平成４年度　科学研究費補助金重点領域研究

（課題番号　０４２４５１１０,　代表 松本 尭生）

研究会資料

SURVEYS IN GEOMETRY

1992/93

共形場の理論と幾何学

土屋 昭博, 牛腸 徹, 今野 宏, 小林 正典

前書き

数学のそこかしこで数理物理（場の理論）の話を聞くようになってかなりになります．共型場の理論はその中心の一つであるわけですが，数年前の（多くの）数学者は五里霧中という状態から少し変わってきて，ようやくそれが何か（普通の数学者にも）見えかけてきた，という状態になったように思います．といっても，例えば私は耳学問で少しずつ感じがつかめてきたという状態からなかなか進歩せず，それより立ち入ろうと思うとしんどい専門の論文を読むことになりサボルという状態が続いています．とくに幾何学的な見方での共型場の理論へのアプローチは（例えば表現論からのものに比べて）知る人ぞ知るという部分が多いように思います．一方で場の理論自身は浸透してきていますし，数学的に明快になってきつつあるように見えます．

このあたりで幾何学的な見方の方も数学的にしっかりと同時に専門家以外の人にも分かるように纏めてもらえるの段階になっているのではないかと考えていました．まとまった考究録をだす良き伝統をもつ Surveys in Geometry はこのために最適ではないかと思っておりましたところ，名古屋大学の内藤さんも同じ考えであることが分かり，今まで Surveys in Geometry を組織してこられた落合先生にも御賛成頂き，重点領域研究 “無限可積分系” の援助でこのシンポジウムと予稿集出版が実現しました．

シンポジウムの柱として，この方面の先駆者である土屋先生に連続講演をしていただき，またその予稿を内藤さんを中心に作って頂きました． 共型場の理論の幾何学的研究をしている新進の数学者である今野・牛腸両氏にも講演・執筆両面で御協力頂き，場の理論での最近注目されている話題の一つであるカラビ・ヤウ多様体のミラーシンメトリについて３次元代数多様体の専門家である小林正典氏に解説していただきました． また，“数学方言” にも堪能な江口先生にも御講演頂けることになっております． これら忙しい中御協力頂いた方々に感謝すると共にこの予稿集が共型場の理論の幾何学の理解の浸透に役立つことを願っております．

深谷賢治

SURVEYS IN GEOMETRY

1992/93

共形場の理論と幾何学

Riemann 面上の共形場理論 I

土屋 昭博 （名古屋大学・理学部）

（内藤 久資 記）

Riemann 面上の共形場理論

1. Riemann 面上での Current Conformal Blocks.
2. 点つき安定曲線の moduli 族上での局所化
   – Current Conformal Blocks の層.
3. Current Conformal Blocks の有限性.
4. Energy moment tensor と moduli 族上のねじれつき.
   １階微分作用素の層と Current Conformal Blocks 上への作用.
5. Current Conformal Blocks の層の局所自明性と
   moduli 族の境界での因子化.

付録. Afiine Lie Algebra の可積分表現と Virasoro 代数.

目次

前書き

この Note は土屋氏が名古屋大学理学部において Surveys in Geometry のために行った連続講義を記録したものを元にしています. 実際, 土屋氏御自身が作成された note と, 私（内藤）が記録した note を元にしていますが, 実際の講義をそのまま再現することは不可能でした. したがって, この note 中に間違いがあればそれは全て私の責任に帰されることをここに書き留めておきます.

本講義録をまとめるにあたり, 名古屋大学の浪川幸彦氏, 松尾厚氏, 林孝宏氏からは多くの助言, 励ましをいただきましたことを感謝致します. また, 大阪大学の永友清和氏からは, 永友氏御自身がまとめておられる土屋氏の講義録の原稿を快く拝見させていただきましたことを感謝致します.

最後に, この note は, 本来目次にある通り, Riemann 面の moduli space と current conformal block の空間を調べることを目的としていました. 今回の Surveys in Geometry の土屋氏の講義ではこれらのことが述べられると思います. しかしながら予稿集作成の都合上, 多くの部分の note は後になって作成することになってしまいましたことをお詫びいたします.

内藤 久資

1. WZW 模型.

このNoteの目的は, WZW (Wess-Zumino-Witten)-Model 共形場理論を Riemann 面上に展開することである. 特に, その幾何学的側面を引きだしたい.

幾何学的側面とは, Moduli 空間の理論であり, それは, 次の2つに分けられる.

(1) Riemann 面の Moduli 空間.

