に対して可測単関数 $f(t,x)=\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(t,x)$ の確率積分を

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x)\mathscr{W}(dtdx)=\sum_{i=1}^n a_i\mathscr{W}(A_i)$$

と定義する.

- $f\in L^2(S)$ に対して単関数列 f_n で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d}|f_n(t,x)-f(t,x)|^2dtdx=0$$

を満たすものに対して

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x)\mathscr{W}(dtdx)=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f_n(t,x)\mathscr{W}(dtdx)$$

と定義する. ただし右辺は $L^2(\mathscr{Q})$-収束極限を表している. (この極限は f_n の選び方によらない)
また $A\in\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ と S 上の可測関数 f で $f1_A\in L^2(S)$ となるものに対して

$$\int_A f(t,x)\mathscr{W}(dtdx)=\int_S f(t,x)1_A(t,x)\mathscr{W}(dtdx)$$

と定義する.

注意 4.3. $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の単関数 f に対する確率積分 $\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x)\mathscr{W}(dtdx)$ の分布は $N(0,\sum_{i=1}^n a_i^2|A_i|)$ で与えられることは容易にわかる. また $f\in L^2(S)$ に対して

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x)\mathscr{W}(dtdx)\overset{d}{\sim}N\left(0,\sigma_f^2\right), \quad \text{ただし}\,\sigma_f^2=\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^2dtdx$$

となることがわかる. (必要ならば特性関数を計算してみる.)

さて目標は確率偏微分方程式について考えることであるので非ランダムな関数に対する確率積分だけでなく, ランダムな関数に対して確率積分を定義する必要がある. しかし $\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}^{\mathscr{W}}$-可測な関数に対して定義することはしない.

定義 4.3. $(\Omega^{\mathscr{W}},\mathscr{F}^{\mathscr{W}},\mathscr{Q})$ 上で定義された $([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ のホワイトノイズ $\mathscr{W}$ に対して

$$\mathscr{F}_t^{\mathscr{W}}=\sigma\left[\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} f(t,x)\mathscr{W}(dtdx) : f\in L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d)\right]$$

によって確率空間 $(\Omega,\mathscr{F}^{\mathscr{W}},\mathscr{Q})$ に**フィルトレーション**を定義する.

- **単過程** $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\Omega^{\mathscr{W}}\to\mathbb{R}$ とは, ある $0=s_0<s_1<\cdots<s_n<\infty$, $\phi_i\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{F}_{s_{i-1}}^{\mathscr{W}}$-可測な確率変数 $X_i(\omega)\in L^2(\mathscr{Q})$ が存在して
$$f(t,x,\omega)=\sum_{i=1}^n 1_{(s_i-1,s_i]}(t)\phi(x)X_i(\omega) \tag{4.3}$$
と表せるものをいう. 単過程全体を $\mathscr{S}$ と書くことにする.

- $f\in\mathscr{S}$ が (4.3) のように表せているとする. このとき f の $\mathscr{W}$ に関する**確率積分**を
$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x,\omega)\mathscr{W}(dtdx)=\sum_{i=1}^n X_i(\omega)\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} 1_{(s_i-1,s_i]}(t)\phi(x)\mathscr{W}(dtdx)$$
と定義する.

- $A\in\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ と $f\in\mathscr{S}$ に対して $f1_A\in\mathscr{S}$ である. この $f1_A$ の確率積分を
$$\int_A f(t,x,\omega)\mathscr{W}(dtdx)=\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x)1_A(t,x,\omega)\mathscr{W}(dtdx)$$
と定義する. 特に $A=[0,t]\times\mathbb{R}^d$ のときは
$$I_t(f)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f(s,x,\omega)\mathscr{W}(dsdx) \tag{4.4}$$
と書くこともある.

- $\mathscr{B}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}^{\mathscr{W}}$ の部分 σ-加法族で $\mathscr{S}$ で生成されるものを $\mathscr{P}$ と書くことにする. このとき $\mathscr{P}$-可測で二乗可積分な関数を $L^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\Omega^{\mathscr{W}},\mathscr{P})$ と表す.

注意 4.4. 定義から $0\leqslant s\leqslant t<\infty$ としたとき任意の $\mathscr{F}_s^{\mathscr{W}}$-可測な確率変数 X と任意の $A\in\mathscr{B}_f(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathscr{W}([s,t]\times A)$ は独立である.

このように定義したとき次のことがわかる.(問題 4.1)

命題 4.1. $f\in\mathscr{S}$ のとき

$$\mathscr{Q}\left[\left(\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x,\omega)\mathscr{W}(dtdx)\right)^2\right]=\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d}\mathscr{Q}\left[f(t,x,\omega)^2\right]dtdx$$

問 4.1. $f\in\mathscr{S}$ に対して (4.4) で定義した確率積分 $I_t(f)$ を考えたとき $\{I_t(f):t\geqslant 0\}$ は確率 1 で連続となるような修正をもつことを示せ.

問 4.1 により $I_t(f)$ を連続な確率過程とみなしてよいことがわかる.
また $\mathscr{S}$ に対する確率積分に関する基本的な性質としては次のものがある. これはブラウン運動に関する確率積分と同じ内容である.

補題 4.1. $f, g \in \mathscr{S}$ とする. このとき $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ に対して次が成り立つ.

(i) $I_0(f) = 0$ $\mathscr{Q}$-a.s.

(ii) $\mathscr{Q}\left[I_t(f) | \mathscr{F}_s^{\mathscr{W}}\right] = I_s(f)$ $\mathscr{Q}$-a.s.

(iii) $\mathscr{Q}\left[I_t(f)^2\right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{Q}[f(s,x,\omega)^2] ds dx.$

(iv) $\mathscr{Q}\left[(I_t(f) - I_s(f))^2 \middle| \mathscr{F}_s^{\mathscr{W}} \right] = \mathscr{Q}\left[\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} f(u,x,\omega)^2 du dx \middle| \mathscr{F}_s^{\mathscr{W}} \right]$ $\mathscr{Q}$-a.s.

(v) $I_t(\alpha f + \beta g) = \alpha I_t(f) + \beta I_t(g)$ $\mathscr{Q}$-a.s. $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

特に (ii) と問 4.1 から $\{I_t(f) : t \geqslant 0\}$ は連続マルチンゲールであることがわかる.

さて $f \in L^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \Omega^{\mathscr{W}}, \mathscr{P})$ に対する確率積分を構成しよう. これにはブラウン運動に関する確率積分のときと同様に近似列をとることが必要である. そのために次の命題を用意する. (問題 4.3)

命題 4.2. $\mathscr{S}$ は $L^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \Omega^{\mathscr{W}}, \mathscr{P})$ で稠密である.

では確率積分を構成しよう.

命題 4.2 から $\mathscr{S}$ の列 $\{f_n : n \in \geqslant 1\}$ で f に $L^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \Omega^{\mathscr{W}}, \mathscr{P})$-収束するものが存在する. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} \mathscr{Q}\left[(f_n(t,x,\omega) - f(t,x,\omega))^2 \right] dt dx = 0$$

を満たすものがある. このような f_n に対して

$$I(f_n, \omega) = \int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f_n(t,x,\omega) \mathscr{W}(dt dx) \tag{4.5}$$

を考えると $\{I(f_n,\omega) : n \geqslant 1\}$ は $L^2(\Omega^{\mathscr{W}}, \mathscr{F}^{\mathscr{W}}, \mathscr{Q})$ のコーシー列であることが命題 4.1 から従い (問題 4.2), よって $L^2(\mathscr{Q})$-極限

$$I(f,\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f_n(t,x,\omega) \mathscr{W}(dt, dx)$$

が存在する. これを f の $\mathscr{W}$ に関する**確率積分**といい

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x,\omega) \mathscr{W}(dt, dx)$$

と表す.

$A \in \mathscr{B}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ と $\mathscr{P}$-可測関数 f で $f 1_A \in L^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \Omega^{\mathscr{W}}, \mathscr{P})$ となるものに対して

$$\int_A f(t,x,\omega) \mathscr{W}(dt dx) = \int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} f(t,x) 1_A(t,x,\omega) \mathscr{W}(dt dx)$$

と定義する. 特に $A = [0,t] \times \mathbb{R}^d$ のときは

$$I_t(f) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,\omega) \mathscr{W}(dt dx)$$

と書くこともある.

このように定義したとき次のことがわかる.

補題 4.2. 補題 4.1 の主張は $f,g \in L^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\Omega^{\mathscr{W}},\mathscr{P}))$ の場合にも成り立つ.

注意 4.5. 補題 4.2 の証明で注意しなければいけないのは $\{I_t(f):t\geqslant 0\}$ が連続マルチンゲールであることである. これは実際には $\{f_n:n\geqslant 1\}$ を単過程の列で f に L^2-収束するものとする. このとき $\{I_t(f_n):n\geqslant 1\}$ は連続マルチンゲールの列になるが Burkholder-Davis-Gundy の不等式 (定理 A.2) からある定数 $C>0$ が存在して

$$\mathscr{Q}\left[\sup_{t\in[0,T]}|I_t(f_n)-I_t(f_m)|^2\right]\leqslant C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{Q}\left[(f_n(t,x,\omega)-f_m(t,x,\omega))^2\right]dtdx$$

が成り立つ. よってこれにより部分列 $\{I_t(f_{n_k})\}$ が確率 1 で $[0,T]$ 上一様収束するものがとれる.

注意 4.6. 確率積分と呼んで積分の記号を用いて表しているがブラウン運動の時と同様に実際に積分をしているわけではない. f に対応して上記のようにして定まる $I(f)\in L^2(\Omega^{\mathscr{W}})$ や二乗可積分連続マルチンゲール $I_t(f)$ のことを確率積分と呼んでいるのである. 特に I は $L^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\Omega^{\mathscr{W}},\mathscr{P})$ から $L^2(\Omega^{\mathscr{W}})$ への等長な線形写像である. ($\P$ の取り方によってこの等長性が成り立っているのである.)

4.1.2 Wiener chaos

この節では $\mathscr{W}$ に関する多重確率積分の定義と確率熱方程式の解の Wiener chaos 表示について述べる.

定義 4.4. $k\geqslant 1$ と $0\leqslant s\leqslant t<\infty$ に対して

$$\Lambda_k=\{\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_k)\in[0,\infty)^k:0\leqslant t_1<\cdots<t_k<\infty\}$$
$$\Lambda_k(s,t)=\{\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_k)\in[0,\infty)^k:s\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant t\}$$

と定義する.

さて多重積分を考えよう. ここでは $f\in L^2(\Lambda_k\times\mathbb{R}^{dk})$ を $\mathscr{W}$ に関して多重確率積分

$$\int_{\Lambda_k\times\mathbb{R}^{dk}}f(\mathbf{t},\mathbf{x})\mathscr{W}(dt_1dx_1)\cdots\mathscr{W}(dt_kdx_k)$$

を定義することを目標にする. ただし $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{R}^{dk}$ ($x_i\in\mathbb{R}^d$, $i=1,\cdots,k$) と表記している.

定義 4.5.
- 有界区間 $A_1,\cdots,A_k\subset\mathbb{R}$ を互いに素なもので $i=1,\cdots,k-1$ に対して $\sup A_i\leqslant\inf A_{i+1}$ が成り立つものとし, $B_1,\cdots,B_k\in\mathscr{B}_f(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$f(\mathbf{t},\mathbf{x})=\prod_{i=1}^k 1_{A_i}(t_i)1_{B_i}(x_i) \tag{4.6}$$

と書ける $\mathscr{B}(\Lambda_k\times\mathbb{R}^{dk})$-可測関数 f に対する k-次の**多重確率積分** $I^{(k)}(f)$ を

$$I^{(k)}(f)=\prod_{i=1}^k\mathscr{W}(A_i\times B_i)$$

と定義する.

- (4.6) のように表せる $\mathscr{B}(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})$-可測関数の有限線形和で与えられる関数全体の集合を $\mathscr{S}_k$ と表すことにする.

  $f \in \mathscr{S}_k$ が (4.6) の形でかける n 個の関数 $F_1, \cdots, F_n$ と $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ を用いて $f(\mathbf{t},\mathbf{x}) = a_1F_1(\mathbf{t},\mathbf{x}) + \cdots + a_nF_n(\mathbf{t},\mathbf{x})$ と表せるとき

$$I^{(k)}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i I^{(k)}(F_i)$$

  と定義する.

問 4.2. $f \in L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})$ に対して

$$\|f\|_{L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})} = \left(\int_{\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk}} f(\mathbf{t},\mathbf{x})^2 d\mathbf{t}d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

と定義する.

$I^{(k)}(f)$ を (4.6) で与えられたものとする. このとき

$$\mathscr{Q}\left[I^{(k)}(f)^2\right] = \|f\|^2_{L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})}$$

となることを示せ.

また $f \in \mathscr{S}_k, g \in \mathscr{S}_l$ としたとき

$$\mathscr{Q}\left[I^{(k)}(f)I^{(l)}(g)\right] = \begin{cases} \int_{\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk}} f(\mathbf{t},\mathbf{x})g(\mathbf{t},\mathbf{x})d\mathbf{t}d\mathbf{x}, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

$\mathscr{S}_k$ は $\mathscr{B}(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})$ の単関数全体と思うことができるので, 任意の $f \in L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})$ に対して $\|\cdot\|_{L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})}$ で収束するような $\mathscr{S}_k$ の列 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ が存在する. このことに注意すると問 4.2 から $\{I^{(k)}(f_n) : n \geqslant 1\}$ は $L^2(\Omega^{\mathscr{W}})$ 内のコーシー列になる. よってその $L^2(\Omega^{\mathscr{W}})$-極限が存在する. これを

$$I^{(k)}(f) = \lim_{n \to \infty} I^{(k)}(f_n) =: \int_{\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk}} f(\mathbf{t},\mathbf{x}) \mathscr{W}^{\otimes k}(d\mathbf{t}d\mathbf{x})$$

と表し, k-次の**多重確率積分**と定義する. $\Lambda_k(0,t) \times \mathbb{R}^{dk}$ で考えるときは $f(\mathbf{t},\mathbf{x})1_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^{dk}}$ に対して定義する.

このように k-次の多重積分を考えると実は次のようなことが知られている.

定理 4.1. **(Wiener chaos 展開** [51]**)** $X \in L^2(\Omega^{\mathscr{W}})$ とする. このとき $(f_0, f_1, \cdots) \in \bigotimes_{k=0}^{\infty} L^2\left(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk}\right)$ が存在して

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} I^{(k)}(f_k)$$

と表すことができる. ただし $f_0 = \mathscr{Q}[X]$ であり $I^{(0)}(f_0) = f_0$ と定義しておく. 特にこのとき

$$\mathscr{Q}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})}$$

となる.

この Wiener chaos 展開は KPZ 方程式の Hopf-Cole 解として与えられた確率熱方程式の解を記述する際に非常に有効である.

4.1.3 確率熱方程式

本来ならばここで確率偏微分方程式の解について色々と書いた方がよいのかもしれない.

しかしこのノートはあくまでもランダム媒質中のディレクティドポリマーに関するものなので余分なことは書かずにここでは次の確率熱方程式に関してのみ述べておく. 確率偏微分方程式については様々な文献 ([59, 47] 等) があるのでそちらを参考にされたい.

$$\partial_t \mathscr{Z}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta\mathscr{Z}(t,x) + \beta\mathscr{Z}(t,x)\dot{\mathscr{W}}(t,x). \tag{4.7}$$

ただし $\beta \in \mathbb{R}$ とする. 今考えるのは $d = 1$ の場合である.

(4.7) の解を考えるときには初期値を設定しなければいけばい. 通常よく使われるのはある定数 $c > 0$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathscr{Q}\left[\sup_{A\subset[-n,n]}\int_A \mathscr{Z}_0(x)dx\right] < ce^{cn} \tag{4.8}$$

という条件を満たす $\mathscr{F}_0^{\mathscr{W}}$-可測なランダム測度$\mathscr{Z}_0(dx)$ である.[5]

定義 4.6. $d = 1$ とする. $\{\mathscr{Z}_\beta(t,x) : (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}\}$ が初期条件 (4.8) を満たす (4.7) の軟解であるとは $\mathscr{Z}_\beta$ は $\mathscr{P}$-可測で

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \rho_{t-s}(x-y)^2\mathscr{Q}[\mathscr{Z}_\beta(s,y)^2]dsdy < \infty, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

を満たし, かつ

$$\mathscr{Z}_\beta(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_t(x,y)\mathscr{Z}_0(dy) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \beta\mathscr{Z}_\beta(s,y)\rho_{t-s}(x,y)\mathscr{W}(dsdy)$$

を満たすときをいう. ただし

$$\rho_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right), \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}$$

とし, $\rho_t(0,x) = \rho_t(x)$ と書く.

