小磯憲史先生退職記念研究集会

2017年3月13日、14日 大阪大学理学研究科 E404

	3月13日（月）	3月14日（火）
9:20–9:30	coffee	coffee
9:30–10:20	小磯　深幸	内藤　博夫
10:40–11:30	小林　治	坂根　由昌
12:45–13:00	coffee	coffee
13:00–13:50	浦川　肇	
14:10–15:00	陶山　芳彦	
15:20–16:10	川久保　哲	
16:10–	wine party	

最終講義、パーティー　3月14日（火）		
14:30–16:00	小磯憲史 教授　最終講義	D501
18:00–	退職記念パーティー	千里阪急ホテル

小磯 深幸	平均曲率一定曲面の弱安定性と高次の変分
小林 治	Weyl のゲージ理論，Schwarz 微分，そしてある球面定理
浦川 肇	Harmonic maps and biharmonic maps on the warped product
陶山 芳彦	共形平坦な超曲面から決まる反転不変写像と高次双対超曲面
川久保 哲	Frenet 捩率一定ではない第 4 ソリトン曲線について
内藤 博夫	対称空間とグラスマン幾何
坂根 由昌	コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量について

平均曲率一定曲面の弱安定性と高次の変分

小磯 深幸 (九州大学)

3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定 (CMC) 曲面は, 囲む体積を保ち与えられた境界条件を満たす変分に対する面積の平衡曲面である. CMC 曲面が体積を保つ変分に対し面積の極小値をとるか否かを判定することは重要である. 本講演では境界条件として固定境界条件を課し, 曲面の囲む体積と境界値を保つ変分を許容変分と呼ぶ. CMC 曲面は, 任意の非自明な許容変分に対して面積の 第 2 変分が正の時, 狭義安定であるといい, 任意の許容変分に対して面積の第 2 変分が非負の時, 弱安定であるという. 本講演では,CMC 曲面の安定性の判定条件を与える. さらに, 許容変分に対する面積の第 3 及び第 4 変分を評価することにより, 弱安定 CMC 曲面で面積極小のものと極小でないものの例があることを示し, この考察の重要性について述べる.

Weyl のゲージ理論，Schwarz 微分，そしてある球面定理

小林 治

$\mathbf{R}_+$ ゲージ理論を Weyl のゲージ理論と言う．$\mathbf{R}_+$ 主束は自明だがそのゲージ理論は自明でない．微分幾何的には共形構造と射影構造それぞれに自然に付随して生ずる．この講演では Weyl のオリジナル版である共形版を扱う．$\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{GL(1,R)}$ と考える．C を多様体 M の Riemann 計量の共形類とするとき，$\mathbf{R}_+$ 主束 $P = \{g(x) |\ g \in C, x \in M\}$ のゲージポテンシャルを用いて M 上の曲線 x に対してゲージ不変な Schwarz 微分 $s_w x$ が定義できる．さらにこの Schwarz 微分を用いて閉曲線 $x\colon S^1 \to M$ に対する共形不変量 $\kappa(x)$ を導入する．自然な流れで共形不変量 $\kappa(M,C) = \inf\{\kappa(x) |\ x\colon S^1 \to M\}$ を得る．これは山辺の共形不変量 $\mu(M,C)$ と類似の性質を持つ．たとえば $\kappa(M,C) \le \kappa(S^n, C_0) = \pi^2$.

予想：$\kappa(M,C) = \kappa(S^n, C_0)$ ならば (M,C) は (S^n, C_0) に共形同値.
C が Einstein 計量を含む場合にこの予想を支持する結果を紹介したい.

Harmonic maps and biharmonic maps on the warped product

浦川 肇 (東北大学)

For given C^∞ Riemannian manifolds (M,h) and (F,k), and a C^∞ function $f \in C^\infty(M)$, consider the warped product (P,g). Here, $P = M \times F$ with the Riemannian metric

$$g = \pi^* h + f^2 k,$$

where $\pi : M \times F \ni (x,y) \mapsto x \in M$. The warped product have been studied by N. Ejiri, Math. Z., 1979, to produce the examples of compact irreducible Riemannian manifolds which are isospectral but not isometric. In our talk, we show very recent works on harmonic maps and biharmonic maps on the warped product $\pi : (P,g) \to (M,h)$. Our results are as follows: (1) The tension field $\tau(\pi) = \ell \frac{\mathrm{grad} f}{f}$. Thus, π is harmonic if and only if f is constant. (2) The bi-tension field $\tau_2(\pi)$ is also calculated. (3) In the case $(M,h) = (\mathbb{R}, dt^2)$, π is biharmonic if and only if

$$f''' f^2 - 3f'' f' f + (2-\ell) f'^3 = 0. (\#)$$

It is unknown this non-linear third order ordinary equation (#) has a non-trivial solution or not.