(2) Riemann 面 R を決めた時, R 上の G-principal bundle の Moduli 空間.

以下のような記号を使おう.

- R: compact connected Riemann surface.
- G: $\mathbb{C}$ 上の simple algebraic group, connected, simply connected.
- $\mathfrak{g}$: G の Lie algebra.
- $T(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の tensor algebra.
- $U(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の展開環.
- P: R 上の G-principal bundle.

Simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ の三角分解 を $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ としたとき, $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 $V(\lambda)$ は highest weight $\lambda \in P_+$ で特徴づけられる (parametrize される). ここで, $P_+ \subset \mathfrak{h}^*$ は dominant integral weight の集合で, $P_+ = \sum_{j=1}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_j$ (Λ_i は fundamental weights) と書ける highest weight vector とし, $v(\lambda)$ を固定する.

1.1. 場の作用素.

さて, WZW-Model には, 理論の parameter $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と, 3種類の基本的な場の作用素が存在する. 以下では, $z \in R$ を Riemann 面 R 上の local coordinate とする.

(1) **Non-abelian current.**

R 上の operator valued 1-form

$$X(z)dz.$$

(2) **Energy-momentum tensor.**

R 上の operator valued 2-form

$$T(z)(dz)^2.$$

(実際には, 2-form の変換性とは少しずれた変換性を持つ. それが共形異常 (conformal anomaly) と言われる現象).

(3) **Chiral vertex operator.**

$\lambda \in P_+$ に対して定まる R 上の Δ_λ-form

$$\Phi_\lambda(z)(dz)^{\Delta_\lambda}.$$

ここで, $\Delta_\lambda = \dfrac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $h^\vee$ は dual Coxeter number, 2ρ は正ルートの和である. これは, 一般には多価解析的である.

これら (1), (2) の operator valued form が (3) に対して果たす役目は, 簡単に言ってしまうと次のようなことである.

- $X(z)dz \longleftrightarrow G$-principal bundle の infinitesimal deformation を記述.
- $T(z)(dz)^2 \longleftrightarrow$ Riemann 面 R の infinitesimal deformation を記述.

1.2. 真空期待値.

理論を Riemann 面上に展開するために, 最初から場の作用素を考えるのは困難なので, 場の作用素たちの真空期待値が与えられると考える. R を Riemann 面, $P \longrightarrow R$

を R 上の G-principal bundle とした時, R 上での真空期待値たち

$$
\begin{aligned}
&0\text{点関数}\ \langle 1\rangle_{R,P}\in\mathbb{C},\\
&1\text{点関数}\ \langle X(z)\rangle_{R,P}dz,\\
&\qquad\qquad \langle T(z)\rangle_{R,P}dz^2,\\
&\qquad\qquad \langle \Phi_\lambda(z)\rangle_{R,P}dz^{\Delta_\lambda},\\
&2\text{点関数}\ \langle X_1(z_1)X_2(z_2)\rangle dz_1dz_2,\\
&\qquad\qquad \langle X(z_1)T(z_2)\rangle dz_1dz_2^2,\\
&\qquad\qquad\qquad \vdots,\\
&\qquad\qquad \langle \Phi_{\lambda_1}(z_1)\Phi_{\lambda_2}(z_2)\rangle dz_1^{\Delta_{\lambda_1}}dz_2^{\Delta_{\lambda_2}},\\
&\qquad\qquad\qquad \vdots,\\
&\text{N点関数}\qquad\ \ \vdots,
\end{aligned}
$$

が全て与えられたと考える. ここに, N点関数は $(z_1,\cdots,z_N)\in R^N$ についての正則微分形式で, 次の条件をみたしているとする.

1) N点関数は $z_a=z_b$ でのみ特異点を持つ.
2) $\Phi_\lambda(z)(dz)^{\Delta_\lambda}$ は多価になりうる.
3) N点関数は $X(z)$, $T(z)$ については $\langle\cdot\rangle$ の中での場所に寄らない.

Example.

$$\langle X_1(z_1)X_2(z_2)\rangle dz_1dz_2=\langle X_2(z_2)X_1(z_1)\rangle dz_1dz_2.$$

注意. non-ablian current については, 正確には $X(z)dz$ は $\mathfrak{g}_P^*$ の section である.

1.3. 作用素展開.

理論の構造はN点関数の $z_a=z_b$ での特異点の singularity を表現することで記述される.

Example.

$$\langle X(z)Y(w)\rangle \sim \frac{k(X,Y)}{(z-w)^2}\langle 1\rangle + \frac{1}{(z-w)}\langle [X,Y](w)\rangle$$

near $z=w$.