注意 4.7. (4.7) で, もし $\dot{\mathscr{W}}(t,x)$ が $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ で十分良い条件を満たすと仮定すれば, これは Feynman-Kac の公式の範疇に入り, その解は

$$\mathscr{Z}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} dy\mathscr{Z}_0(y)P_B^y\left[\exp\left(\beta\int_0^t \mathscr{W}(s,B_s)ds\right)\middle| B_t = x\right]\rho_t(y,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

と表せる[6]. ただし (B, P_B^x) は $\mathscr{W}$ と独立な $x \in \mathbb{R}$ を出発点とする Brown 運動である.

$\dot{\mathscr{W}}(t,x)$ は $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ ではないのでこのような表現はできない. しかし (4.7) の軟解については次のような Wiener-chaos 展開が知られている.

[5]符号付測度を考えても良いが測度で十分である.

[6]通常の Feynman-Kac の公式とは形は違うが後ろで扱う DPRE との比較を行う上ではこちらの方がわかりやすい

定理 4.2. 初期条件 (4.8) を満たす (4.7) の軟解は

$$\mathscr{Z}_\beta(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \int_{\Lambda_k(0,t)} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_k(\mathbf{s},\mathbf{y}|0,y_0;t,x) \mathscr{Z}_0(dy_0) \right) \mathscr{W}^{\otimes k}(d\mathbf{t}d\mathbf{y}) \tag{4.10}$$

ただし

$$\rho_0(\mathbf{s},\mathbf{y}|s,y_0;t,x) = \rho_{t-s}(y_0,x), \quad s \in [0,t], y_0, x \in \mathbb{R}$$

とし, $k \geqslant 1$ に対して $\mathbf{s} = (s_1,\cdots,s_k) \in \Lambda_k(s,t)$, $\mathbf{y} = (y_1,\cdots,y_k) \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$\rho_k(\mathbf{s},\mathbf{y}|s,y_0;t,x) = \rho_{s_1-s}(y_1-y) \prod_{i=1}^{k-1} \rho_{s_{i+1}-s_i}(y_{i+1}-y_i)\rho_{t-s_k}(x-y_k)$$

とおく.

注意 4.8. $\mathscr{Z}_0(dy) = \delta_0(dy)$ のとき (4.7) の軟解は

$$\mathscr{Z}_\beta(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} I^{(k)}(\beta^k \rho_k(\cdot,\cdot|0,0;t,x)) \tag{4.11}$$

と書けることがわかる. 特に (A.6) より

$$\mathscr{Q}\left[\mathscr{Z}_\beta(t,x)^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{2k} \int_{\Lambda_k(0,t)} \int_{\mathbb{R}^k} \rho_k^2(\mathbf{s},\mathbf{y}|0,0;t,x)^2 d\mathbf{t}d\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{2k} t^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k+1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \rho_{\frac{t}{2}}(x)$$

となる. 右辺の収束は容易に確認できる.

また軟解の性質を見るために次のような 4 つのパラメータをもつランダム場を考える. $0 \leqslant s < t$, $x,y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} I^{(k)}(\rho_k(\cdot,\cdot|s,x;t,y))$$

とおく. このとき次のことが知られている.

定理 4.3. ([4, 63]) 以下のことが成り立つ.

(1) $\mathscr{Q}\left[\mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y)\right] = \rho_{t-s}(x,y)$

(2) (平行移動不変) 任意の $u \in [0,\infty)$, $z \in \mathbb{R}$ に対して $\mathscr{Z}_\beta(s+u,x+z;t+u,y+z) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y)$.

(3) (スケール変換) 任意の $r > 0$ に対して $\mathscr{Z}_\beta(r^2 s, rx; r^2 t, ry) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{r}\mathscr{Z}_{\beta\sqrt{r}}(s,x;t,y)$.

(4) 確率 1 で任意の $x,y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant s < t < \infty$ に対して $\mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y) > 0$.

(5) $\dfrac{\mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y)}{\rho_{t-s}(x,y)}$ の分布は x,y に依存しない.

(6) 任意の互いに素な区間 $\{(s_i,t_i] : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ と $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ に対して $\{\mathscr{Z}_\beta(s_i,x_i;t_i,y_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ は独立である.

(7) (Chapman-Kolmogorov 方程式) 確率 1 で任意の $x,y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant s < r < t < \infty$ に対して

$$\mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{Z}_\beta(s,x;r,z)\mathscr{Z}_\beta(r,z;t,y)dz, \tag{4.12}$$

証明. (1), (2), (6), (7) は定義から容易に確かめられる. また (3) は問題 4.4 と $\rho_{r^2t}(rx) = \frac{1}{r}\rho_t(x)$ を用いると定義から確かめられる. (4) はここでは証明を与えない. これより強い $\mathscr{Z}_\beta(s,x;t,y)^{-1}$ の可積分性を確かめることができる (定理 5.5).

(5): 平行移動不変性とスケール変換から $\dfrac{\mathscr{Z}_\beta(0,0;1,x)}{\rho_1(x)}$ について考えれば十分である. これの Wiener-chaos 展開を考えると $k=0$ は 1 である. また各 $k \geqslant 1$ に対しては

$$\frac{\rho_k(\mathbf{t},\mathbf{y}|0,0;1,x)}{\rho_1(x)}, \quad \mathbf{t} \in \Lambda_k(0,1), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$$

に対する多重確率積分を考えることになる. これは $t=0$ で原点を出発し, $t=1$ で x に到達するブラウン橋の k-次時間分布の密度関数である. ブラウン橋 $0 \to x$ はブラウン橋 $(0 \to 0)$ へ変換することができる. すなわち

$$\frac{\rho_k(\mathbf{t},\mathbf{t}x+\mathbf{y}|0,0;1,x)}{\rho_1(x)} = \frac{\rho_k(\mathbf{t},\mathbf{y}|0,0;1,0)}{\rho_1(0)}, \quad \mathbf{t} \in \Lambda_k(0,1), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$$

が成り立つ. ただし $\mathbf{t}x = (t_1x, \cdots t_kx) \in \mathbb{R}^k$ とする. これと問題 4.5 を合わせると導ける. □

4.1.4 KPZ 方程式と KPZ 普遍クラス（準備中）

次の結果が知られている.

定理 4.4. ([8]) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $t \to \infty$ のとき

$$\mathscr{Q}\left(\log \frac{\mathscr{Z}_1(t,t^{\frac{2}{3}}x)}{\rho_t(t^{\frac{2}{3}}x)} + \frac{t}{4!} \leqslant st^{\frac{1}{3}}\right) \to F_{GUE}(2^{\frac{1}{3}}s)$$

が成り立つ. ただし F_{GUE} は GUE Tracy-Widom 分布である. すなわちガウス型ユニタリアンサンブルの最大固有値を中心化したもののスケール極限の分布である.

4.1.5 KPZ 方程式と確率熱方程式

この節のまとめとして本来の目的である KPZ 方程式と 4.1.3 節で考えた確率熱方程式の関係を述べておく.

KPZ 方程式の形 (4.1) を見るともし解を持ったとするとノイズ項の影響でその解の空間方向への正則性は低くなり, 右辺の第 2 項が意味を持たない. そういった意味で (4.1) は ill-defined である. しかし Lorenzo Bertini, Giambattista Giacomin らは非負対称な $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} J(x)dx = 1$ となるものを用いて, $\kappa > 0$ に対して

$$J_x^\kappa(x') = \kappa J(\kappa(x-x'))$$
$$\mathscr{W}^\kappa(t,x) = \int_{[0,t]}\int_{\mathbb{R}} J_x^\kappa(x')\mathscr{W}(dtdx')$$

という軟化を考えた. このとき $\mathscr{W}^\kappa$ は任意の $t,s \geqslant 0, x,y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{Q}[\mathscr{W}^\kappa(t,x)\mathscr{W}^\kappa(s,y)] = s \wedge tC_\kappa(x-x'), \quad C_\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}} J_x^\kappa(x')J_0^\kappa(x')dx'$$

が成り立つ.

この $\mathscr{W}^\kappa$ に対して (4.7) の軟化を考えると

$$\partial_t \mathscr{Z}^\kappa(t,x) = \frac{1}{2}\mathscr{Z}^\kappa(t,x) + \beta \mathscr{Z}^\kappa(t,x)\dot{\mathscr{W}}^\kappa(t,x) \tag{4.13}$$

となる. この解を考えると $\mathscr{Z}_0$ に良い仮定を与えたとき, 各 $t>0$ に対して $x \to \mathscr{Z}_\beta(t,x)$ は $\mathscr{Q}$-a.s. で微分可能になる [14]. このとき $h^\kappa(t,x) := \log \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)$ に対して

$$\partial_t h^\kappa(t,x) = \frac{\partial_t \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)}{\mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)} - \frac{1}{2}\frac{d\langle \mathscr{Z}_\beta^\kappa(\cdot,x)\rangle_t}{\mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)^2}$$

$$\partial_x h^\kappa(t,x) = \frac{\partial_x \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)}{\mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)}$$

$$\Delta h^\kappa(t,x) = \frac{\Delta \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)}{\mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)} - \frac{\left(\partial_x \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)\right)^2}{\mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)^2}$$

となる. これらと

$$d\langle \mathscr{Z}_\beta^\kappa(\cdot,x)\rangle_t = \beta^2 \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)^2 C_\kappa(0)$$

となることに注意すると

$$\partial_t h^\kappa(t,x) = \frac{1}{2}\Delta h^\kappa(t,x) + \frac{1}{2}\left[(\nabla h^\kappa(s,x))^2 - \beta^2 C_\kappa(0)\right] + \beta \mathscr{W}^\kappa(t,x)$$

に対応する. Bertini, Giacomin らはこの $\{h^\kappa \in C([0,\infty) : C(\mathbb{R})) : \kappa > 0\}$ が $\kappa \to 0$ としたときに弱収束極限を持つことを示した. それを (4.1) の解と定義した.

注意 4.9. $C_\kappa(0) = \frac{1}{\kappa}\int_{\mathbb{R}} J(x)^2 dx$

注意 4.10. 元の論文では (4.13) はノイズ項は $-\beta \mathscr{Z}^\kappa(t,x)\dot{\mathscr{W}}^\kappa(t,x)$ で $h^\kappa(t,x) = -\log \mathscr{Z}_\beta^\kappa(t,x)$ として定義されている. これは Burgers 方程式の Cole-Hopf 解に相当するものを考えるときに使う手法である. $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $u(t,x)$ が満たす非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = \nu \Delta u(t,x)$$

を Burgers 方程式と呼ぶ. この非線形偏微分方程式の解は

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \nu\Delta\psi(t,x)$$

の解 ψ を用いて

$$u(t,x) = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\log\psi(t,x)$$

と記述できる. このような変換を Cole-Hopf 変換と呼ぶ. 容易にわかるように $v(t,x) = -2\nu\log\psi(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = \nu\Delta v(t,x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\right)^2$$

となる. (4.1) はこの偏微分方程式にノイズ項が加わった形になっていることが見て取れる.

4.2 1 次元 DPRE と確率熱方程式

この節では DPRE と確率熱方程式の関係について述べていこう.

DPRE の点から点への分配関数 (1.3):

$$Z_n(\beta,\eta) = P\left[\exp\left(\beta\sum_{i=1}^n \eta(i,X_i)\right) : X_n = x\right]$$

と初期値が $Z_0(dy)=\delta_0(dy)$ のときの確率熱方程式の形式的な解 (4.9)

$$\mathscr{Z}(t,x)=P_B\left[\exp\left(\beta\int_0^t \mathscr{W}(s,B_s)ds\right)\middle| B_t=x\right]\rho_t(x) \tag{4.14}$$

を比較してみよう. (4.14) をもう少し形式的に書くと

$$\mathscr{Z}(t,x)=P_B\left[\exp\left(\beta\int_0^t \mathscr{W}(s,B_s)ds\right):B_t=x\right]$$

となることがわかる. この 2 つを比較すると

	DPRE	確率熱方程式
ベースとなる確率過程	ランダムウォーク	ブラウン運動
ランダム媒質	$\{\eta(i,x)\}$: 時空間 i.i.d.	$\dot{\mathscr{W}}(t,x)$: 時空間ホワイトノイズ
ハミルトニアン	級数	積分

という離散 $\leftrightarrow$ 連続の対応があることがわかる. そこで非常に雑な見方をすれば 1 次元 DPRE は 1 次元確率熱方程式の離散版と思うこともできる.

こういった意味で 1 次元 DPRE は KPZ 方程式の解が満たす性質を満たすと予想されており, 特に KPZ 普遍クラスに入っていると考えられている.

この節の残りでは次のように, 1 次元 DPRE により 1 次元確率熱方程式の近似になっていることを示す.

定理 4.5. ([5]) $d=1$ とする. $n\geqslant 1$ に対して $\beta_n=\beta n^{-\frac{1}{4}}$ $(\beta\geqslant 0)$ とする. また η は

$$Q[\eta(n,x)^2]=1$$

を満たすものとする. このとき任意の $t>0, x\in\mathbb{R}$ に対して

$$W_{nt}(\beta_n,\eta)\Rightarrow\int_{\mathbb{R}}\mathscr{Z}_{\sqrt{2}\beta}(t,y)dy$$

$$\frac{\sqrt{nt}}{2}W_{nt,x\sqrt{n}}(\beta_n,\eta)\Rightarrow\mathscr{Z}_{\sqrt{2}\beta}(t,x)$$

が成り立つ. ただし nt や nx は整数部分を表すものとする.

注意 4.11. より正確にはそれぞれ $\mathbb{R}, C(\mathbb{R})$-値の連続な確率過程としての法則収束, 同時分布の法則収束, 出発点を $(ns, y\sqrt{y})$ へシフトしたものに関する法則収束も言える.

証明の話に入る前になぜ β を $n^{-1/4}$ の速さで 0 に近づけるのかについて簡単な説明を与える. それは補題 2.1 を思い出すと

$$Q\left[W_n(\beta_n,\eta)^2\right]=P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left((\lambda(2\beta_n)-2\lambda(\beta_n))L_n(X,\hat{X})\right)\right]$$

となる. $L_n(X,\hat{X})$ は二つの単純ランダムウォークが時刻 n までにぶつかった回数であり, この期待値は $n^{1/2}$ の速さで発散する. 一方で $\lambda(x)$ の $x=0$ でのテーラー展開を考えると

$$\begin{aligned}\lambda(2\beta)-2\lambda(\beta)&=\lambda'(0)(2\beta)+\frac{\lambda''(0)}{2}(2\beta)^2+O(\beta^3)-2\left(\lambda'(0)\beta+\frac{\lambda''(0)}{2}\beta^2+O(\beta^3)\right)\\&=\lambda''(0)\beta^2+O(\beta^3)\end{aligned}$$

となる. $\lambda'(0)=Q[\eta(n,x)]=0, \lambda''(0)=Q[\eta(n,x)^2]=1$ であることから $\beta_n=\beta n^{-\frac{1}{4}}$ とすると

$$(\lambda(2\beta_n)-2\lambda(\beta_n))L_n(X,\hat{X})$$

が自明でない値に収束することがわかる.

証明は実際に (4.11) に法則収束することを示す. そのために以下のような展開を考える.

$$
\begin{aligned}
W_{nt}(\beta_n,\eta) &= P_X\left[\prod_{i=1}^{nt}(1+\omega_n(i,X_i))\right] \\
&= P_X\left[\sum_{k=0}^{nt}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant nt}\prod_{i=1}^{k}\omega_n(i,X_i)\right] \\
&= 1+\sum_{k=1}^{nt}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant nt}\sum_{x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{Z}}\prod_{i=1}^{k}\omega_n(j_i,x_i)p_{j_i-j_{i-1}}(x_{i-1},x_j).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

ただし,

$$\omega_n(i,x)=(\exp(\beta_n\eta(i,x)-\lambda(\beta_n))-1)$$

とする. $p_n(x,y)$ の定義は (1.1) で与えられたランダムウォークの時刻 n での遷移確率である.