共形平坦な超曲面から決まる反転不変写像と高次双対超曲面

陶山 芳彦 (福岡大学)

Riemann 計量を持つ曲面は、等温座標系の存在により、常に共形平坦である。共形平坦な超曲面 $f : M^n \to R^{n+1}$ $(n \geq 3)$ の研究は Cartan の 論文 (1917) を起源とし、ここでは、$n \geq 4$ ならば異なる主曲率の数は 2 以下 となり、共形平坦な超曲面は channel hypersurfaces に限ることが証明された。また、$n = 3$ のときも異なる主曲率の数が 2 以下であるならば、channel hypersurfaces であることがわかっている。

$n = 3$ でその 3 つの主曲率が互いに異なる場合の (即ち、generic で) 共形平坦な超曲面の分類問題は未だ未解決ではあるが、我々の研究によって、このような超曲 面から成る空間には興味深い幾何が存在することがわかってきている。本講演では、generic で共形平坦な超曲面とその双対超曲面に関する事柄を考察する。

generic で共形平坦な超曲面は双対超曲面を持ち、この双対超曲面もまた generic で共形平坦である。この双対変換に関して、超曲面に先ず R^4 での反転を作用させ、次にその得られた超曲面に双対変換を行うという連続作用を行ったとき、反転の中心を変える こ

とにより共形的に異なる超曲面が得られる。更に、1つの超曲面から、反転と双対変換の連続作用を繰り返すことにより、無限に多くの generic で共形平坦な超曲面の系が構成される。本講演では、各超曲面 (これは R^4 への写像である) から反転の作用で不変となる写像を構成し、上に述べた系に属する超曲面の (作用の各段階での) 特徴的性質及び高次双対超曲面に関する漸化的性質を、この不変写像を基に考察する。

Frenet 捩率一定ではない第４ソリトン曲線について

川久保 哲（兵庫県立大学）

局所誘導階層の第４ソリトン曲線の具体例を構成する．これまで Frenet 捩率が一定で回転トーラスに巻きつくような解は知られていたが，ここでは Frenet 捩率が一定ではない球面曲線の解を構成する．

対称空間とグラスマン幾何

内藤 博夫（山口大学）

等質リーマン多様体 (M, g) の等長変換群の単位元連結成分 $I_o(M, g)$ を M 上の r-次元接部分空間全体のなす グラスマン束 $G^r(TM)$ に作用させ, その軌道を $\mathcal{O} \subset G^r(TM)$ とする．M の連結部分多様体 S が，$T_pS \in \mathcal{O}$ $(p \in S)$ を満たすとき，**$\mathcal{O}$-部分多様体**といい，$\mathcal{O}$-部分多様体全体を $\mathcal{O}$-幾何という．このような部分多様体論を，総称して**軌道型グラスマン幾何**といい，等質部分多様体は，$\mathcal{O}$-部分多様体の代表例である．軌道型グラスマン幾何の基本的な課題として，(1) $\mathcal{O}$-幾何の存在，(2) $\mathcal{O}$-幾何の部分多様体論，(3) 等質部分多様体を許容する $\mathcal{O}$-幾何の分布などが考えられる．
このような軌道型グラスマン幾何の枠組みを使って，リーマン対称空間の**対称部分多様体**が分類された。また，最近，左不変計量に関する**３次元ユニモジュラーリー群** (U, g) において，軌道型グラスマン幾何の課題 (1) 及び (2) の観点から，その曲面論が考察され，(1) においては，$\mathcal{O}$-曲面を許容する軌道 $\mathcal{O}$ の決定，(2) においては，極小曲面を含む平均曲率一定 $\mathcal{O}$-曲面の存在・非存在が明らかにされた。その研究方法は，$\mathcal{O}$-曲面の存在をある包合的２次元線形分布の存在条件を準線形偏微分方程式の解の存在に帰着することである．
３次元ユニモジュラーリー群は，J. Milnor によって，６種類のリー群に分類され，その上の左不変計量の等長類は，V. Patrangenaru によって，１０種類に分類されている．それらは, $I_0(U, g)$ のイソトロピー部分群が $SO(3)$ の３種類（定曲率空間），$SO(2)$ の３種類，単位元のみの４種類に類別され，軌道空間 $\{\mathcal{O}\}$ は，一点, 閉区間 $[0, 1]$, 実射影平面

$P^2(\mathbb{R})$ と同一視される．
この講演では，３次元ユニモジュラーリー群に対するこれらの結果の概要について述べた後，**リーマン対称空間**のグラスマン幾何的部分多様体論に対するこのようなアプローチの類似について解説する．リーマン対称空間は，一般に，大きなイソトロピー部分群を持つため， 特に，３次元ユニモジュラーリー群でイソトロピー部分群 $SO(2)$ をもつ場合の類似を考え，課題 (1) について，リーマン対称空間上に，$\mathcal{O}$-部分多様体を積分多様体とする包合的線形分布が存在するための条件を準線形偏微分方程式の系として表現する．今後の課題として，この系に対する解の存在問題の解決が残る．

コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量について

坂根 由昌（大阪大学）

(M, g) をリーマン多様体とする。リーマン計量 g がアインシュタイン計量であるとは、g の Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(g)$ が $\mathrm{Ric}(g) = c\,g$ を満たすことである。ここでは、等質空間 G/K 、および、コンパクトリー群 G 上の左不変なリーマン計量 g を考える。