(1) X, $Y \in \mathfrak{g}$ の時,

$$X(z)Y(w) \sim \frac{k(X,Y)}{(z-w)^2}\,\mathrm{id} + \frac{1}{(z-w)}[X,Y](w).$$

(2)

$$T(z)T(w) \sim \frac{c_v}{2(z-w)^4}\,\mathrm{id} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_\omega T(w).$$

ここに, $c_v = \dfrac{k\cdot\dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}$: 共形異常.

(3)

$$T(z)X(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}X(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_\omega X(w).$$

(4) $X(z)\Phi_\lambda(w)$ は $z=w$ で z について高々 order 1 の pole, かつ

$$\operatorname*{Res}_{z=w} X(z)\Phi_\lambda(z)dz = \begin{cases} 0, & X\in\mathfrak{n}_+ \\ \lambda(X)\Phi_\lambda(w), & X\in\mathfrak{h} \end{cases}$$

が成り立つ.

(5)

$$T(z)\Phi_\lambda(w) \sim \frac{\Delta_\lambda}{(z-w)^2}\Phi_\lambda(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_\omega\Phi_\lambda(w).$$

1.4. 理論構成の目的.

各 (R,P) について, その０点関数, １点関数, $\cdots$ を (R,P) 及び $z_1,\cdots,z_N$ の関数として求めることである. ここでは Affine-Lie 環の表現論を使って理論を構成する.

1.5. Deformation と Non-abelian current, Energy momentum tensor.

10

はじめに, Riemann 面の deformation と energy momentum tensor の関係を調べる. ここでは Riemann 面 R を一つ fix しておき, g を R の genus とする. さらに, $\{Q_i\}_{i=1}^N$ を R 上の相異なる N-点とする. ここでは, P は自明な principal bundle とする.

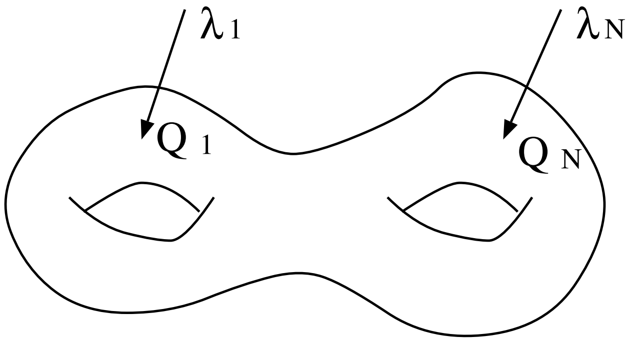

Fig 1.1

さて, この様な状況のもとで, $(Q_1, \cdots, Q_N)$ を変数に持つ関数 $(\Delta^{\lambda_1}, \cdots, \Delta^{\lambda_N})$-form

$$\langle \Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle (dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}} \cdots (dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}} \tag{1.1}$$

が Riemann 面の deformation に対して, どのようになるかを観察しよう. (ここで, Riemann 面 R を動かすことにより, (1.1) は $(R; Q_1, \cdots, Q_N)$ の関数と考える).

Riemann 面 R 上に simple closed curve γ を一つとり, U を γ の近傍とする. すると, 座標 $z\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, $(\varepsilon < |z| < \varepsilon^{-1})$ が定まる. この座標に関して計算する. いま, $w := z^{-1}$ とすると, $zw = 1$ であるが, parameter τ に対して, $zw = \tau$ となるような R の deformation を考える. (cf. fig 1.2).

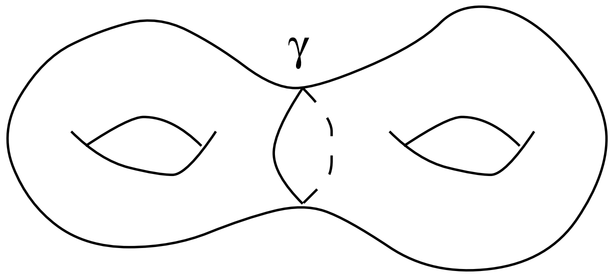

Fig 1.2

この時, この deformation に関する, (1.1) の "微分"

$$\tau\frac{d}{d\tau}\langle\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}$$

がどのようなものになるかを観察すると,

$$\begin{aligned}&\tau\frac{d}{d\tau}\langle\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}\\ &=\int_\gamma dz\,z\langle T(z)\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}\end{aligned}\tag{1.2}$$

となる. すなわち, (1.1) の "微分" が

$$\langle T(z)\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}\tag{1.3}$$

で与えられたと考えることができる.