ここで注意することとして (4.15) の $\mathbf{j}=(j_1,\cdots,j_k)$ と $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)$ に関する級数で実際に意味を持つのは各 $1\leqslant i\leqslant k$ に対して j_i-x_i が偶数となるときである. そこで記号として $\mathbf{j}=(j_1,\cdots,j_k)\in\mathbb{N}^k$ と $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{Z}^k$ に対して

$$\mathbf{j}\leftrightarrow\mathbf{x}\Leftrightarrow 1\leqslant i\leqslant k \text{ に対して } j_i-x_i\in 2\mathbb{Z}$$

と記号を導入し, さらに

$$D_k^{(n)}(nt)=\{\mathbf{j}=(j_1,\cdots,j_k)\in\mathbb{N}^k : 1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant t\}$$

と定義する.

このとき (4.15) は

$$W_{nt}(\beta_n,\eta)=1+\sum_{k=1}^{nt}\sum_{D_k^{(n)}(t)}\sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^k\\ \mathbf{j}\leftrightarrow\mathbf{x}}}\prod_{i=1}^{k}\omega_n(j_i,x_i)p_{j_i-j_{i-1}}(x_{i-1},x_j).$$

また $n^{\frac{1}{4}}\omega_n(i,x)=\tilde{\omega}_n(i,x)$ とおくと

$$1+\sum_{k=1}^{nt}\sum_{D_k^{(n)}(t)}\sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^k\\ \mathbf{j}\leftrightarrow\mathbf{x}}}\prod_{i=1}^{k}\frac{\tilde{\omega}_n(i,x_i)n^{\frac{1}{2}}p_{j_i-j_{i-1}}(x_{i-1},x_j)}{n^{\frac{3}{4}}}\tag{4.16}$$

となる.

上で確認したことから

$$Q[\tilde{\omega}_n(i,x)^2]\to\beta^2$$

であり, ランダムウォークの局所極限定理から $\dfrac{j}{n}\to s,\ \dfrac{x}{\sqrt{n}}\to y$ で $i-x\in 2\mathbb{Z}$ のとき

$$n^{\frac{1}{2}}p_j(x)\to 2\rho_s(y)$$

が成り立つことから n が十分大きいとき

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{D_k^{(n)}(t)}\sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^k\\ \mathbf{j}\leftrightarrow\mathbf{x}}}\prod_{i=1}^{k}\frac{\tilde{\omega}_n(i,x_i)}{n^{\frac{3}{4}}}2\rho_{\frac{j_j-j_{i-1}}{n}}\left(\frac{x_{i-1}}{\sqrt{n}},\frac{x_j}{\sqrt{n}}\right)$$

のように見え, 特に $\tilde{\omega}_n$ の時空間の和のオーダーが $n^{\frac{3}{2}}$ となる. 分母の $n^{3/4}$ は中心極限定理のオーダーになっているので (若干無茶があるが) 時空間ホワイトノイズへ法則収束すると想像するのは可能である. この流れを丁寧に行っていくことが証明になる.

まずは証明のために記号を定義していく.

$$D_k^{(n)}(t)\tilde{\times}\mathbb{Z}^k = \{(\mathbf{j},\mathbf{x}) \in D_k^{(n)}(t) \times \mathbb{Z}^k : \mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{x}\}$$

とし, $D_k^{(n)}(t)\tilde{\times}\mathbb{Z}^k$ 上の関数 f に対して

$$S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f) = \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{x})\in D_k^{(n)}(t)\tilde{\times}\mathbb{Z}^k} f(\mathbf{j},\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k \frac{\tilde{\omega}_n(j_i,x_i)}{n^{\frac{3}{4}}} \tag{4.17}$$

と定義する. (ただし右辺の級数が $L^2(Q)$-収束するものについてのみ考える.)

$$\mathscr{R}_k^{(n)} =: \left\{ R_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{j}-\mathbf{1}}{n}, \frac{\mathbf{j}}{n}\right] \times \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{1}}{\sqrt{n}}, \frac{\mathbf{x}+\mathbf{1}}{\sqrt{n}}\right] : \mathbf{j} \in D_k^{(n)}(t), \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^k, \mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{x} \right\}$$

とおく. ただし $\mathbf{1} = (1,\cdots,1)$ とし $\mathbf{a} = (a_1\cdots,a_k)$, $\mathbf{b} = (b_1,\cdots,b_k) \in \mathbb{R}^k$ が $1 \leqslant i \leqslant k$ に対して $a_i \leqslant b_i$ を満たすとき

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}] = \prod_{i=1}^k (a_i, b_i]$$

と定義する. このとき $R_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x}) \in \mathscr{R}_k^{(n)}$ のルベーグ測度は

$$|R_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x})| = 2^k n^{-\frac{3k}{2}}$$

である.

また $f \in L^2\left(\Delta_k(0,T)\times\mathbb{R}^k\right)$ に対して

$$f^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x}) = \frac{1}{|R_k^{(n)}(\mathbf{i},\mathbf{x})|} \int_{R_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x})} f(\mathbf{s},\mathbf{y})d\mathbf{s}d\mathbf{y}, \quad \mathbf{j} \in D_k^{(n)}(t), \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^k, \mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{x} \tag{4.18}$$

と定義する. また $f \in L^2\left(\Delta_k(0,T)\times\mathbb{R}^k\right)$ に対して $S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f) = S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f^{(n)})$ と書くものとする. Lebsegue の微分定理から $\frac{\mathbf{j}}{n} \to \mathbf{s} \in \Lambda_k(0,t)$, $\frac{\mathbf{x}}{n} \to \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ となるとき

$$f^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x}) = f(\mathbf{s},\mathbf{y}), \quad (\mathbf{s},\mathbf{y})\text{-a.e.}$$

が成り立つ.

さてここで定理 4.5 の証明にうつっていく. 証明は段階をおって行う.

Step 1 $k=1$ で, さらに $[u,v]\times[a,b] \subset [0,t]\times\mathbb{R}$ に対して

$$f(s,x) = 1_A(s,x)$$

とし, $f^{(n)}$ を考える. このとき

$$S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f^{(n)}) \Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{2}}\mathscr{W}(A) = I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta 1_A)$$

証明. 定義に戻ると

$$\left| S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f^{(n)}) - \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \sum_{nu \leqslant i \leqslant nv} \sum_{\substack{\sqrt{n}a \leqslant x \leqslant \sqrt{n}b \\ i \leftrightarrow x}} \tilde{\omega}_n(i,x) \right| \leqslant n^{-\frac{3}{4}} \sum_{\substack{i=nu,nv \\ \text{または } x=\sqrt{n}a,\sqrt{n}b \\ i \leftrightarrow x}} \tilde{\omega}_n(i,x) f^{(n)}(i,x)$$

がわかる. ただし右辺は (4.18) によって生じた誤差の評価で $n \to \infty$ としたときに 0 に $L^2(Q)$-収束することは容易に分かる.

また

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \sum_{nu \leqslant i \leqslant nv} \sum_{\substack{\sqrt{n}a \leqslant x \leqslant \sqrt{n}b \\ i \leftrightarrow x}} \tilde{\omega}_n(i,x)$$

は独立同分布で平均 0, 分散が $\beta^2 + o(1)$ の確率変数の $\dfrac{n^{\frac{3}{2}}(v-u)(b-a)}{2} + O(n)$ 個の和である. よって Lindberg-Feller の定理 (定理 A.1) を適用すると $n \to \infty$ とすると $N(0, 2^{-1}\beta^2(v-u)(b-a))$ へ法則収束する.

□

Step 2 $[0,t] \times \mathbb{R}$ の中の有界な矩形集合で互いに素なもの $A_1, \cdots, A_p$ を考え, それらの定義関数を $f_1, \cdots, f_p$ とする. このとき p-次ベクトルの法則収束

$$\left(S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_1), \cdots, S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_p) \right) \Rightarrow (I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_1), \cdots, I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_p))$$

が成り立つ. 特に任意の線形和

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p$$

に対して

$$S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f) \Rightarrow \alpha_1 I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_1) \cdots + \alpha_p I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_p)$$

となる.

証明. すでに Step 1 で各成分は正規分布に法則収束することは確認した. あとは同時分布を見る必要があるが共分散は集合が互いに素であることから極限の共分散は 0 であることがわかる. また同時分布が法則収束することから線形和に関する法則収束もわかる. □

Step 3 $[0,t] \times \mathbb{R}$ の単関数でその表現として矩形集合に関する定義関数の線形和で表されるものを考える. すなわち, ある矩形集合 $A_1, \cdots, A_l \subset [0,t] \times \mathbb{R}$ と定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(s,x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i 1_{A_i}(s,x), \quad (s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R} \tag{4.19}$$

と書けるものを考える. このような単関数を m 個考え $g_1, \cdots, g_m$ とする. このとき l-次ベクトルの法則収束

$$\left(S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, g_1), \cdots, S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, g_l) \right) \Rightarrow (I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta g_1), \cdots, I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta g_l))$$

が成り立つ.

証明. Cramer-Wold の手法を用いるとよい. すなわちベクトル値確率変数列 $X_n = (X_n^{(1)}, \cdots, X_n^{(k)})$ が $Y = (Y^{(1)}, \cdots, Y^{(k)})$ に法則収束することと任意のベクトル $v \in \mathbb{R}^k$ に対して $v \cdot X_n \Rightarrow v \cdot Y$ が同値であることから従う. □

ここまでで定義 4.2 の可測単関数 (一部) に関する確率積分への収束が言えたことになる.
次は $f \in L^2([0,t] \times \mathbb{R})$ に対して証明する.

Step 4 $f \in L^2([0,t] \times \mathbb{R})$ を考える. このとき

$$S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f) \Rightarrow I(f) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} 2^{-\frac{1}{2}} \beta f(s,x) \mathscr{W}(dsdx)$$

が成り立つ.

証明. $[0,t] \times \mathbb{R}$ の単関数の列 $\{f_m : m \geqslant 1\}$ で f に L^2-収束するものが存在する. 特に各 f_m が (4.19) のような表現を持つものとしてよい. このとき Step 3 から

$$S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_m) \Rightarrow I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}} \beta f_m)$$

が成り立つ. また確率積分の定義から

$$\mathscr{Q}\left[\left|I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_m) - I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f)\right|^2\right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta^2}{2} (f_m(s,x) - f(s,x))^2 dsdx \to 0$$

となる.

$$\begin{array}{ccc} S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_m^{(n)}) & \xrightarrow{n\to\infty} & I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_m) \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle m\to\infty} \\ & & I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f) \end{array}$$

の関係がわかる. また

$$\begin{aligned} Q\left[\left(S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_m) - S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f)\right)^2\right] &= \frac{Q[\tilde{\omega}_n^2(0,0)^2]}{|R_1^{(n)}(0,0)|^2} \sum_{(j,x)\in D_1^{(n)}(t)\tilde{\times}\mathbb{Z}} \frac{(f^{(n)}(j,x) - f_m^{(n)}(j,x))^2}{n^{\frac{3}{2}}} \\ &\leqslant \frac{Q[\tilde{\omega}_n^2(0,0)^2]}{|R_1^{(n)}(0,0)|^2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{(j,x)\in D_1^{(n)}(t)\tilde{\times}\mathbb{Z}} \int_{R_1^{(n)}(i,x)} (f(s,y) - f_m(s,y))^2 dsdy |R_1^{(n)}(i,x)| \\ &\leqslant \frac{Q[\tilde{\omega}_n^2(0,0)^2]}{2} \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} (f(s,y) - f_m(s,y))^2 dsdy \end{aligned}$$

となり,

$$S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_m) \xrightarrow{P} S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f), \quad m \to \infty \tag{4.20}$$

がわかった. 特に (4.20) は n に関して一様に成立することがわかる. すなわち

$$\text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対して, } \overline{\lim_{m\to\infty}} \sup_{n\geqslant 1} Q\left(\left|S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_m) - S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

となる. このとき

$$\begin{array}{ccc} S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f_m) & \xrightarrow{n\to\infty} & I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f_m) \\ {\scriptstyle m\to\infty(\text{一様})}\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle m\to\infty} \\ S_{n,t}^{(1)}(\tilde{\omega}_n, f) & \xrightarrow[(*)]{n\to\infty} & I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}}\beta f) \end{array}$$

で (*) の収束が成立することが知られている (補題 4.3).

□

補題 4.3. ([18, Theorem 3.2]) $\{Y_n^m : n \geqslant 1, m \geqslant 1\}$ を $\mathbb{R}^k$-値の確率変数の族, $\{Y_n : n \geqslant 1\}$, $\{Y^m : m \geqslant 1\}$ を $\mathbb{R}^k$-値確率変数列, Y を $\mathbb{R}^k$-値確率変数とする.

(i) $n \to \infty$ としたとき, $Y_n^m \Rightarrow Y^m$

(ii) $m \to \infty$ としたとき, $Y^m \xrightarrow{P} Y$

(iii) $m \to \infty$ としたとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P(|Y_n^m - Y_n| > \varepsilon) = 0$$

が 成り立つとする. このとき $Y_n \Rightarrow Y$ が成り立つ.

さて, これでようやく $k = 1$ に対して証明が完成した. では次は $k > 1$ の場合である.

Step 5 $k \geqslant 2$ とする. 任意の $f \in L^2(\Lambda_k(0,t) \times \mathbb{R}^k)$ に対して

$$S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f) \Rightarrow I^{(k)}(2^{-\frac{k}{2}} \beta^k f)$$

となる.

証明. まずは $f \in L^2(\Lambda_k(0,t) \times \mathbb{R}^k)$ が, ある $g_1, \cdots, g_k \in L^2([0,t] \times \mathbb{R})$ でそれぞれの台は互いに素であるようなものを用いて

$$f(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = g_1(t_1, x_1) \cdots g_k(t_k, x_k) \tag{4.21}$$

と書ける場合を考える. このとき

$$S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f) = \prod_{i=1}^{k} S_{n,t}^{(n)}(\tilde{\omega}_n, g_i)$$

が成り立つ. [7]

Step 4 より積のそれぞれの項が $I^{(i)}(g_i)$ に法則収束することはわかるが, 共分散が 0 に収束することから同時分布の法則収束もわかるので

$$S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f) \Rightarrow \prod_{i=1}^{k} I^{(1)}(2^{-\frac{1}{2}} \beta g_i) = I^{(k)}(2^{-\frac{k}{2}} \beta^k f)$$

がわかる. また (4.21) のような関数の線形和全体の集合は $L^2(\Lambda_k(0,t) \times \mathbb{R}^k)$ で稠密であることに注意すると Step 4 と同じような議論ができる. □

Step 6 $(f_0, f_1, \cdots) \in \bigotimes_{k=0}^{\infty} L^2\left(\Lambda_k(0,t) \times \mathbb{R}^k\right)$ に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f_k) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} I^{(k)}(2^{-\frac{k}{2}} \beta^k f_k) \tag{4.22}$$

となる.

[7] 正確には誤差項があるが煩雑になるのでここでは省略しておく.

注意 4.12. (4.22) の左辺の級数は $k = nt+1$ 以降は 0 である.

証明. $S_{n,t}^{(k)}$ の有限和に関する弱収束はこれまでの議論によりわかる. また

$$\sum_{k=0}^{M} I^{(k)}(2^{-\frac{k}{2}}\beta^k f_k) \to \sum_{k=0}^{\infty} I^{(k)}(2^{-\frac{k}{2}}\beta^k f_k)$$

が $L^2(\mathcal{Q})$-収束することも定義からわかる. さらに $k \neq l$ ならば

$$Q\left[S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f_k^{(n)}) S_{n,t}^{(l)}(\tilde{\omega}_n, f_l^{(n)})\right] = 0$$

であり $k \geqslant 1$ ならば

$$Q\left[\left(S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, f_k^{(n)})\right)^2\right] \leqslant Q[\tilde{\omega}_n^2]^k \int_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k} |f_k(\mathbf{t},\mathbf{x})|^2 d\mathbf{t}d\mathbf{x}$$

が成り立つので, 補題 4.3 を用いると示される. □

さてこれで $f = (f_0, f_1, \cdots) \in \bigotimes_{k=0}^{\infty} L^2\left(\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k\right)$ に対して, (4.18) によって定義された近似 $f^{(n)}$ に関する (4.17) の和が Wiener-chaos 展開に法則収束することが示された. あとは別の近似に関して成立するかを確かめれば良い. 特に今回は局所極限定理に関する近似について確かめればよい.

Step 7 $\beta_n = \beta n^{\frac{1}{4}}$ とする. このとき任意の $t > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して

$$W_{nt}(\beta_n, \eta) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathscr{Z}_{\sqrt{2}\beta}(t,x)dx$$

$$\frac{\sqrt{nt}}{2} W_{nt,\sqrt{n}x}(\beta_n, \eta) \Rightarrow \mathscr{Z}_{\sqrt{2}\beta}(t,x)$$

証明. ここでは $W_{nt}(\beta_n, \eta)$ の法則収束のみを考える. もう一方も証明方法は同じである.