コンパクト等質空間 G/K で、不変なアインシュタイン計量をもつ例としては、球面 $(\mathrm{S}^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n), g_0)$, 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n = \mathrm{SU}(n+1)/(\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U(n)}), g_0)$ などの既約対称空間、および 等方表現が既約な空間 (isotropy irreducible spaces) がよく知られている。特に、コンパクト単純リー群上の 両側不変な計量はアインシュタイン計量である。

- 一般的な問題としては、等質リーマン空間 $(G/K, g)$ は、いつアインシュタイン計量となるか。また、不変なアインシュタイン計量が存在するときに、一意性はあるのか、どのくらい多くあるのかなどが考えられる。

等質空間 G/K の不変なアインシュタイン計量の存在問題については、Wang-Ziller は、1986 年 [9] において、等質空間 G/K で G-不変なアインシュタイン計量をもたない例をいくつか構成した。このときの最小の次元は $\dim G/K = 12$ である。

等質空間 G/K で $\dim G/K < 12$ となるものについてはどうかという問題が考えられる。これは、 Böhm-Kerr により 2006 年 に考察され [4]、この場合には、不変なアインシュタイン計量が存在することが示された。

D'Atri-Ziller は、1979 年に、[7] により、コンパクト半単純リー群 G 上の左不変なリーマン計量がいつ naturally reductive となるかを調べ、コンパクト単純リー群の場合にはこのような計量を完全に分類した 。

さらに、D'Atri-Ziller は、コンパクト型の既約対称空間 G/K および等方部分群による作用が既約なコンパクト等質空間を利用して、コンパクト単純リー群 G 上の多くの naturally reductive な左不変アインシュタイン計量を構成した。

- また、D'Atri-Ziller は、コンパクト単純リー群 G 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量があるかという問題を提出した。

この問題についての最近の進捗状況をお話ししたい。この問題に関しての最初の研究は、1994 年に森邦彦によりなされた。

定理 1 (K. Mori [8]). SU(n) ($n \geq 6$) 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。

次に、コンパクト単純リー群 G を、第 2 ベッチ数が 1 である一般化された旗多様体 G/K 上のファイバー空間と考え、等方部分群 K による既約表現による分解の個数が 2 あるいは 3 であるものを用いることにより次が示された。

定理 2 (A. Arvanitoyeorgos, K. Mori and Y. Sakane [1]). 次のコンパクト単純リー群 G 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。
$G = \mathrm{SO}(n)$ ($n \geq 11$), Sp(n) ($n \geq 3$), E_6, E_7 または E_8.

定理 3 (I. Chrysikos and Y. Sakane [6]). 次のコンパクト例外単純リー群 G 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。
$G = E_6$, E_7, E_8, F_4 または G_2.

一方、Generalized Wallach space を用いて、次が示された。

定理 4 (Z. Chen and K. Liang [5]). コンパクト例外単純リー群 F_4 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。

定理 5 (A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha [2], [3]). コンパクト単純リー群 Sp(n) ($n \geq 3$) および SO(n) ($n \geq 7$) 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。

最近、森 [8] の結果の拡張として、

定理 6 (A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha). SU($3+n$) ($n \geq 2$) 上には naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。(特に、SU(5) に対して naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。)

まとめ コンパクト単純リー群 SU(n) ($n \geq 5$), SO(n) ($n \geq 7$), Sp(n) ($n \geq 3$), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在する。
まだわかっていない コンパクト単純リー群は、SU(3), SU(4), SO(5) である。

References

[1] A. Arvanitoyeorgos, K. Mori and Y. Sakane: *Einstein metrics on compact Lie groups which are not naturally reductive*, Geom. Dedicata, **160** (1) (2012) 261–285.

[2] A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha: *Einstein metrics on the Symplectic group which are not naturally reductive*, Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields, Proceedings of the 4th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, 1–22, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2015).

[3] A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha: *New Einstein metrics on the Lie group* $\mathrm{SO}(n)$ *which are not naturally reductive*, Geom. Imaging and Computing **2** (2) (2015) 77–108.

[4] C. Böhm and M. Kerr: *Low dimensional homogeneous Einstein manifolds*, Trans. Am. Math. Soc. **358**(4) (2006) 1455–1468.

[5] Z. Chen and K. Liang: *Non-naturally reductive Einstein metrics on the compact simple Lie group* F_4, Ann. Global Anal. Geom. **46** (2) (2014) 103 – 115.

[6] I. Chrysikos and Y. Sakane: *Non-naturally reductive Einstein metrics on exceptional Lie groups*, to appear in J. Geom. Phys. **116** (2017), arXiv:1511.03993.

[7] J. E. D'Atri and W. Ziller: *Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **19** (215) (1979).

[8] K. Mori: *Left invariant Einstein metrics on* $\mathrm{SU}(N)$ *that are not naturally reductive*, Master Thesis (in Japanese), Osaka University 1994. English Translation Osaka University PRM 96–10 (preprint series) (1996).

[9] M. Wang and W. Ziller: *Existence and non-excistence of homogeneous Einstein metrics*, Invent. Math. **84** (1986) 177–194.