さて, 前と同様に R 上に simple closed curve γ をとり, U を γ の近傍とする. この時, U 上で定義された P の trivialization を $g\colon U\longrightarrow G$ とする. 今, bundle を変化させない時には, $g=e$ であるのだが, それを

$$g(t)=e^{tX},\quad X\in\mathfrak{g}$$

として, bundle を deform してみよう. この時, “変分” $\delta_\gamma := \dfrac{d}{dt}$ で (1.1) がどのように変化するかを観察すると,

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad &\delta_\gamma\langle\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}\\ &=\int_\gamma dz\langle X(z)\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}\end{aligned}$$

となる. すなわち, (1.1) の $g(t)$ 方向への “微分” が

$$(1.5)\qquad \langle X(z)\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}$$

で与えられたと考えることができる.

今まで見てきたように, non-abelian current $X(z)dz$, energy momentun tensor $T(z)(dz)^2$ は (1.1) に対して, Riemann 面, bundle の deformation に対する “微分” を決めていることがわかった. すなわち, (1.1) のある点 $(R; Q_1, \cdots, Q_N; P)$ での値に対して,

(1.6)

$$\langle X(z_1)\cdots X(z_n)T(z_{n+1})\cdots T(z_{n+m})\Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle(dQ_1)^{\Delta^{\lambda_1}}\cdots(dQ_N)^{\Delta^{\lambda_N}}$$

は, 一斉に “微係数” を決めている.

逆に, このような “微係数” を決めた時, 元の関数 (1.1) を求めることができるかという問題を考えてみる. 一般には, その様なことはできないのだが, $X(z)dz$, $T(z)(dz)^2$ が決めている “微分方程式” の系が “いい” 性質を持っていれば, それら (無限個の) 微係数たちが作る空間が (例えば) 有限次元になるといったことがわかる. (すなわち, 微分方程式系が holonomic system になっている). したがって, この問題を考えるに際して, 場の作用素たちがこのような “いい” 性質を持つという要請を置くことにする. (このような要請を置いて理論を構築すると, 実際意味のあるものになることを見るのである).

以下では, このようないい性質を持つ system の簡単な例を見ることにしよう.

1.6. Toy Model (Borel-Weil Theory).

ここでは, $G = SL(2,\mathbb{C})$ とし,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}^{\times}, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad N_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

とする. いま, $m \in \mathbb{Z}$ を fix して, B の character $e(m)\colon B \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a^m$$

で定義する. この時, $X = G/B$ 上の bundle

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}(m) := G \underset{B\, e_m}{\times} \mathbb{C} \\ \big\downarrow \\ X = G/B \end{array}$$

とすると, $\mathcal{L}(m)$ の cross-section と $\Phi\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, $(\Phi(g \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix})) = a^m \Phi(g)$ が 1:1 に対応している.

一方, $X = G/B$ は $\mathbb{P}^1$ に双正則同値で, $\mathbb{P}^1 = X = U_0 \cup U_\infty$,

$$U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \right\} B/B \cong \mathbb{C}$$

$$x \in \mathbb{C} \leftrightarrow x$$

$$U_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} B/B \cong \mathbb{C}$$

$$y \in \mathbb{C} \leftrightarrow y$$

$$U_0 \cap U_\infty = \{x = y^{-1}\}$$

と対応している. さらに, B の同値類 $[B] \in G/B$ を O と書くことにしよう. このとき, $U_0 \ni O = \{x = 0\}$, $U_\infty \not\ni O$ であって, $\mathcal{L}(m)|_{U_0}$, $\mathcal{L}(m)|_{U_\infty}$ はそれぞれ, U_0, U_∞ 上 trivialize される. この時, $\mathcal{L}(m)|_{U_0} \cong U_0 \times \mathbb{C}$ の cross-section と holomorphic function $\varphi_0\colon U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ は 1:1 に対応している． 同様に, $\mathcal{L}(m)|_{U_\infty} \cong U_\infty \times \mathbb{C}$ の cross-section と holomorphic function $\varphi_\infty\colon U_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ が 1:1 に対応していることがわかる．ここで, U_0, U_∞ をそれぞれ, $\mathbb{P}^1$ の 0, ∞ の近傍と同一視した.