今,

$$\sum_{k=1}^{nt} S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, 2^k \rho_k(\cdot,\cdot|0,0;t,*))$$

を考えると Step 6 より $\int_{\mathbb{R}} \mathscr{Z}_{\sqrt{2}\beta}(t,x)dx$ に法則収束することがわかる. ただし

$$\rho_k(\mathbf{t},\mathbf{x}|0,0;t,*) = \int_{\mathbb{R}} \rho_k(\mathbf{t},\mathbf{x}|0,0;t,y)dy$$

とする.

また (4.16) より

$$W_{nt}(\beta_n, \eta) = 1 + \sum_{k=1}^{nt} S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, p_k^{(n)})$$

と書ける. ただし

$$p_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left(n^{\frac{1}{2}} p_{j_i - j_{i-1}}(x_{i-1}, x_i)\right), \quad (\mathbf{j},\mathbf{x}) \in D_k^{(n)}(t) \tilde{\times} \mathbb{Z}^k$$

とする. このとき

$$\sum_{k=1}^{nt} \left(S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, 2^k \rho_k(\cdot,\cdot|0,0;t,*)) - S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, p_k^{(n)})\right)$$

を考えると

$$
\begin{aligned}
&Q\left[\left|\sum_{k=1}^{n} S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, 2^k\rho_k(\cdot,\cdot|0,0;t,*)) - S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, p_k^{(n)})\right|^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{nt} Q\left[\left(S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, 2^k\rho_k(\cdot,\cdot|0,0;t,*)) - S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, p_k^{(n)})\right)^2\right] \\
&= \frac{Q[\tilde{\omega}_n^2]^k}{n^{\frac{3k}{2}}} \sum_{k=1}^{nt} \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{x})\in D_k^{(n)}(t)\tilde{\times}\mathbb{Z}^k} \left(2^k\rho_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x}|0,0;t,*) - p_k^{(n)}(\mathbf{j},\mathbf{x})\right)^2 \\
&\leqslant \frac{Q[\tilde{\omega}_n^2]^k}{2} \left\|2^k\rho_k^{(n)}(\cdot,\cdot|0,0;t,*) - p_k^{(n)}(\cdot n, \cdot\sqrt{n})\right\|^2_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k}
\end{aligned}
$$

となる. ただし最後の行では $p_k^{(n)}$ を分割 $\mathscr{R}_k^{(n)}$ の上では定数関数となる $\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k$ の関数と見なしている. ここで $n\to\infty$ とすると

$$
\left\|2^k\rho_k^{(n)}(\cdot,\cdot|0,0;t,*) - p_k^{(n)}(\cdot n, \cdot\sqrt{n})\right\|_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k} \to 0
$$

となることがわかる.[8]

また定数 $C>0$ が存在して任意の $k\geqslant 0$

$$
\sup_{n\geqslant 1}\left\|p_k^{(n)}(\cdot n, \cdot\sqrt{n})\right\|^2_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k} \leqslant C^k \left\|2^k\rho_k^{(n)}(\cdot,\cdot|0,0;t,*)\right\|^2_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k} \tag{4.23}
$$

となることも示される. 特に

$$
\sum_{k\geqslant 1}\beta^{2k}C^k\left\|2^k\rho_k^{(n)}(\cdot,\cdot|0,0;t,*)\right\|^2_{\Lambda_k(0,t)\times\mathbb{R}^k} < \infty \tag{4.24}
$$

が言えるので優収束定理から

$$
Q\left[\left(\sum_{k=1}^{nt}\left(S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, 2^k\rho_k(\cdot,\cdot|0,0;t,*)) - S_{n,t}^{(k)}(\tilde{\omega}_n, p_k^{(n)})\right)\right)^2\right] \to 0
$$

が言えるので示された. □

注意 4.13. (4.23, (4.24)) から $\{W_{tn}(\beta_n,\eta)\}$ は L^2-有界であることがわかる.

注意 4.14. 証明をじっくり読めばわかるが, 結局のところ証明に最も重要な要素は遷移確率に関する局所極限定理が成り立つことである (もちろん他にも要素は多々あるが). Caravenna, Sun, Zygouras らはその点に注目して単純ランダムウォークの場合のみならず $d=1$ 次元で $\frac{X_{[nt]}}{n^{1/\alpha}}$ がパラメータ $\alpha\in(1,2]$ の stable 過程に法則収束するような模型に対して同様の結果を与えている [26]. この場合 $\beta_n = n^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}}$ と選んでいる.

また Corwin, Nica らは単純ランダムウォークの代わりに非衝突ランダムウォークに対して DPRE のような分配関数等を与え, それに対して同じスケーリングで極限を得ている [45].

他にはダイヤモンド格子, またはその一般化である階層格子に対して同様にスケール極限を求めた結果も存在する [31].

4.3 2 次元 DPRE と確率熱方程式

前節では $d=1$ の場合に DPRE は確率熱方程式の "近似"になっていることがわかった. では $d\geqslant 2$ の場合にはどうであろうか. $d=1$ のときとは異なり確率熱方程式 (4.7) は $d\geqslant 2$ のときには連続関数としては存在しない.

[8] オリジナルの論文ではとんでもない議論がなされているが, ここでは述べない. 正しい証明は [26, Theorem 3.8] の証明で与えられている.

Bertini, Cancrini らは $d=2$ のときには [15] のようにホワイトノイズ $\mathscr{W}$ を $\mathscr{W}^{\kappa}$ を空間に関して軟化したものと $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対して次のような確率熱方程式

$$\partial_t u^{\kappa}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u^{\kappa}(t,x) + \beta_{\kappa} u^{\kappa}(t,x)\dot{\mathscr{W}}^{\kappa}(t,x),\ u(0,x) = \phi(x)$$

の解 u^{κ} を考えた. ただし β_{κ} は

$$\beta^{\kappa} = \sqrt{\frac{2\pi}{\log \kappa^{-1}} + \frac{s}{(\log \kappa^{-1})^2}}, \quad s \in \mathbb{R}$$

と書けるものである. このとき Bertini らは任意の $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\langle u^{\kappa}(t,\cdot), \psi \rangle := \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^{\kappa}(t,x)\psi(x)dx \right)$$

の二次モーメントが $\kappa \searrow 0$ としたときに発散しないことを示した. これにより $\langle u^{\kappa}(t,\cdot), \psi \rangle$ は緊密となり弱収束部分列が存在することがわかった. 特に $\langle u^{\kappa}(t,\cdot), \psi \rangle$ の二次メーメントは $\kappa \to 0$ の極限が非自明なもので与えられており, 弱収束極限点には何か面白いものが現れることが期待されていた. ごく最近まで弱収束極限点が自明かどうかはわかっていなかったが, Caravenna, Sun, Zygouras らにより三次モーメントも有界であることを示されたので, 少なくとも弱収束極限点が非自明であることは導かれた [27]. 今後発展していく可能性に期待して注視していく必要がある.

また Chatterjee, Dunlap らは 2 次元トーラス上で (4.1) の $\mathscr{W}$ を $\mathscr{W}^{\kappa}$ で置き換えたものを考え, さらに係数 $\sqrt{D}$ も $\sqrt{D_{\kappa}}$ と置き換えた解 $\tilde{h}^{\kappa}$ を考えたとき $h^{\kappa} := \tilde{h}^{\kappa} - \mathscr{Q}[\tilde{h}^{\kappa}]$ が緊密であることを示している. 彼らはこれを KPZ 方程式の 2 次元での定義にしてはどうかと提唱している [30].

4.4 問題

問題 4.1. 命題 4.1 の証明せよ.

問題 4.2. (4.5) が $L^2(\mathscr{Q})$-コーシー列であることを示せ.

問題 4.3. 命題 4.2 を以下の要領で証明せよ.

(1) $f \in L^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \Omega^{\mathscr{W}}, \mathscr{P})$ に対して $f_n(t,x,\omega) = f(t,x,\omega)1_{|f| \leqslant n, t \leqslant n, |x| \leqslant n}(t,x,\omega)$ と定義する. このとき f_n は $\mathscr{P}$-可測な有界関数で, 各 ω に対して $f_n(\cdot,\cdot,\omega) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の台がコンパクトであり, さらに

$$Q\left[\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} |f_n(t,x,\omega) - f(t,x,\omega)|^2 dtdx \right] \to 0$$

を満たすことを示せ.

(2) 任意の $\mathscr{P}$-可測な有界関数 g で各 ω に対して $g(\cdot,\cdot,\omega) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の台がコンパクトとなるようなものに対して

$$g_n(t,x,\omega) = \sum_{k=1}^{2^n} 1_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}(t) \frac{1}{2^n} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} g(s,x,\omega) ds$$

と定義するとき $g_n \in \mathscr{S}$ であり

$$Q\left[\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} |g_n(t,x,\omega) - g(t,x,\omega)|^2 dtdx \right] \to 0$$

が成り立つことを示せ. (Lebesgue の微分定理を用いる.)

問題 4.4. $A \in \mathscr{B}_f([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ とする. $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \cdots, r_d) \in [0,\infty)^{d+1}$ に対して

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d} 1_A(r_0 t, r_1 x_1, \cdots, r_d x_d)\mathscr{W}(dtdx) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \prod_{i=0}^{d} r_i^{-1/2}\mathscr{W}(A)$$

が成り立つことを示せ. またこれを用いて任意の $f \in L^2(\Lambda_k \times \mathbb{R}^{dk})$ に対して

$$\int_{\Lambda_k}\int_{\mathbb{R}^{dk}} f(r_0\mathbf{t}, \mathbf{r}\mathbf{x})\mathscr{W}^{\otimes k}(d\mathbf{t}d\mathbf{x}) \stackrel{d}{=} \left(\prod_{i=0}^{d} r_i^{-1/2}\right)^k I^{(k)}(f)$$

が成り立つことを示せ.

問題 4.5. $A \in \mathscr{B}_f([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ とする. $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\mathbb{R}\mathbf{b} + A = \{(t, y_1 + tb_1, \cdots, y_d + tb_d) : (t, y_1, \cdots, y_d) \in A\}$$

としたとき

$$\mathscr{W}(\mathbb{R}\mathbf{b} + A) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathscr{W}(A)$$

が成り立つことを示せ.

5 自由エネルギーの高温での挙動

5.1 分数モーメント法と粗視化法

この節では分数モーメント法, 粗視化法, 測度の変換を用いた $F(\beta)$ の上からの評価を与える手法を紹介する. 特に定理 1.6 の $d=1,2$ に対する証明が与えられる.

まずは正則化自由エネルギーの定義 (1.17) を思い出すと

$$F(\beta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Q[\log W_n(\beta,\eta)]$$

であったので任意の $n\in\mathbb{N}$, $\theta\in(0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}F(\beta)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{Nn}Q[\log W_{Nn}(\beta,\eta)]\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{Nn\theta}Q[\log W_{Nn}(\beta,\eta)^\theta]\\&\leqslant\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{Nn\theta}\log Q[W_{Nn}(\beta,\eta)^\theta]\end{aligned}\tag{5.1}$$

が成り立つ. ただし最後の不等式は Jensen の不等式による. よって $\beta>0$ に対してある $n\in\mathbb{N}$, $\theta\in(0,1)$ に対して

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Q[W_{Nn}(\beta,\eta)^\theta]<0$$

が言えたとすると $F(\beta)<0$ となり $0\leqslant\beta_c^{2,+}<\beta$ がわかる. ($\beta_c^{2,-}$ の場合も同様)

以下は $\beta>0$ として議論していく.

ここから先は

$$Q[W_{Nn}(\beta,\eta)^\theta]$$

を上から評価していくことに集中する. まず $\mathbb{Z}^d$ を一辺が長さ $2\sqrt{n}$ のブロック (区間, 正方形, 立方体) に分割する. すなわち

$$K_Z=\prod_{i=1}^d((2z_i-1)\sqrt{n},(2z_i+1)\sqrt{n}]\cap\mathbb{Z}^d,\quad Z=(z_1,\cdots,z_d)\in\mathbb{Z}^d\tag{5.2}$$

とする.

$$W_{Nn}(\beta,\eta)=P[\zeta_{Nn}(\beta,\eta,X)]$$

であるが, 右辺の期待値をランダムウォークが時刻 in $(i=1,\cdots,N)$ で通ったブロックによって分けると

$$W_{Nn}(\beta,\eta)=\sum_{Z_1,\cdots,Z_N\in\mathbb{Z}^d}P[\zeta_{Nn}(\beta,\eta,X):X_{in}\in K_{Z_i},i=1,\cdots,N]$$

と書ける. $\mathbf{Z}=(Z_1,\cdots,Z_N)\in\left(\mathbb{Z}^d\right)^N$ に対して

$$W_{Nn}^{\mathbf{Z}}(\beta,\eta)=P[\zeta_{Nn}(\beta,\eta,X):X_{in}\in K_{Z_i},i=1,\cdots,N]$$

とおくことにする.

ここで $x\geqslant0$, $y\geqslant0$ ならば $(x+y)^\theta\leqslant x^\theta+y^\theta$ が成り立つことを用いると

$$Q[W_{Nn}(\beta,\eta)^\theta]\leqslant\sum_{\mathbf{Z}\in\mathbb{Z}^{dN}}Q\left[W_{Nn}^{\mathbf{Z}}(\beta,\eta)^\theta\right]$$

という評価ができる. 右辺をそのまま評価することは難しいので次のようなものを考える. $1 \leqslant i \leqslant n,\ z \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\sigma[\eta(j,x) : (i-1)n+1 \leqslant j \leqslant in, x \in \mathbb{Z}^d]$-可測な独立同分布な確率変数 $V_n(i,z)$ で

$$Q[V_n(Z_i,\eta)] = 0, Q[V_n(Z_i,\eta)^2] = 1 \tag{5.3}$$

となるようなものを考える.[9]

$L > 0, M > 0$ に対して

$$f_{L,M}(x) = L1\{x \geqslant M\} \quad g_{L,M}(x) = e^{f_{L,M}(x)}$$

という関数を考え,

$$g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta) = \prod_{i=1}^{N} g_{L,M}(V_n(Z_i,\eta))$$

と定義すると Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} Q[W_{Nn}(\beta,\eta)^\theta] &\leqslant \sum_{\mathbf{Z}\in\mathbb{Z}^{dN}} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^\theta \left(g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1} W^{\mathbf{Z}}_{Nn}(\beta,\eta)\right)^\theta\right] \\ &\leqslant \sum_{\mathbf{Z}\in\mathbb{Z}^{dN}} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right]^{1-\theta} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1} W^{\mathbf{Z}}_{Nn}(\beta,\eta)\right]^\theta. \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right] &= Q[g_{L,M}(V_n(Z_1,\eta))^{\frac{\theta}{1-\theta}}]^N \\ &= \left(Q[1 : V_n(Z_1,\eta) < M] + Q\left[e^{\frac{L\theta}{1-\theta}} : V_n(Z_1,\eta) \geqslant M\right]\right)^N \end{aligned}$$

となるので (5.3) より任意の $L > 0$ に対して $M > 0$ を十分大きく取ることで

$$Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right]^{1-\theta} \leqslant 2^N$$

とできる. あとは

$$\sum_{\mathbf{Z}\in\mathbb{Z}^{dN}} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1} W^{\mathbf{Z}}_{Nn}(\beta,\eta)\right]^\theta \leqslant \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^N \tag{5.4}$$

となるような $\varepsilon \in (0,1)$ が存在するかどうかである. 左辺を評価するために

$$\begin{aligned} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1} W^{\mathbf{Z}}_{Nn}(\beta,\eta)\right] &= Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1} P[\zeta_{Nn}(\beta,\eta,X) : X_{in} \in K_{Z_i}, i = 1,\cdots,N]\right] \\ &= P\left[Q\left[\zeta_{Nn}(\beta,\eta,X) g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1}\right] : X_{in} \in K_{Z_i}, i = 1,\cdots,N\right] \\ &= P\left[Q_X\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1}\right] : X_{in} \in K_{Z_i}, i = 1,\cdots,N\right] \end{aligned}$$

と書く. ただし Q_X は補題 1.1 の証明で考えた $(\overline{\Omega},\mathscr{G})$ 上の確率測度.[10] ランダムウォークのマルコフ性を用いると

$$P\left[Q_X\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1}\right] : X_{in} \in K_{Z_i}, i = 1,\cdots,N\right] \leqslant \prod_{i=1}^{N} \max_{x\in K_{Z_{i-1}}} P^x\left[Q_X\left[g_{L,M}(V_n(Z_i,\eta))^{-1}\right] : X_n \in K_{Z_i}\right]$$

---

[9] $V_n(Z_i,\eta)$ の選び方は d によって変えることになる. また (5.3) も V_n の緊密性に置き換えてよい.