ここで, bundle $\mathcal{L}(m)$ の global holomorphic section の次元を計算したいのだが, $U_0 \cap U_\infty$ すなわち, $x \neq 0$, $y \neq 0$ では,

$$\varphi_\infty(y) = \varphi_0(y^{-1})y^m$$

が成り立っている．したがって, $m \leq 0$ と仮定すると, $\mathcal{L}(m)$ の holomorphic global section の空間は

$$\varphi_0(x) = x^0, x^1, \cdots, x^m$$

で生成され, $(m+1)$-次元となることがわかる.

さて, このようなことを表現論的な立場で見直してみよう．いま, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, X 方向への Lie 微分を L_X と書くことにする．定義は, $(L_X\Phi)(p) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{-tX}p)|_{t=0}$ である．すると, $\mathcal{L}(m)$ の cross-section に対して, Lie 微分は以下のような operator となることがわかる.

$$\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_E = x^2\frac{d}{dx} - mx \\
H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_H = 2x\frac{d}{dx} - m \\
F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_F = \frac{d}{dx}
\end{aligned}$$

そこで, 次のようなことを考えてみよう． Bundle $\mathcal{L}(m)|_{U_0}$ の section $\varphi := \varphi_0 \in \Gamma(U_0, \mathcal{L}(m))$ に対して,

$$\mathbb{D}\varphi(0) := (\varphi(0), d\varphi(0), d^2\varphi(0), \cdots)$$

と置く. この時,

$$\varphi(0) \in \mathbb{C}$$

$$d\varphi(0) \in \mathfrak{g}^* \quad (\varphi(X)(0) = (d\varphi)(X)(0))$$

$$d^2\varphi(0) \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \quad (d^2\varphi(0)(X,Y) = (L_X L_Y \varphi)(0))$$

であるので, $\mathbb{D}\varphi(0) \in (T(\mathfrak{g}))^*$ となる.

さて, ここで得られた $\mathbb{D}\varphi(0)$ が完全積分可能性, すなわち

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]} \quad \text{for all} \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

をみたすことを要請する. これは, $\mathbb{D}\varphi(0) \in (U(\mathfrak{g}))^*$ となることを意味している.

さらに, Lie 微分の関係式により, $\mathbb{D}\varphi(0)$ は

$$M(-m) := (U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})E + U(\mathfrak{g})(H - m))) : \quad \text{Verma module}$$

の dual に入ることが必要である. ここで, Verma module $M(-m)$ については, 以下のことが知られている.

Fact 1.1. もし, $m \in \mathbb{Z}$ が $m \geq 1$ をみたせば, $M(-m)$ は既約な $\mathfrak{g}$-*module.* $m \leq 0$ ならば, $M(-m)$ には *maximal proper* $\mathfrak{g}$-*submodule* J が存在して, $M(-m)/J$ は $(m+1)$-次元既約 $\mathfrak{g}$-*module* となる.

したがって, $m \leq 0$ とすると, $\mathbb{D}\varphi(0) \in (M(-m)/J)^*$ となる φ だけを考えれば, その様な φ は $\mathcal{L}(m)$ 全体で定義された holomorphic section となる.

2. Current Conformal Blocks.

この章では、G-principal bundle が自明な場合に話を限って 1.2–1.3 節でのべたような性質を持つN点関数を別のかたちでとらえなおすことを説明する。それが、current conformal blocks の空間である。ここでは $(R, Q_1, \cdots, Q_N)$ および 点 Q_a における local coordinate z_a を $z_a(Q_a) = 0$ として固定する.

さて, R 上に次のようなN点関数が与えられているとする.

$$\langle X_1(z_1) \cdots X_m(z_m) \Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle dz_1 \cdots dz_m (dQ_1)^{\Delta_{\lambda_1}} \cdots (dQ_N)^{\Delta_{\lambda_N}}.$$

ただし、$\Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N)$ を固定して, $(z_1, \cdots, z_m) \in R^m$ についての form と考える. これを current の m 点関数とよび、その全体を象徴的に $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1 \cdots)$ と表すことにしよう。このとき Φ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N), \mathbb{C})$ の元 $\langle \Phi |$ を定める。

まずは $\langle \Phi | \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T(\hat{\mathfrak{g}})^{\otimes N}, \mathbb{C})$ を次のようにして決めよう。

1) $| 1 \rangle = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \in T(\hat{\mathfrak{g}})^{\otimes N}$ に対しては

$$\langle \Phi | 1 \rangle = \langle \Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle.$$

2) $| X(m)^a \rangle = 1 \otimes \cdots \otimes X(m) \otimes \cdots \otimes 1 \in T(\hat{\mathfrak{g}})^{\otimes N}$ (a 番目) に対しては

$$\langle \Phi | X(m)^a \rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_a} z_a^m \langle X(z_a) \Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle.$$

ここに, γ_a は Q_a をまわる loop である.

3) $| X_1(m_1)^a X_2(m_2)^a \rangle = 1 \otimes \cdots \otimes X_1(m_1) X_2(m_2) \otimes \cdots \otimes 1$ (a 番目) に対しては

$$\begin{aligned} &\langle \Phi | X_1(m_1)^a X_2(m_2)^a \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \iint dz_a^1\, dz_a^2 (z_a^1)^{m_1} (z_a^2)^{m_2} \langle X_1(z_a^1) X_2(z_a^2) \Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle. \end{aligned}$$

ここに積分は

Fig 2.1

である.

4) $a \neq b$ のとき, $|\,X(m)^a Y(n)^b\,\rangle = 1 \otimes \cdots \otimes X(m) \otimes \cdots \otimes Y(n) \otimes \cdots \otimes 1$ (それぞれ a 番目と b 番目) に対しては

$$
\begin{aligned}
&\langle\,\Phi\,|\,X(m)^a Y(n)^b\,\rangle \\
=&\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\iint dz_a\,dz_b (z_a)^m (z_b)^n \langle X(z_a) Y(z_b) \Phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\Phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle.
\end{aligned}
$$

ここに積分は

Fig 2.2

である.

以下同様であって、1.2–1.3 で述べたN点関数の性質により、$\langle\,\Phi\,|$ はただ一つ定まる。

ただし、積分路を取る取り方は

(a)

$$\begin{array}{ccc} X_1(m_1)^a & \cdots & X_p(m_p)^a \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ z_a^1 & \cdots & z_a^p \end{array}$$

右側を内側に, $|z_a^1| > \cdots > |z_a^p| > 0$.

(b) Q_a と Q_b, $a \neq b$ のまわりの積分路は disjoint に取る.

こうして current m 点関数全体 $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$ に対して $\langle\, \Phi \,|\, \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N), \mathbb{C})$ が定まった. ところで, $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$ について, $\langle\, \Phi \,|$ は各 $\Phi_m = \langle X_1(z_1) \cdots X_m(z_m) \Phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \Phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle$ と $z_1, \cdots, z_m$ をそれぞれ $\{Q_a\}$ たちで展開したとして, $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}) \subset \hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ と考える. すると Total residue $= 0$ により, $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})$ は $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ の subalgebra になる. 一方 $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$, $f \in H^0(R, \mathcal{O}(*\sum Q_a))$, $X \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathcal{H}(\vec{\lambda})$ について

$$\sum_{a=1}^{N} \langle\, \Phi \,|\, f(z_a) X^a(z_a) \,|\, u \,\rangle\, dz_a \in \sum_{a=1}^{N} \mathbb{C}((z_a)) dz_a.$$

これは, $\langle\, \Phi \,|\, X[f] \,|\, u \,\rangle\, dz$ なる R 上の meromorphic 1-form で, その pole は高々 $(Q_1, \cdots, Q_N)$ にあるものを定義している. これにより, 任意の $f \in H^0(R, \mathcal{O}(*\sum Q_a))$ に対して,

$$\sum_{a=1}^{N} \int_{\gamma_a} \langle\, \Phi \,|\, f(z_a) X^a(z_a) \,|\, u \,\rangle\; dz_a = 0.$$

ここで, 積分路 γ_a は Q_a をまわる互いに disjoint な loop である. また, $X^a(z_a) = \sum X(n)^a z_a^{-n-1} dz_a$ である. これは, $\sum_{a=1}^{N} \langle\, \Phi \,|\, X^a[f(z_a)] \,|\, u \,\rangle = 0$ を意味する. すなわち,

$$\langle\, \Phi \,|\, \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N) / \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N)), \mathbb{C})$$

に属する．ここで,

$$\mathcal{H}(\vec{\lambda}) := \mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(\lambda_N),$$

$$\mathcal{H}'(\vec{\lambda}) := \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec{\lambda})$$

とおいた.

Problem 2.1. $\langle \Phi | \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N), \mathbb{C})$ は $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N))$ 上で消えていると, この $\langle \Phi |$ は $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$ から来ているだろうか？

その前に一つ仮定をおこう．$\lambda_a \in \hat{P}_+(k)$ として, $\mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(\lambda_N)$ は $M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N)$ の quotient $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$-module である.

Assumption 2.2. $\langle \Phi |$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(\lambda_N), \mathbb{C}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N), \mathbb{C})$ に属する.