[10] 定理 2.3 と問題 2.1 で考えた siza-biased ランダム媒質を用いると

$$P\left[Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta^\beta_X)^{-1}\right] : X_{in} \in K_{Z_i}, i = 1,\cdots,N\right]$$

と書ける.

となり[11] η のシフト普遍性から

$$\sum_{\mathbf{Z}\in\mathbb{Z}^{dN}} Q\left[g_{\mathbf{Z}}(n,N,\eta)^{-1}W_{Nn}^{\mathbf{Z}}(\beta,\eta)\right]^{\theta} \leqslant \sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\max_{x\in K_0} P^x\left[Q_X\left[g_{L,M}(V_n(Z_i,\eta))^{-1}\right]:X_n\in K_z\right]^{\theta N}$$

が導けた. あとは

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\max_{x\in K_0} P^x\left[Q_X\left[g_{L,M}(V_n(Z_i,\eta))^{-1}\right]:X_n\in K_z\right]^{\theta} < \frac{1-\varepsilon}{2}$$

となるかどうかである. 構成から $g_{L,M}^{-1}\leqslant 1$ であることに注意すると単純ランダムウォークの性質 (局所極限定理等) から, ある $R>0$ が存在して

$$\sum_{|z|>R}\max_{x\in K_0} P^x\left[Q_X\left[g_{L,M}(V_n(Z_i,\eta))^{-1}\right]:X_n\in K_z\right]^{\theta} \leqslant \sum_{|z|>R}\max_{x\in K_0} P^x(X_n\in K_z)^{\theta} < \varepsilon$$

とできる. 残すは

$$\sum_{|z|\leqslant R}\max_{x\in K_0} P^x\left[Q_X\left[g_{L,M}(V_n(Z_i,\eta))^{-1}\right]:X_n\in K_z\right]^{\theta} \leqslant 1-2\varepsilon$$

となるかである. 突き詰めれば

$$\max_{x\in K_0} P^x Q_X\left(V_n(Z_i,\eta)>M\right)\to 1$$

となればよいのである.

ここまでの考察をまとめると次のようになる.

補題 5.1. (1) $n\in\mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Z}^d$ を一辺の長さが $2\sqrt{n}$ のブロック $\{K_z^{(n)}:z\in\mathbb{Z}^d\}$ に分割する (5.2).

(2) $\mathscr{G}_n$-可測で平行移動不変な確率変数 $V_n(\eta)$ で次の条件を満たすものが存在するとする.

- $\{V_n(\eta):n\in\mathbb{N}\}$ は Q の下で緊密である.
- 任意の $M>0$ に対して $n\to\infty$ としたとき $\max_{x\in K_0}P^xQ_X(V_n(\eta)>M)\to 1$.

このとき $F(\beta)<0$ である.

定理 1.3, 定理 1.6 の $d=1,2$ の証明は β も β_n に依存して 0 に近づけている.

命題 2.2 より PQ_X の下で $W_n(\beta,\eta)$ は発散することがわかっているので $d\geqslant 3$ のときの予想 1, 2 を考えるときには

$$\begin{aligned}V_n(\eta) &= \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{x\in K_0}W_n^x(\beta,\eta)\\ &= \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{x\in K_0}P^x\left[\zeta_n(\beta,\eta)\right]\end{aligned}$$

とおくことで何かが言えそうである. (open problem!!)

上の議論で (5.1) で $n\in\mathbb{N}$, $\theta\in(0,1)$ を固定すると

$$nF(\beta)\leqslant \varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\theta}\log Q\left[W_{Nn}(\beta,\eta)^{\theta}\right]$$

が成り立つことがわかる. ここで $\beta_c^{2,+}=0$ を言うためにより強い結果である次のことが言える.

以下, 5 章では定理 1.6 の証明を与えていく. またこの章の残りでは (仮定 A) に加えて次のことを仮定する.

$$Q[\eta(n,x)^2]=1,$$

[11] ここで $x\in K_{Z_{i-1}}$ は $(i-1)n-|x|\in 2\mathbb{Z}$ となるようなものについてのみ考えている. 他の場合も同様である.

5.2 $d=2$

この節では定理 1.6 の証明を $d=2$ の場合に与えていく.
より詳しくは次のことが知られている.

定理 5.1. ([55, 65, 12]) $d=2$ とする. このとき $\beta \to 0$ としたとき

$$\log|F(\beta)| \sim -\frac{\pi}{\beta^2}$$

この定理の証明は主に 2 つのことを行う.

(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $n=\exp\left((1+\varepsilon)\dfrac{\pi}{\beta_n^2}\right)$ となるような $\beta_n>0$ を考え

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}F(\beta_n)<0$$

を示す.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $n=\exp\left((1-\varepsilon)\dfrac{\pi}{\beta_n^2}\right)$ としたとき, (1.19) より

$$nF(\beta_n)\geqslant Q[\log W_n(\beta_n)] \tag{5.5}$$

が成り立つ. この右辺が $-C(\log n)^2$ となることを示す.

特に (1) の証明には前節で用いた手法を適用する. そのためには補題 5.1(2) を満たすような V_n を見つければよいことがわかる.
では、どのような V_n がよいのか. 候補として考えられるのが

$$\frac{1}{2n}\sum_{x\in K_0}W_n^z(\beta,\eta)$$

である.
これが補題 5.1(2) の緊密性を満たすことは L^1-有界性から従う. 後半の条件は非常に雑に言うと命題 2.2 と (1.10) から P^xQ_X の下で $W_n^x(\beta,\eta)$ が発散することから想像できる. 原稿作成時点ではこのように V_n を選んで証明することには成功していないが, [55, 65, 12] における証明のアイデアはここから来ていると考えられる.
ここでは [65] における証明の概要を与える.
まず次のことに注目する.

補題 5.2. $0<\gamma<1$ に対して $\gamma_n=\gamma\sqrt{\frac{\pi}{\log n}}$ とする. このとき $Q\left[W_n(\gamma_n,\eta)^2\right]<\infty$ である.

この補題は補題 2.1 を適用すると

$$Q\left[W_n(\gamma_n,\eta)^2\right]=P_{X,\hat{X}}\left[\exp\left(\left(\lambda\left(2\gamma\sqrt{\frac{\pi}{\log n}}\right)-2\lambda\left(\gamma\sqrt{\frac{\pi}{\log n}}\right)\right)L_n(X,\hat{X})\right)\right]$$

となるが, 2 次元単純ランダムウォークに対して $\frac{L_n(X,\hat{X})}{\log n}\Rightarrow \mathrm{Exp}(\pi)$ が成り立つ [49] ことと,

$$\log n\left(\lambda\left(2\gamma\sqrt{\frac{\pi}{\log n}}\right)-2\lambda\left(\gamma\sqrt{\frac{\pi}{\log n}}\right)\right)\to\gamma^2\pi$$

であることから予想することはできる. (実際には定理 4.5 のようにランダムウォークの局所極限定理を用いて具体的に評価していく必要がある.)

またさらに実際に $W_n(\gamma_n,\eta)$ が弱収束極限を持つことが示されている.

定理 5.2. ([27]) $\gamma>0$ に対して $\gamma_n=\gamma\sqrt{\frac{\pi}{\log n}}$ とする. このとき

$$W_n(\gamma_n,\eta)\Rightarrow W_\gamma=\begin{cases}\exp\left(\sigma_\gamma B-\dfrac{\sigma_\gamma^2}{2}\right), & \gamma\in(0,1)\\ 0, & \gamma\geqslant 1\end{cases}$$

が成り立つ. ただし $\sigma_\gamma^2=\log\frac{1}{1-\gamma^2}$, B は標準正規分布に従う確率変数とする.

注意 5.1. この定理を用いれば (5.5) より強いことが言えそうに思えるが, 実際には一様可積分性などの問題がある.

定理 5.1 の証明では

$$\frac{1}{2n}\sum_{x\in K_0}W_n^x(\gamma_n,\eta)$$

に対して補題 5.1 は確認していない. その代わりに定理 4.5 の証明のように展開

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{z\in K_0}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\sum_{x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{Z}^2}\prod_{i=1}^{k}\omega_n(j_i,x_i)p_{j_i-j_{i-1}}(x_i-x_{i-1})\\ &=:\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}A_n^{(k)}(\eta)\end{aligned}$$

を考え,

$$V_n(\eta)=\frac{\sqrt{\log n}}{2n}A_n^{(k)}\tag{5.6}$$

と設定することで上からの評価が得られる.

[55] では $A_n^{(2)}$, [65] では任意の $k\geqslant 2$ に対して $A_n^{(k)}$, [12] では $A_n^{(\log\log n)}$ に注目して補題 5.1 を確認している. ただし ω_n や p は 2 次元の設定に合わせて適当に定義し直している. またこのとき

$$\beta_n=C(\log n)^{-\frac{k-1}{2k}}$$

と選んでいる.

注意 5.2. [55] では $d=1$ のときも上のような展開を考えることで自由エネルギーの評価を与えている. ただし $d=1$ のときは実は $k=1$ の場合で問題ない.

注意 5.3. (5.6) で $\sqrt{\log n}$ をかける理由は計算してみるとわかるが各 $k\geqslant 1$ に対して $Q[(A_n^{(k)})^2]=O((\log n)^{-1})$ となってしまうからである. これは主に d 次元のランダムウォークでは

$$\sum_{i=1}^{n}P_{X,\hat{X}}^{0,0}(X_i=\hat{X}_i)=\begin{cases}O(n^{\frac12}), & d=1\\ O(\log n), & d=2\\ O(1), & d\geqslant 3\end{cases},\qquad \frac{1}{n^{\frac d2}}\sum_{|z|\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}P_{X,\hat{X}}^{0,z}(X_i=\hat{X}_i)=O(n^{1-\frac d2})$$

が成り立つことに起因する.

5.3 $d = 1$

この節では定理 1.6 の証明を $d = 1$ の場合に与えていく. すでに 3.2.2 節で証明は与えられているのでより詳しい結果を与える.

定理 5.3. ([55, 7]) ある定数 $C \in (0,\infty)$ とある $\beta_0 > 0$ が存在して, $0 < \beta < \beta_0$ ならば

$$-\frac{1}{C} \leqslant \frac{F(\beta)}{\beta^4} \leqslant -C$$

仮定を強めることでより詳細な挙動がつかめる. そのために次のような仮定を η に与える.

仮定: 自由次元集中不等式
ある非減少関数 $g : (0,\infty) \to [0,\infty)$ で以下のようなものが存在する.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty g(t)dt < \infty.$

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の微分可能な凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して

$$Q(f(\eta) < a - t)Q(f(\eta) > a, |\nabla f(\eta)| \leqslant c) \leqslant g\left(\frac{t}{c}\right), \quad a \in \mathbb{R}, t, c \in (0,\infty) \tag{5.7}$$

が成り立つ. ただし $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ は $\mathbb{R}^n$-値確率変数で $\{\eta_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ は独立同分布で $Q(\eta_1 \in dx) = Q(\eta(0,0) \in dx)$ とする.

注意 5.4. このような仮定はどの程度一般的なのかは知識不足ゆえにわからないが次のような仮定の下では $g(t) = c_1 \exp\left(-\frac{|t|^\gamma}{c_2}\right)$ の形で成り立つことが知られている. ただし $c_1, c_2, \gamma > 0$ とする.

- $\gamma = 2$. η_1 が有界のとき.
- $\gamma = 2$. η_1 が log-Sobolev の不等式を満たすとき. 特に正規分布や $U(x) - cx^2$ が凸で, かつ $V(x)$ が有界となる関数 U, V が存在して η_1 の密度関数が e^{-U-V} に絶対連続な場合.
- $\gamma \in [1,2)$. η_1 の密度関数が $c_\gamma e^{-|x|^\gamma}$ に関して絶対連続な場合.

上で与えている仮定はもっと広いクラスの g について考えている.

定理 5.4. ([66]) $d = 1$ とする. また自由次元集中不等式に関する仮定を満たすとする. このとき

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{F(\beta)}{\beta^4} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathcal{Q}\left[\log \int_{\mathbb{R}} \mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(T,x)dx\right] = -\frac{\sqrt{2}^4}{24}$$

右辺の $-\frac{\sqrt{2}^4}{24} = -\frac{1}{6}$ は定理 4.4 と定理 4.3(3) の組み合わせから導出される値であるが直接導ける結果ではないことに留意しておく.

ここで 1 つ目の等号が成り立つのかの直感的な説明を与えておこう. $\beta_n = n^{-\frac{1}{4}}$ としたとき自由エネルギーの定義から

$$F(\beta_n) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{Tn} Q[\log W_{Tn}(\beta_n, \eta)]$$

が成り立つ. 両辺に $n=\beta_n^{-4}$ をかけて, さらに n について極限をとると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(\beta_n)}{\beta_n^4}=\lim_{n\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}Q\left[\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)\right]$$

となる. "もし"n と T に関する極限が交換でき, $\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)$ が n について一様可積分であったならば定理 4.5 から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(\beta_n)}{\beta_n^4}=\lim_{T\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}Q\left[\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathscr{Q}\left[\log\int_{\mathbb{R}}\mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(T,x)dx\right]$$

となるのである. つまり上の定理は極限の交換可能性といういたって初等的な問題を扱っているのである.

さて, この節の残りでは講義ノートの主題でもある定理 5.4 の証明を与えていく.

証明は主に

- (下極限) $\displaystyle\varliminf_{\beta\to 0}\frac{F(\beta^4)}{\beta^4}\geqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathscr{Q}\left[\log\int_{\mathbb{R}}\mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(T,x)dx\right]$
- (上極限) $\displaystyle\varlimsup_{\beta\to 0}\frac{F(\beta^4)}{\beta^4}\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathscr{Q}\left[\log\int_{\mathbb{R}}\mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(T,x)dx\right]$
- (極限の値) $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathscr{Q}\left[\log\int_{\mathbb{R}}\mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(T,x)dx\right]=-\frac{1}{6}$

の 3 点を示すことである.

以降は簡単のために

$$\mathscr{Z}_{t,x}:=\mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(t,x),\quad \mathscr{Z}_t:=\int_{\mathbb{R}}\mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(t,x)dx,\quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

と書くことにする.

5.3.1 定理 5.4 の証明: 下極限

まずは比較的簡単な下極限の評価から与えていこう. なぜ簡単かと言うと (1.13) から任意の $T>0, n\in\mathbb{N}$ に対して

$$F(\beta_n)\geqslant\frac{1}{Tn}Q[\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)]$$

が成り立つので

$$\beta_n^{-4}F(\beta_n)\geqslant\frac{1}{T}Q[\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)]$$

となるので, $\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta):n\geqslant 1\}$ が一様可積分であったならば

$$\varliminf_{n\to\infty}\beta_n^{-4}F(\beta_n)\geqslant\frac{1}{T}\mathscr{Q}\left[\log\mathscr{Z}_T\right]$$

となり, $T\to\infty$ とすればよい. つまり下極限の評価は $\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta):n\geqslant 1\}$ の一様可積分性を確かめればよいのである. この一様可積分性を示すために自由次元集中不等式を仮定している.

$\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta):n\geqslant 1\}$ の一様可積分性の証明. まず注意 4.13 より $\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)\vee 0:n\geqslant 1\}$ は一様可積分であることが従う. よって問題は $\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)\wedge 0:n\geqslant 1\}$ の一様可積分性である.

$f(\eta)=\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)$ に対して自由次元集中不等式を適用してみよう. 実際 f は $\mathbb{R}^{\{1,\cdots,Tn\}\times\{-Tn,\cdots,Tn\}}$ 上の関数として, 微分可能な凸関数である (問題 5.1). よって (5.7) が適用でできる. つまり任意の

$$Q(\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)<a-t)\leqslant Q(\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)>a,,|\nabla\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)|\leqslant c)^{-1}g\left(\frac{t}{c}\right),a\in\mathbb{R},t,c\in(0,\infty)$$

が成り立つ. $\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)\wedge 0 : n\geqslant 1\}$ の一様可積分性とは

$$\overline{\lim_{M\to\infty}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_M^\infty Q(-\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)>t)dt=0$$

のことであるが, これを確認するためには適当な $a\in\mathbb{R}$ と $c\in(0,\infty)$ に対して

$$Q(\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)>a, |\nabla\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)|\leqslant c)^{-1}$$

が有界であることを示せば十分である.

まず簡単な計算で次のことがわかる.

$$|\nabla\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)|^2=\beta_n^2\mathscr{R}_{Tn}^{\beta_n}.$$

ただし $\mathscr{R}_n^{\beta_n}$ は $\beta=\beta_n$ のときに (3.1) で定義された確率変数である (問題 5.1).

ここで定数 $C_1>0$ に対して

$$A_n=\{\log W_{Tn}(\beta_n,\eta)\geqslant -\log 2\}\cap\{\beta_n^2\mathscr{R}_n^{\beta_n}\leqslant C_1\}=A_n^{(1)}\cap A_n^{(2)}$$

としたとき

$$\begin{aligned}
Q(A_n)&=Q(A_n^{(1)})-Q(A_n^{(1)}\backslash A_n^{(2)})\\
&\geqslant Q(A_n^{(1)})-Q\left(P_{X,X'}\left[\beta_n^2L_{Tn}(X,X')\zeta_{Tn}(\beta_n,\eta,X)\zeta_{Tn}(\beta_n,\eta,X')\right]>\frac{C_1}{4}\right)\\
&\geqslant Q(A_n^{(1)})-\frac{4}{C_1}Q\left[P_{X,X'}\left[\beta_n^2L_{Tn}(X,X')\zeta_{Tn}(\beta_n,\eta,X)\zeta_{Tn}(\beta_n,\eta,X')\right]\right]
\end{aligned}$$

となる. 特に $Q[W_{Tn}(\beta_n,\eta)]=1$ であるので Payley-Zygmund の不等式から

$$Q(A_n^{(1)})\geqslant\frac{1}{4}\frac{1}{Q[W_{Tn}(\beta_n,\eta)^2]}$$

が得られる. 特に注意 4.13 からある定数 $C_2>0$ が存在して

$$Q(A_n^{(1)})\geqslant\frac{1}{4C_2}$$

とできる. また似たような議論を行うことで

$$\begin{aligned}
&Q\left[P_{X,X'}\left[\beta_n^2L_{Tn}(X,X')\zeta_{Tn}(\beta_n,\eta,X)\zeta_{Tn}(\beta_n,\eta,X')\right]\right]\\
&=P_{X,X'}\left[\beta_n^2L_{Tn}(X,X')\exp\left((\lambda(2\beta_n)-2\lambda(\beta_n))L_{Tn}(X,X')\right)\right]<C_3
\end{aligned}\tag{5.8}$$

とすることができる (問題 5.2) ので

$$Q(A_n)\geqslant\frac{1}{4C_2}-\frac{4C_3}{C_1}$$

となる. ここで $C_1>0$ を十分大きくとることができるので証明できた.

□

注意 5.5. この下極限の評価では $\{\log W_{Tn}(\beta_n) : n\geqslant 1\}$ の一様可積分性を確かめた. しかし同様の手法で $\left\{\log\sqrt{n}W_{Tn,x\sqrt{n}} : n\geqslant 1\right\}$ の一様可積分性なども確かめられる. 特に η を標準正規分布と取ることで $\mathscr{Z}_T$ や $\mathscr{Z}_{T,x}$ などの可積分性に対して次のことを示すことができる.

定理 5.5. ([63]) 任意の $p>0$ に対して, ある局所有界で 局所的に 0 から一様に離れている関数 $\kappa_p(t,x)>0$ が存在し,

$$\mathcal{Q}\left[\mathscr{Z}_{t,x}^{-p}\right] \leqslant \kappa_p(t,x)\exp\left(\frac{p^2}{\kappa_p(t,x)}\right), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

が成り立つ.

また

$$\mathcal{Q}(\text{ ある } t>0, x\in\mathbb{R} \text{ に対して } \mathscr{Z}_{t,x}>0)=0$$

が成り立つ.

5.3.2 定理 5.4 の証明: 上極限

次は上極限の評価を与えていく. これは厳密に書くと非常に長くなるので, 主な証明の流れを追っていくことにする. (いくつかの面倒な補題の証明は省略する.)

基本的には 5.1 で扱った分数モーメント法と粗視化法と似たことを行う. とにかく log の期待値なんてものは扱いづらいことこの上ないので, まずはまだ扱いやすい分数モーメントの期待値で上から評価していく.

以下, $\beta_n=n^{-\frac{1}{4}}$ とする. このとき任意の $\theta\in(0,1)$, $T,N\in\mathbb{N}$ に対して Jensen の不等式により

$$\begin{aligned}\frac{1}{NT}Q\left[\log W_{NTn}(\beta_n)\right] &= \frac{1}{\theta NT}Q\left[\log W_{NTn}(\beta_n)^{\theta}\right]\\ &\leqslant \frac{1}{\theta NT}\log Q\left[W_{NTn}(\beta_n)^{\theta}\right]\end{aligned}$$

となるので自由エネルギーの定義から

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\beta_n^4}F(\beta_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{\theta TN}\log Q\left[W_{NTn}(\beta_n)^{\theta}\right].$$

さらに $T\to\infty$, $\theta\to 0$ とすると

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\beta_n^4}F(\beta_n)\leqslant\varlimsup_{\theta\to 0}\varlimsup_{T\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{\theta TN}\log Q\left[W_{NTn}(\beta_n)^{\theta}\right] \tag{5.9}$$

となる. (ここで (5.1) よりも極限をとるパラメータが増えている. なぜこのようにするのかも述べておこう.)

5.1 節のように空間 $\mathbb{Z}$ を長さ $2\sqrt{n}$ の互いに素な区間に分割する. つまり

$$K_Z=((2z-1)\sqrt{n},(2z+1)\sqrt{n}]\cap\mathbb{Z}, \quad z\in\mathbb{Z}$$

とする. このとき, 定義を思い出してみると

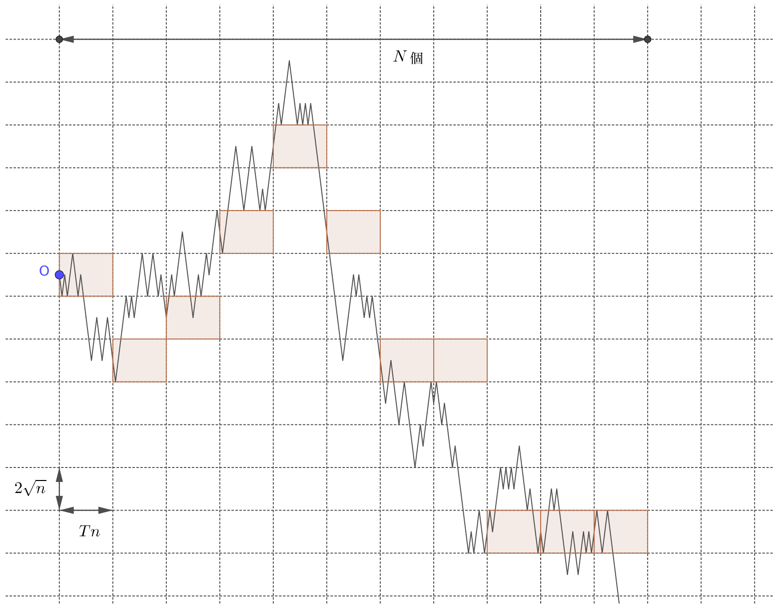
$$W_{NTn}(\beta_n)=P_X\left[\zeta_{NTn}(\beta_n,X)\right]$$

であったが, このランダムウォークに関する平均を各 iTn $(i=1,\cdots,N-1)$ で通過する区間によって場合分けをして和を考えると

$$W_{NTn}(\beta_n)=\sum_{Z=(z_1,\cdots,z_{N-1})}P_X\left[\zeta_{NTn}(\beta_n,X):X_{iTn}\in K_{z_i}, i=1,\cdots,N-1\right]$$

とすることができる. このとき $x,y\geqslant 0$, $\theta\in(0,1)$ ならば $(x+y)^{\theta}\leqslant x^{\theta}+y^{\theta}$ が成り立つので

$$Q\left[W_{NTn}(\beta_n)^{\theta}\right]\leqslant\sum_{Z}Q\left[W_Z(NTn,\beta_n)^{\theta}\right]$$



とできる.

****

非常に雑な話をしてしまうとこのような経路 Z はほとんどが "良い経路"であり, それら Z に関しては

$$Q\left[W_Z(NTn,\beta_n)^\theta\right] \leqslant Q[W_{Tn}(\beta_n)^\theta]^N$$

が期待される. もし "良い経路"だけに注目すればよいとし, さらにそのような経路が T^{2N} 程度しかないすると (5.9) の右辺の N に関する上極限を取り払うことができる. つまり定理 4.5 と合わせると

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\beta_n^4}F(\beta_n) &\leqslant \varlimsup_{\theta\to 0}\varlimsup_{T\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\theta T}\log T^2 Q\left[W_{Tn}(\beta_n)^\theta\right]\\ &= \varlimsup_{\theta\to 0}\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T\theta}\log \mathscr{Q}[\mathscr{Z}_T^\theta]\end{aligned}$$

となる. この右辺を計算する必要があるが, これは実は DPRE の自由エネルギーを求めた時と似た方法で計算することができるのである.

当然だが上の議論はすべて雑な話であるが, とりあえず N に関する極限を処理するために何か N 個の積を無理やり導出し, また n に関する極限は定理 4.5 を用いて処理することで $\mathscr{Z}_T$ に関する話に帰着させるのである.

****

では実際に証明を与えていこう. (とりあえず N 個の積を出す. そのために)Markov 性と環境の shift 普遍性より

$$\begin{aligned}Q\left[W_Z(NTn,\beta_n)^\theta\right] &\leqslant Q\left[\prod_{i=0}^{N-1}\max_{x\in K_{z_i}}P_X^x\left[\theta_{iTn,0}\circ\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_{z_{i+1}}\right]^\theta\right]\\ &= \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}}Q\left[\max_{x\in K_0}P_X^x\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]\right)^N\end{aligned}$$

となるので, これ以降は

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}}Q\left[\max_{x\in K_0}P_X^x\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]$$

を評価していく. (n, T, θ に関する極限を処理していく.) ここで

$$\begin{aligned}
&\sum_{z\in\mathbb{Z}} Q\left[\max_{x\in K_0} P_X^x\left[\theta_{0,x}\circ\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]\\
&\leqslant \sum_{|z|>T^2} Q\left[\max_{x\in K_0} P_X^x\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]+\sum_{|z|\leqslant T^2} Q\left[\max_{x\in K_0} P_X^x\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]\\
&\leqslant \sum_{|z|>T^2} Q\left[\max_{x\in K_0} P_X^x\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]+2T^2 Q\left[\max_{x\in K_0} W_{Tn,x}(\beta_n)^\theta\right]
\end{aligned}$$

と分解する. (T を固定するごとに後者の和はたかだか有限和であるので定理 4.5 を適用しやすい. さらに期待されることは前者の和が n に関して一様に e^{-cT^3} の速さで 0 に収束する)

ここで次の補題が成立する.

補題 5.3.

$$\lim_{n\to\infty} Q\left[\max_{x\in K_0} W_{Tn,x}(\beta_n)^\theta\right]\to\mathcal{Q}\left[\sup_{x\in[-1,1]}(\mathscr{Z}_T^x)^\theta\right]$$

補題 5.4. 定数 $C_{\theta,1}>0, C_{\theta,2}>0$ が存在して, 任意の $n\geqslant 1$, $T\geqslant 1$ に対して

$$\sum_{|z|>T^2} Q\left[\max_{x\in K_0} P_X^x\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^\theta\right]\leqslant C_{\theta,1}\exp\left(-C_{\theta,2}T^3\right)$$

が成り立つ.

注意 5.6. 補題 5.3, 5.4 は Q による平均の中に max が入っているせいで手間がかかってしまうが, もし max がなければ容易に導くことができる. (問題 5.3, 問題 5.4)

これらを用いると

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\beta_n^4}F(\beta_n)\leqslant\frac{1}{\theta T}\log\left(C_{\theta,1}\exp\left(-C_{\theta,2}T^3\right)+2T^2\mathcal{Q}\left[\sup_{x\in[-1,1]}(\mathscr{Z}_T^x)^\theta\right]\right)$$

となる.

最後に

$$\overline{\lim_{\theta\to\infty}}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{\theta T}\log\mathcal{Q}\left[\sup_{x\in[-1,1]}(\mathscr{Z}_T^x)^\theta\right]\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathcal{Q}\left[\log\mathscr{Z}_T\right]\tag{5.10}$$

を示せば, 求めたかった上極限が得られるのである.

□

(5.10) はまったくもって自明ではない. このノートでは次の補題の証明を与えよう.

補題 5.5.

$$\overline{\lim_{\theta\to\infty}}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{\theta T}\log\mathcal{Q}\left[(\mathscr{Z}_T)^\theta\right]\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathcal{Q}\left[\log\mathscr{Z}_T\right]$$

注意 5.7. 右辺の極限が存在することも証明する必要がある. (問題 5.5)

注意 5.8. 証明は第 1.4 で与えた (1.14), (1.21) の証明の類似である.

証明. $T \in \mathbb{N}$ として次を示す. ある定数 $K > 0$ が存在して

$$\mathscr{Q}\left[\exp\left(\theta\left(\log \mathscr{Z}_T - \mathscr{Q}\left[\log \mathscr{Z}_T\right]\right)\right)\right] \leqslant \exp\left(\frac{T\theta^2 K}{1-|\theta|}\right), \quad |\theta| < 1 \tag{5.11}$$

(5.11) が示されると補題の主張はすぐに従う.

$$\mathscr{F}_i^{\mathscr{W}} = \sigma\left[\mathscr{W}(t,x) : 0 \leqslant t \leqslant i, x \in \mathbb{R}\right]$$

とする. ($\mathscr{F}^{\mathscr{W}}$ はフィルトレーションである.)

このとき

$$\begin{aligned}\log \mathscr{Z}_T - \mathscr{Q}\left[\log \mathscr{Z}_T\right] &= \sum_{i=1}^{T} \mathscr{Q}\left[\log \mathscr{Z}_T | \mathscr{F}_i^{\mathscr{W}}\right] - \mathscr{Q}\left[\log \mathscr{Z}_T | \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{T} V_i^T\end{aligned}$$

と表す. ここで

$$\hat{\mathscr{Z}}_T(i) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{Z}_{i-1,x}\rho_1(x,y)\mathscr{Z}_T^{i,y}\,dxdy, \quad i \geqslant 0 \leqslant i \leqslant T$$

という確率変数列を考える. ただし $(s,x),(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{Z}_{t,y}^{s,x} = \mathscr{Z}_{\sqrt{2}}(s,x;t,y), \quad \mathscr{Z}_t^{s,x} = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{Z}_{t,y}^{s,x}\,dy$$

とする. このとき定理 4.3(6) から

$$\mathscr{Q}\left[\log \hat{\mathscr{Z}}_T(i) | \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right] = \mathscr{Q}\left[\log \hat{\mathscr{Z}}_T(i) | \mathscr{F}_i^{\mathscr{W}}\right]$$

が成り立つので

$$V_i^T = \mathscr{Q}\left[\log \frac{\mathscr{Z}_T}{\hat{\mathscr{Z}}_T(i)}\middle| \mathscr{F}_i^{\mathscr{W}}\right] - \mathscr{Q}\left[\log \frac{\mathscr{Z}_T}{\hat{\mathscr{Z}}_T(i)}\middle| \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right]$$

となる. ここで $\mathbb{R}^2$ 上の確率測度

$$\mu_T^i(x,y)dxdy = \frac{1}{\hat{\mathscr{Z}}_T(i)} \mathscr{Z}_{i-1,x}\rho_1(x,y)\mathscr{Z}_T^{i,y}\,dxdy$$

で定義すると, 定理 4.3(1), (2), (6), (7) より

$$\frac{\mathscr{Z}_T}{\hat{\mathscr{Z}}_T(i)} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathscr{Z}_{i,y}^{i-1,x}}{\rho_1(x,y)} \mu_T^i(x,y)dxdy, \quad \mathscr{Q}\left[\frac{\mathscr{Z}_T}{\hat{\mathscr{Z}}_T(i)}\middle| \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right] = 1$$

が成り立つ. Jensen の不等式, 定理 5.5, 定理 4.3(5) から, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\mathscr{Q}\left[\exp\left(|V_i^T|\right) | \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right] \leqslant C \tag{5.12}$$

とできる (問題 5.6). よって定理 1.8 の仮定が満たされたので示された.