これにより,

$$\langle \Phi | \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda}), \mathbb{C})$$

となる.

Theorem 2.3.

$$\langle \Phi | \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda}), \mathbb{C})$$

に対し, *unique* に *current* の m 点関数の系 $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$ *on* $(R, Q_1, \cdots, Q_N)$ が存在して, $\langle \Phi |$ はこの Φ に対応している.

このことを見るためには, 次の stability と呼ばれる現象について述べよう.

N 点つきの Riemann 面 $\mathfrak{X} = (R, Q_1, \cdots, Q_N, z_1, \cdots, z_N)$ に対して $\tilde{\mathfrak{X}} = (R, Q_1, \cdots, Q_N, Q_{N+1}, z_1, \cdots, z_N, z_{N+1})$ ともう一点 Q_{N+1} を付け加え, z_{N+1} なる local coordinate を勝手に固定しよう．$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ について, $\lambda_{N+1} = 0 \in \hat{P}_+(k)$ として $\tilde{\vec{\lambda}} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N, \lambda_{N+1})$ を考える．この時,

$$j \colon \mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(\lambda_N) \hookrightarrow \mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(\lambda_N) \otimes \mathcal{H}(\lambda_{N+1}), \quad u \mapsto u \otimes u_{\lambda_{N+1}},$$

$$\langle \tilde{\Phi} | \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\tilde{\vec{\lambda}})/\hat{\mathfrak{g}}_-(\tilde{\mathfrak{X}})\mathcal{H}'(\tilde{\vec{\lambda}}), \mathbb{C})$$

について, $j(\langle\,\tilde\Phi\,|\,) = \langle\,\Phi\,|\, \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\lambda), \mathbb{C})$ は $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec\lambda)$ を消すことがわかる.

$$j^*\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\tilde\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\tilde\lambda}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec\lambda)/\mathcal{H}'(\vec\lambda), \mathbb{C})$$

が well-defined.

Proposition 2.4. (Stability). 上の *map* j^* は $\mathbb{C}$-*vector space* の同型を与える.

いま, $\langle\,\Phi\,| \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec\lambda)/\mathcal{H}'(\vec\lambda), \mathbb{C})$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $u \in \mathcal{H}(\vec\lambda)$ を固定すると,

$$\sum_{a=1}^{N} \langle\,\Phi\,|\,\rho_a(X)(n) z_a^{-n-1}\,|\,u\,\rangle\, dz_a \in \sum_{a=1}^{N} \mathbb{C}((z_a)) dz_a$$

は

$$\langle\,\Phi\,|\,X(z)\,|\,u\,\rangle\, dz \in H^0(R, \Omega^1(*\textstyle\sum Q_a))$$

を define する. ($\hat{\mathfrak{g}}$ の $\mathcal{H}(\vec\lambda)$ の a 成分への作用を ρ^a で表している).

一方, $j^*\langle\,\tilde\Phi\,| = \langle\,\Phi\,|$ として, 各点 (Q_{N+1}, z_{N+1}), $\langle\,\tilde\Phi\,| \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\tilde\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\tilde\lambda}), \mathbb{C})$, 各 $u \in \mathcal{H}(\vec{\tilde\lambda})$, $X \in \mathfrak{g}$, $\langle\,\tilde\Phi\,|\,u \otimes X(-1)\,|\,u_{\lambda_{N+1}}\,\rangle$ を (Q_{N+1}, z_{N+1}) の関数と考える.

Proposition 2.5. $z = Q_{N+1}$ の関数として,

$$\langle\,\Phi\,|\,X(z)\,|\,u\,\rangle = \langle\,\tilde\Phi\,|\,u \otimes X(-1)\,|\,u_{\lambda_{N+1}}\,\rangle\,.$$

すなわち, (Q_{N+1}, z_{N+1}) について Q_{N+1} の *local coordinate* z を $z - z(Q_{N+1}) = \xi_{N+1}$ ととると, 上の両辺は一致する.

Current conformal blocks の定義を Riemann 面 R として特異点を持つ場合に拡張しておくことは, 後の議論のために重要である. 特異点として, 高々通常 2 重点を持つ場合のみを考えよう. R を通常 2 重点を持つものを考える. $P_1, \cdots, P_k \in R$ を特異点とする. $\pi\colon \tilde R \longrightarrow R$ を R の正規化とする. この時, $\pi^{-1}(P_j) = \{P'_j, P'_j\}$ と 2 点からなり, P_j 以外では π は同型.