□

補題 5.3, 補題 5.4 の証明は与えないが補遺 A.4 で述べられていることを用いると $\max_{x \in K_0} X_x$ といった確率変数のモーメントを (計算は大変だが) 容易に評価できるのである.

(5.10) の証明にも補遺 A.4 の内容を用いるが, ここが一番の難点である. 補題 5.3, 補題 5.4 の証明では結局 $W_{\beta_n}(\beta_n)$ のモーメントを評価すればよいが, (5.10) の証明にそのまま適用しようとすると, $\theta \in (0,1)$ に対して

$$\mathscr{Q}\left[\sup_{x\in[-1,1]} (\mathscr{Z}_T^x)^\theta\right] \leqslant \mathscr{Q}\left[\mathscr{Z}_T^\theta\right] + \mathscr{Q}\left[\sup_{x,y\in[-1,1]} \left|\mathscr{Z}_T^x - \mathscr{Z}_T^y\right|^\theta\right]$$

となる. よって $\mathscr{Q}\left[\sup_{x,y\in[-1,1]} \left|\mathscr{Z}_T^x - \mathscr{Z}_T^y\right|^\theta\right]$ を評価できれば良いことはわかる. その結果, どこかで

$$\mathscr{Q}\left[\left|\mathscr{Z}_T^x - \mathscr{Z}_T^y\right|^p\right], \quad p \geqslant 2$$

を計算することになる. しかし定数 $C>0$ が存在して

$$\mathscr{Q}\left[\left|\mathscr{Z}_T^x - \mathscr{Z}_T^y\right|^2\right] \leqslant C \sum_{n\geqslant 1} \frac{|x-y| T^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

となることがわかる. 特に右辺は T に関して指数の速さで発散してしまうのである. つまり最初に $\mathscr{Z}_T$ の $p(\geqslant 2)$ 次のモーメントを用いることを諦めなけらばいけない. ではどうするかというと

$$\mathscr{Z}_T^x = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{Z}_{1,y}^x \mathscr{Z}_T^{1,y} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathscr{Z}_{1,y}^x}{\rho_1(y)} \mathscr{Z}_T^{1,y} \rho_1(y) dy$$

として $\dfrac{\mathscr{Z}_{1,y}^x}{\rho_1(y)}$ に対して補題 A.2 を適用することで解決することができる (あとはハードな計算である).

5.3.3 定理 5.4 の証明: 極限の値

最後は極限の値が実際に $-\frac{1}{6}$ であることを証明することである. まず 1 つ重要なこととして補題 5.5 の証明が $\mathscr{Z}_T$ を $\mathscr{Z}_{T,x}$ に置き換えても成り立つのである. 特に

$$\frac{1}{T}\log \mathscr{Z}_{T,0} - \frac{1}{T}\mathscr{Q}[\log \mathscr{Z}_{T,0}]$$

が 0 に確率収束することが導かれる. すなわち定理 4.3(3), 定理 4.4 と合わせると $\dfrac{1}{T}\mathscr{Q}[\log \mathscr{Z}_{T,0}] \to -\dfrac{1}{6}$ である.

$$\frac{1}{T}\mathscr{Q}[\log \mathscr{Z}_T] \to -\frac{1}{6}$$

が成り立つのだろうか.

Jensen の不等式と定理 4.3(5) を用いると

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}[\log \mathscr{Z}_T] &\geqslant \int_{\mathbb{R}} \mathscr{Q}\left[\log \frac{\mathscr{Z}_{T,x}}{\rho_T(x)}\right] \rho_T(x) dx \\ &= \mathscr{Q}\left[\log \frac{\mathscr{Z}_{T,x}}{\rho_T(0)}\right]\end{aligned}$$

となるので下からの評価は簡単に得られる.

上からの評価は (5.10) の証明に似ている.

$$\mathscr{Z}_T = \int_{-2T^3-1}^{2T^3+1} \mathscr{Z}_{T,x} dx + \int_{-\infty}^{-2T^3-1} \mathscr{Z}_{T,x} dx + \int_{2T^3+1}^{\infty} \mathscr{Z}_{T,x} dx$$

とすると, $\theta\in(0,1)$ に対して

$$\mathcal{Q}\left[\mathscr{Z}_T^{\theta}\right]\leqslant\sum_{k=-T^3}^{T^3}\mathcal{Q}\left[\left(\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{\mathscr{Z}_{T,x}}{\rho_T(x)}\rho_T(x)dx\right)^{\theta}\right]+\mathcal{Q}\left[\left(\int_{-\infty}^{-2T^3-1}\mathscr{Z}_{T,x}dx\right)^{\theta}\right]+\mathcal{Q}\left[\left(\int_{2T^3+1}^{\infty}\mathscr{Z}_{T,x}dx\right)^{\theta}\right]$$

となる. 後ろ 2 項目は無視してよいことはすぐにわかる. また定理 4.3(5) から

$$\mathcal{Q}\left[\left(\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{\mathscr{Z}_{T,x}}{\rho_T(x)}\rho_T(x)dx\right)^{\theta}\right]=\mathcal{Q}\left[\left(\int_{-1}^{1}\frac{\mathscr{Z}_{T,x}}{\rho_T(x)}\rho_T(x+2k)dx\right)^{\theta}\right]$$

となる. よって

$$\overline{\lim_{\theta\to0}}\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T\theta}\log\mathcal{Q}\left[\left(\sup_{x\in[-1,1]}\frac{\mathscr{Z}_{T,x}}{\rho_T(x)}\right)^{\theta}\right]\leqslant-\frac{1}{6}$$

を示せばよい. ここから先は (5.10) と同じことの繰り返しになる.

注意 5.9. ここまででひとまず証明は終わりである. 証明では定理 4.3 で挙げた確率熱方程式の解の性質をすべてが証明に使われているということである. そういった点ではこの証明は非常に特殊なものになっており, 別の確率模型に対して適応できるかと問われると答えは No である. (汎用性に欠けているという点ではこれからもっと改良する必要はあるのかもしれない)

5.4 問題

問題 5.1. $E_n=\{1,\cdots,n\}\times -n,n$ とする. このとき関数 $f(\eta)=\log W_n(\beta,\eta)$ は $\mathbb{R}^{E_n}$ 上の関数とみなすことができる. 以下のことを示せ.

(i) f は連続微分可能であることを示せ.

(ii) f は凸関数であることを示せ. すなわち任意の $s\in[0,1]$ と $\eta,\eta'\in\mathbb{R}^{E_n}$ に対して

$$f(s\eta+(1-s)\eta')\leqslant sf(\eta)+(1-s)f(\eta)$$

が成り立つことを示せ.

(iii) $|\nabla f(\eta)|^2=\beta^2\mathscr{R}_n$ であることを示せ. ただし $\mathscr{R}_n$ は (3.1) で与えられたものである.

問題 5.2. (5.8) を証明せよ.

問題 5.3. $\theta\in(0,1)$ とする. このとき任意の $T>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}Q\left[W_{Tn}(\beta_n)^{\theta}\right]\to\mathcal{Q}\left[(\mathscr{Z}_T)^{\theta}\right]$$

が成り立つことを示せ.

問題 5.4. 定数 $C_{\theta,3}>0, C_{\theta,4}>0$ が存在して, 任意の $n\geqslant1, T\geqslant1$ に対して

$$\sum_{|z|>T^2}Q\left[P_X\left[\zeta_{Tn}(\beta_n,X):X_{Tn}\in K_z\right]^{\theta}\right]\leqslant C_{\theta,3}\exp\left(-C_{\theta,4}T^3\right)$$

が成り立つことを示せ.

問題 5.5. $t\in(0,\infty)$ を固定する. $n\geqslant1$ に対して

$$a_n^{(t)}=\mathcal{Q}[\log\mathscr{Z}_{nt}],\quad n\geqslant1$$

とする. 以下の問に答えよ.

(i) $n,m \geqslant 1$ のとき $a_{n+m}^{(t)} \geqslant a_n^{(t)} + a_m^{(t)}$ が成り立つことを示せ.

(ii) (i) より極限 $a^{(t)} = \lim_{n\to\infty} a_n^{(t)}$ が存在することがわかる. 任意の $t > 0$ に対して

$$a^{(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathscr{Q}[\log \mathscr{Z}_T]$$

が成り立つことを示せ. ただし右辺は連続な T に関する極限である.

問題 5.6. (5.12) を以下の要領で証明せよ.

(i) ある定数 $C_1 > 0$ が存在して

$$0 \leqslant -\mathscr{Q}\left[\frac{\mathscr{Z}_T}{\hat{\mathscr{Z}}_T(i)} \middle| \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}} \right] \leqslant C_1$$

となることを示し, 特に

$$\mathscr{Q}\left[\exp(V_i^T) | \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right] \leqslant e^{C_1}$$

が成り立つことを示せ.

(ii) ある定数 $C_2 > 0$ が存在して

$$\mathscr{Q}\left[\exp(-V_i^T) | \mathscr{F}_{i-1}^{\mathscr{W}}\right] \leqslant C_2$$

となることを示せ.

A　役立つ道具

以下では講義ノートを読んでいく上で知っておくと良いことについて記述していくことにする.

補題 A.1. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上で定義された $\mathbb{R}$-値確率変数 X を考える. また $x > 0$ とする. このとき以下の不等式が成り立つ.

- (マルコフの不等式) $X \in L^1(P)$ のとき, $P(|X| > x) \leqslant \dfrac{E[|X|]}{x}$.
- (チェビシェフの不等式) $X \in L^2(P)$ のとき, $P(|X - E[X]| > x) \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}|X|}{x}$.
- (イェンセンの不等式) f を $\mathbb{R}$ 上の凸関数とする. また $f(X), X \in L^1(P)$ のとき

$$f(E[X]) \leqslant E[f(X)]$$

A.1　中心極限定理

通常の中心極限定理の知識は仮定するが, すこし一般化した中心極限定理の主張を与えておく.

定理 A.1. **(Lindberg-Feller の定理** [48, Theorem 3.4.5]) 各 n に対して $\{X_{n,m} : 1 \leqslant m \leqslant n\}$ は独立な確率変数で $P[X_{n,m}] = 0$ となるとする. さらに以下を仮定する.

(1) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} P[X_{n,m}^2] \to \sigma^2$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sum_{m=1}^{n} P\left[X_{n,m}^2 : |X_{n,m}| > \varepsilon\right] \to 0$.

このとき $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ の法則は $N(0, \sigma^2)$ に法則収束する.

A.2　条件付期待値とマルチンゲール

ここでは確率変数の条件付期待値について述べたあと, 離散時間, および連続時間マルチンゲールについて述べる.

定義 A.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし, $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}$ を部分 σ-加法族とする. $\mathscr{F}$-可測な $\mathbb{R}$-値が $X \in L^1(P)$ であるとき, 次のような $\mathscr{G}$-可測な $\mathbb{R}$-値確率変数 Y が存在する. この Y を X の $\mathscr{G}$ に関する**条件付期待値**といい, $P[X|\mathscr{G}]$ と表す.

$$\text{任意の } A \in \mathscr{G} \text{ に対して } P[X : A] := \int_A X(\omega) P(d\omega) = P[X : A].$$

ただし, このような Y は零集合を除いて一意に定まる.

例題 **A.1.** 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathscr{R}$-値確率変数 X_1, X_2 が与えられたとする. このとき

$$\sigma[X_1] := \{X_1^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$

を X_1 が生成する部分 σ-加法族という. $\mathbb{R}^2$ 上の可測な関数 f が $P[|f(X_1, X_2)|] < \infty$ を満たすとする. もし X_1 と X_2 が独立なとき $P[f(X_1, X_2)|\sigma[X_1]]$ は X_1 を固定して, X_2 に対してのみ確率変数 $f(X_1, X_2)$ の期待値とったものと一致する.

この講義ノートでは主にこの例で考える条件付期待値を知っていれば内容を理解できる.

さて, では確率過程のマルチンゲール性, マルコフ性について述べる.
まず部分 σ-加法族の系でフィルトレーションと呼ばれるものを定義しておく.

定義 **A.2.** $T = \mathbb{N}$ または $[0, \infty)$ とする. $(\Omega, \mathscr{F})$ を可測空間とする. このとき部分 σ-加法族の系 $\{\mathscr{F}_t : t \in T\}$ がフィルトレーションであるとは

$$\text{任意の } s, t \in T \text{ に対して } s \leqslant t \text{ ならば } \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$$

が成り立つときをいう.

例題 **A.2.** $\{X_n : n \geqslant 0\}$ がマルコフ連鎖であるとき

$$\mathscr{F}_n := \sigma[X_1, \cdots, X_n]$$

と定義したものはフィルトレーションになる.

以下, 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ とそのフィルトレーション $\{\mathscr{F}_t : t \in T\}$ を考える. 必要ならば通常の条件と呼ばれる仮定をおく.

定義 **A.3.** 確率過程 $X = \{X_t(\omega) : t \in T\}$ がフィルトレーション $\{\mathscr{F}_t : t \geqslant 0\}$ に関して劣マルチンゲール (優マルチンゲール) であるとは

- 任意の $t \geqslant 0$ に対して X_t は $\mathscr{F}_t$-可測であり $P[|X_t|] < \infty$.
- 任意の $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ に対して $P[X_t|\mathscr{F}_s] \geqslant X_s$ P-a.s. $\quad (P[X_t|\mathscr{F}_s] \leqslant X_s$ P-a.s.$)$

が成り立つときをいう. 特に等号が成り立つときを X はマルチンゲールであるという.
X が確率 1 で連続であるとき X を連続 (劣, 優) マルチンゲールと呼ぶ.

$\{X_t : t \geqslant 0\}$ がマルチンゲールであるとき X_t^2 は劣マルチンゲールであることが知られており, 特に $\mathscr{F}_t$ が通常の条件を満たし, かつ $P\left[X_t^2\right] < \infty$ ならば Doob-Meyer 分解可能である.

定義 **A.4.** 確率変数 $S : \Omega \to [0, \infty]$ が停止時刻であるとは

$$\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } \{S \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$$

となるときをいう.
また確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ が局所マルチンゲールであるとは

- 任意の $t \geqslant 0$ に対して X_t は $\mathscr{F}_t$-可測
- ある非減少な停止時刻の列 $\{S_n : n \geqslant 1\}$ で $P(S_n \to \infty) = 1$ となるものが存在して $\{X_{t\wedge S_n} : t \geqslant 0\}$ が各 $n \geqslant 1$ に対してマルチンゲール

となるときをいう.

定理 A.2. (**Burkholder-Davis-Gundy** の不等式 [52, 第 3 章, 定理 3.28])
$M = \{M_t(\omega) : t \geqslant 0\}$ を連続局所マルチンゲールで $M_0(\omega) = 0$ P-a.s. であるとする.

$$M_t^* = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_t|$$

と定義したとき, 任意の $m > 0$ に対して定数 $c_m, C_m > 0$ が存在して

$$c_m P[\langle M\rangle_T^m] \leqslant P\left[(M_T^*)^{2m}\right] \leqslant C_m P[\langle M\rangle_T^m]$$

が任意の停止時刻 T に対して成り立つ.

注意 A.1. 定数 c_m, C_m はマルチンゲール M には依存せず $m > 0$ にのみ依存する.

A.3 熱核に関する式

ここでは確率熱方程式に関する内容で用いる 1 次元の熱核に関する公式を挙げておく. 各自検証するとよい.

$x, y \in \mathbb{R}, t > 0$ に対して

$$\rho_t(x-y) = \rho_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right)$$

とおく. このとき $0 \leqslant s \leqslant t, x, y \in \mathbb{R}$ に対して以下のことが成り立つ.

$$\rho_t(x)^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \rho_{\frac{t}{2}}(x), \tag{A.1}$$

$$\rho_t(x,w)\rho_t(y,w) = \rho_{2t}(x,y)\rho_{\frac{t}{2}}\left(\frac{x+y}{2}, w\right), \tag{A.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_s(x,y)\rho_t(y,z)dy = \rho_{t+s}(x,z), \tag{A.3}$$

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \rho_{u-s}(x,y)^2 dy du = \frac{\sqrt{t-s}}{\sqrt{\pi}}. \tag{A.4}$$

また $k \geqslant 1, 0 \leqslant s < t$ に対して

$$\Lambda_k(s,t) = \{\mathbf{t}_k \in [0,\infty)^k : s \leqslant t_1 < \cdots < t_k < t\}.$$

と定義する. ただし $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_k) \in [0,\infty)^k$ とする. さらに $k \geqslant 1$, $\mathbf{t} \in \Lambda(s,t)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$\rho_k(\mathbf{t}, \mathbf{x}|s, x; t, y) = \rho_{t_1 - s}(x, x_1) \prod_{i=1}^{k-1} \left(\rho_{t_{i+1}-t_i}(x_i, x_{i+1})\right) \rho_{t-t_k}(y, x_k)$$

$$\rho_k(\mathbf{t}, \mathbf{x}|s, x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_k(\mathbf{t}, \mathbf{x}|s, x; t, y) dy = \rho_{t_1 - s}(x, x_1) \prod_{i=1}^{k-1} \left(\rho_{t_{i+1}-t_i}(x_i, x_{i+1})\right)$$

と定義したとき以下が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^k} \rho(\mathbf{t},\mathbf{x}|s,x;t,y)^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2^{k+1}\pi^{\frac{k+1}{2}}} \rho_{\frac{t-s}{2}}(x,y) \prod_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}, \tag{A.5}$$

$$\int_{\Lambda_k(s,t)} \int_{\mathbb{R}^k} \rho(\mathbf{t},\mathbf{x}|s,x;t,y)^2 d\mathbf{x}d\mathbf{t} = \frac{(t-s)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k+1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \rho_{\frac{t-s}{2}}(x,y), \tag{A.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} \rho_k(\mathbf{t},\mathbf{x}|s,x)^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2^k \pi^{k/2}} \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \tag{A.7}$$

$$\int_{\Lambda_k(s,t)} \int_{\mathbb{R}^k} \rho_k(\mathbf{t},\mathbf{x}|s,x)^2 d\mathbf{x}d\mathbf{t} = \frac{(t-s)^{\frac{k}{2}}}{2^k\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}, \tag{A.8}$$

A.4 Garsia-Rodemich-Rumsey の補題

ここでは連続関数の連続率の評価を得るのに非常に有用な不等式を与えておく.

補題 A.2. (Garsia-Rodemich-Rumsey の補題 [73, Exercise 2.4.1][67, Lemma A 3.1]) $\phi :\to [0,\infty)$, $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は狭義単調増加な連続関数で

$$\phi(0) = \Psi(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$$

を満たすとする. 連続関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ に対して

$$\Gamma_{f,x,r} := \int_{B_r(x)} \int_{B_r(x)} \Psi\left(\frac{|f(t)-f(s)|}{\phi(|t-s|)}\right) dsdt < \infty$$

が成り立ったとする. ただし $B_r(x)$ は x を中心とする半径 r の開球である. そのとき任意の $s,t \in B_r(x)$ に対して

$$|f(t)-f(s)| \leqslant 8\int_0^{2|t-s|} \Psi^{-1}\left(\frac{4^{d+1}\Gamma_{f,x,r}}{\lambda_d u^{2d}}\right) \phi(du)$$

が成り立つ. ただし λ_d は d にのみ依存する定数である.

これを特に $\Psi(x) = |x|^p$, $\phi(u) = u^q$ ($p \geqslant 1$, $q > 0$, $pq > 2d$) に適用すると

$$\Gamma_{f,x,r} = \int_{B_r(x)} \int_{B_r(x)} \left(\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|^q}\right)^p dsdt$$

となり, これが有限のとき, $s,t \in B_r(x)$ に対して

$$|f(t)-f(s)| \leqslant \frac{2^{\frac{2}{p}+q+3}\Gamma_{f,x,r}^{\frac{1}{p}}}{\lambda_d^{\frac{1}{p}}\left(q-\frac{2d}{p}\right)} |t-s|^{q-\frac{2d}{p}}$$

が成り立つのである.

$\mathbb{R}$-値の連続な確率過程 $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ が与えられたとき, $\alpha \geqslant 1$ に対して

$$E\left[\sup_{t,s\in B_r(x)} |X_t - X_s|^\alpha\right] \leqslant E\left[\Gamma_{f,x,r}^{\frac{\alpha}{p}}\right] C_{d,\alpha,p,q} |t-s|^{\alpha\left(q-\frac{2d}{p}\right)}$$

となるが, 右辺は結局 $|X_u - X_v|$ のモーメントの評価を与えれば評価することができるのである.

特に

$$E\left[\sup_{t\in B_r(x)} |X_t|^\alpha\right] \leqslant E\left[|X_x|^\alpha\right] + E\left[\sup_{t\in B_r(x)} |X_t - X_s|^\alpha\right]$$

が成り立つことからも重要である.

参考文献

[1] Elie Aidekon and Zhan Shi. The Seneta-Heyde scaling for the branching random walk. *Ann. Probab.*, Vol. 42, No. 3, pp. 959–993, 2014.

[2] Tom. Alberts and Jeremy. Clark. Nested critical points for a directed polymer on a disordered diamond lattice. 2016.

[3] Tom Alberts, Jeremy Clark, and Saša Kocić. The intermediate disorder regime for a directed polymer model on a hierarchical lattice. *Stochastic Process. Appl.*, Vol. 127, No. 10, pp. 3291–3330, 2017.

[4] Tom Alberts, Konstantin Khanin, and Jeremy Quastel. The continuum directed random polymer. *J. Stat. Phys.*, Vol. 154, No. 1-2, pp. 305–326, 2014.

[5] Tom Alberts, Konstantin Khanin, and Jeremy Quastel. The intermediate disorder regime for directed polymers in dimension $1+1$. *Ann. Probab.*, Vol. 42, No. 3, pp. 1212–1256, 2014.

[6] Sergio Albeverio and Xian Yin Zhou. A martingale approach to directed polymers in a random environment. *J. Theoret. Probab.*, Vol. 9, No. 1, pp. 171–189, 1996.

[7] Kenneth S. Alexander and Gökhan Yi ldi ri m. Directed polymers in a random environment with a defect line. *Electron. J. Probab.*, Vol. 20, pp. no. 6, 20, 2015.

[8] Gideon Amir, Ivan Corwin, and Jeremy Quastel. Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1+1$ dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 64, No. 4, pp. 466–537, 2011.

[9] Antonio Auffinger and Michael Damron. The scaling relation $\chi = 2\xi - 1$ for directed polymers in a random environment. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, Vol. 10, No. 2, pp. 857–880, 2013.

[10] Julien Barral. Differentiability of multiplicative processes related to branching random walks. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, Vol. 36, No. 4, pp. 407–417, 2000.

[11] Quentin Berger and Hubert Lacoin. The effect of disorder on the free-energy for the random walk pinning model: smoothing of the phase transition and low temperature asymptotics. *J. Stat. Phys.*, Vol. 142, No. 2, pp. 322–341, 2011.

[12] Quentin Berger and Hubert Lacoin. The high-temperature behavior for the directed polymer in dimension $1+2$. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, Vol. 53, No. 1, pp. 430–450, 2017.

[13] Quentin Berger and Fabio Lucio Toninelli. On the critical point of the random walk pinning model in dimension $d=3$. *Electron. J. Probab.*, Vol. 15, pp. no. 21, 654–683, 2010.

[14] L. Bertini, N. Cancrini, and G. Jona-Lasinio. The stochastic Burgers equation. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 165, No. 2, pp. 211–232, 1994.

[15] Lorenzo Bertini and Giambattista Giacomin. Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 183, No. 3, pp. 571–607, 1997.

[16] Sérgio Bezerra, Samy Tindel, and Frederi Viens. Superdiffusivity for a Brownian polymer in a continuous Gaussian environment. *Ann. Probab.*, Vol. 36, No. 5, pp. 1642–1675, 2008.

[17] J. D. Biggins. Uniform convergence of martingales in the branching random walk. *Ann. Probab.*, Vol. 20, No. 1, pp. 137–151, 1992.

[18] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[19] Matthias Birkner. A condition for weak disorder for directed polymers in random environment. *Electron. Comm. Probab.*, Vol. 9, pp. 22–25, 2004.

[20] Matthias Birkner, Andreas Greven, and Frank den Hollander. Collision local time of transient random walks and intermediate phases in interacting stochastic systems. *Electron. J. Probab.*, Vol. 16, pp. no. 20, 552–586, 2011.

[21] Matthias Birkner and Rongfeng Sun. Annealed vs quenched critical points for a random walk pinning model. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, Vol. 46, No. 2, pp. 414–441, 2010.

[22] Matthias Birkner and Rongfeng Sun. Disorder relevance for the random walk pinning model in dimension 3. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, Vol. 47, No. 1, pp. 259–293, 2011.

[23] Erwin Bolthausen. A note on the diffusion of directed polymers in a random environment. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 123, No. 4, pp. 529–534, 1989.

[24] Yannic. Bröker and Chiranjib Mukherjee. Quenched central limit theorem for the stochastic heat equation in weak disorder. 2017.

[25] Yannic. Bröker and Chiranjib Mukherjee. Localization of the gaussian multiplicative chaos in the wiener space and the stochastic heat equation in strong disorder. 2018.

[26] Francesco Caravenna, Rongfeng Sun, and Nikos Zygouras. Polynomial chaos and scaling limits of disordered systems. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, Vol. 19, No. 1, pp. 1–65, 2017.

[27] Francesco Caravenna, Rongfeng Sun, and Nikos Zygouras. Universality in marginally relevant disordered systems. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 27, No. 5, pp. 3050–3112, 2017.

[28] Philippe Carmona and Yueyun Hu. On the partition function of a directed polymer in a Gaussian random environment. *Probab. Theory Related Fields*, Vol. 124, No. 3, pp. 431–457, 2002.

[29] Philippe Carmona and Yueyun Hu. Strong disorder implies strong localization for directed polymers in a random environment. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, Vol. 2, pp. 217–229, 2006.

[30] Sourav Chatterjee and Alexander Dunlap. Constructing a solution of the $(2+1)$-dimensional kpz equation. *arXiv preprint arXiv:1809.00803*, 2018.

[31] Jeremy. Clark. High-temperature scaling limit for directed polymers on a hierarchical lattice with bond disorder. 2017.

[32] Jeremy. Clark. Continuum directed random polymers on disordered hierarchical diamond lattices. 2018.

[33] Francis Comets. *Directed polymers in random environments*, Vol. 2175 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2017. Lecture notes from the 46th Probability Summer School held in Saint-Flour, 2016.

[34] Francis. Comets and Clément Cosco. Brownian polymers in poissonian environment: a survey. 2018.

[35] Francis. Comets, Clément. Cosco, and Chiranjib Mukherjee. Fluctuation and rate of convergence for the stochastic heat equation in weak disorder. 2018.

[36] Francis Comets and Michael Cranston. Overlaps and pathwise localization in the Anderson polymer model. *Stochastic Process. Appl.*, Vol. 123, No. 6, pp. 2446–2471, 2013.

[37] Francis. Comets, Gregorio R. Moreno Flores, and Alejandro F. Ramirez. Random polymers on the complete graph. 2017.

[38] Francis Comets, Tokuzo Shiga, and Nobuo Yoshida. Directed polymers in a random environment: path localization and strong disorder. *Bernoulli*, Vol. 9, No. 4, pp. 705–723, 2003.

[39] Francis Comets, Tokuzo Shiga, and Nobuo Yoshida. Probabilistic analysis of directed polymers in a random environment: a review. In *Stochastic analysis on large scale interacting systems*, Vol. 39 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 115–142. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[40] Francis Comets and Vincent Vargas. Majorizing multiplicative cascades for directed polymers in random media. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, Vol. 2, pp. 267–277, 2006.

[41] Francis Comets and Nobuo Yoshida. Some new results on brownian directed polymers in random environment (applications of renormalization group methods in mathematical sciences). *RIMS Kokyuroku*, Vol. 1386, , 2004.

[42] Francis Comets and Nobuo Yoshida. Brownian directed polymers in random environment. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 254, No. 2, pp. 257–287, 2005.

[43] Francis Comets and Nobuo Yoshida. Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder. *Ann. Probab.*, Vol. 34, No. 5, pp. 1746–1770, 2006.

[44] Francis Comets and Nobuo Yoshida. Localization transition for polymers in Poissonian medium. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 323, No. 1, pp. 417–447, 2013.

[45] Ivan Corwin and Mihai Nica. Intermediate disorder directed polymers and the multi-layer extension of the stochastic heat equation. *Electron. J. Probab.*, Vol. 22, pp. Paper No. 13, 49, 2017.

[46] Clément Cosco. The intermediate disorder regime for brownian directed polymers in poisson environment. 2018.

[47] Robert Dalang, Davar Khoshnevisan, Carl Mueller, David Nualart, and Yimin Xiao. *A minicourse on stochastic partial differential equations*, Vol. 1962 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Held at the University of Utah, Salt Lake City, UT, May 8–19, 2006, Edited by Khoshnevisan and Firas Rassoul-Agha.

[48] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*, Vol. 31 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010.

[49] P. Erdős and S. J. Taylor. Some problems concerning the structure of random walk paths. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, Vol. 11, pp. 137–162. (unbound insert), 1960.

[50] Yueyun Hu and Zhan Shi. Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees. *Ann. Probab.*, Vol. 37, No. 2, pp. 742–789, 2009.

[51] Svante Janson. *Gaussian Hilbert spaces*, Vol. 129 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[52] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, Vol. 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[53] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, Vol. 56, No. 9, p. 889, 1986.

[54] Wolfgang König. *The parabolic Anderson model*. Pathways in Mathematics. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016. Random walk in random potential.

[55] Hubert Lacoin. New bounds for the free energy of directed polymers in dimension $1+1$ and $1+2$. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 294, No. 2, pp. 471–503, 2010.

[56] Hubert Lacoin and Gregorio Moreno. Directed polymers on hierarchical lattices with site disorder. *Stochastic Process. Appl.*, Vol. 120, No. 4, pp. 467–493, 2010.

[57] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.

[58] Quansheng Liu and Frédérique Watbled. Exponential inequalities for martingales and asymptotic properties of the free energy of directed polymers in a random environment. *Stochastic Process. Appl.*, Vol. 119, No. 10, pp. 3101–3132, 2009.

[59] Sergey V. Lototsky and Boris L. Rozovsky. *Stochastic partial differential equations*. Universitext. Springer, Cham, 2017.

[60] David Márquez-Carreras, Carles Rovira, and Samy Tindel. A model of continuous time polymer on the lattice. *Commun. Stoch. Anal.*, Vol. 5, No. 1, pp. 103–120, 2011.

[61] Olivier Mejane. Upper bound of a volume exponent for directed polymers in a random environment. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, Vol. 40, No. 3, pp. 299–308, 2004.

[62] Cécile Monthus and Thomas Garel. Freezing transition of the directed polymer in a 1+ d random medium: Location of the critical temperature and unusual critical properties. *Physical Review E*, Vol. 74, No. 1, p. 011101, 2006.

[63] Gregorio R. Moreno Flores. On the (strict) positivity of solutions of the stochastic heat equation. *Ann. Probab.*, Vol. 42, No. 4, pp. 1635–1643, 2014.

[64] Chiranjib Mukherjee. A central limit theorem for the annealed path measures for the stochastic heat equation and the continuous directed polymer in d3. 2017.

[65] Makoto Nakashima. A remark on the bound for the free energy of directed polymers in random environment in $1+2$ dimension. *J. Math. Phys.*, Vol. 55, No. 9, pp. 093304, 14, 2014.

[66] Makoto Nakashima. Free energy of directed polymers in random environment in 1+1-dimension at high temperature. 2018.

[67] David Nualart. *Malliavin calculus and its applications*, Vol. 110 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[68] Markus Petermann. Superdiffusivity of directed polymers in random environment. *Ph. D. Thesis Univ. Zurich*, 2000.

[69] M. S. T. Piza. Directed polymers in a random environment: some results on fluctuations. *J. Statist. Phys.*, Vol. 89, No. 3-4, pp. 581–603, 1997.

[70] Jeremy Quastel. Introduction to KPZ. In *Current developments in mathematics, 2011*, pp. 125–194. Int. Press, Somerville, MA, 2012.

[71] Timo Seppäläinen. Scaling for a one-dimensional directed polymer with boundary conditions. *Ann. Probab.*, Vol. 40, No. 1, pp. 19–73, 2012.

[72] Renming Song and Xian Yin Zhou. A remark on diffusion of directed polymers in random environments. *J. Statist. Phys.*, Vol. 85, No. 1-2, pp. 277–289, 1996.

[73] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition.

[74] Nobuo Yoshida. private communiation.

[75] Nobuo Yoshida. Localization for linear stochastic evolutions. *J. Stat. Phys.*, Vol. 138, No. 4-5, pp. 598–618, 2010.

索 引