Fig 2.3

$Q_1, \cdots, Q_N \in R$ を相異なる R の点として, R の各既約成分 R_j 上には少なくとも一つの Q_a が載っていると仮定する. $\mathfrak{X} = (R, Q_1, \cdots, Q_N, z_1, \cdots, z_N)$ を考える.

$$\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) = \sum_{a=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_a)) \oplus \mathbb{C}K$$
$$\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}) = \mathfrak{g} \otimes H^0(R, \mathcal{O}(*\textstyle\sum Q_a))$$

とおき, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \hat{P}_+(k)$ について

$$\mathcal{V}^\dagger(\vec{\lambda}, \mathfrak{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda}), \mathbb{C})$$

とおく.

いま, $\tilde{R}$ を考え, P'_a, P''_a にも local coordinate z'_a, z''_a をおき,

$$\tilde{\mathfrak{X}} = (\tilde{R}, Q_1, \cdots, Q_N, P'_1, P''_1, \cdots, P'_k, P''_k, z'_1, \cdots, z''_k)$$

を考えよう. P'_j には $\mu'_j \in \hat{P}_+(k)$, P''_j には $\mu''_j = \mu'^\dagger_j \in \hat{P}_+(k)$ をおく. ここに, $\mu^\dagger = -w_0(\mu)$, w_0 は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の最長表示の元.

Proposition 2.6. 次の自然な同型写像が作れる.

$$\mathcal{V}^\dagger(\vec{\lambda}, \mathfrak{X}) = \sum_{(\mu'_1, \cdots, \mu'_k)} \mathcal{V}^\dagger(\vec{\lambda}, \vec{\mu}', \vec{\mu}'', \mathfrak{X}).$$

22

この時, $\langle \Phi \mid \in \mathcal{V}^{\dagger}(\vec{\lambda}, \mathfrak{X})$ について current の m 点関数の系 $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$ が対応する. が R 上の 1-form $X(z)dz$ は R 上の双対化層 ω_R の section と考えるのが自然である. R の非特異点の近くでは ω_R と正則 1-form の層 Ω_R^1 は同じものである.

3. Current Conformal Block の有限次元性の証明.

$\mathcal{H}(\Lambda)$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の highest weight を持つ intergral 表現とする. (Appendix 1). ここで, $\Lambda \in \hat{P}_+ \subset \hat{\mathfrak{g}}$. この時, $l = \mathrm{rank}\,\hat{\mathfrak{g}}$ とすると, $\mathfrak{g}$ の coroot $h_1, \cdots, h_l \in \hat{\mathfrak{h}}$, $h_0 = K - h_\theta$ を使って,

$$\hat{P}_+ = \sum_{j=0}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_j, \quad h_\theta = \sum_{j=1}^{l} a_j^\vee h_j$$

と書ける. ここで, $\Lambda_j(h_i) = \delta_{ij}$, $(i, j = 0, 1, \cdots, l)$, $a_j \geq 1$.

以下, $\mathfrak{X} = (R; Q_1, \cdots, Q_N)$ を fix して考える. $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, $S_0 = (Q_1, \cdots, Q_N)$ とおき,

$$\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) := \sum_{a=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_a)) \oplus \mathbb{C}K$$

とする. (Applendix 1). さらに, $\mathcal{H}(\vec{\lambda}) := \mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(\lambda_N)$ とおく. ρ を $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ の $\mathcal{H}(\vec{\lambda})$ への作用とする. この作用は, $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ の第 a 番めの要素は $\mathcal{H}(\vec{\lambda})$ の第 a 番めに作用し, $\mathbb{C}K$ へは, $k \cdot \mathrm{id}$ で作用するとする. この時, $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ は $M(\vec{\lambda}) = M(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes M(\lambda_N)$ へも作用している. この時,

$$\begin{aligned} &\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}) = \mathfrak{g} \otimes H^0(R, \mathcal{O}(*S_0)) \subset \hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) \quad \text{subalgebra} \\ &X \otimes f \mapsto (\sum_{a=1}^{N} X \otimes f(z_a)) + 0 \cdot K \end{aligned}$$

である.

さて, current conformal block $\langle\,\Phi\,| = (\Phi_0, \Phi_1, \cdots)$ は

$$\langle\,\Phi\,| \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\vec{\lambda})/\hat{\mathfrak{g}}_-(M(\vec{\lambda})), \mathbb{C})$$

であった. いま, 次の図式が成り立っている.

$$\begin{tikzcd} M(\vec{\lambda}) \arrow[r] & \mathcal{H}(\vec{\lambda}) \\ \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})M(\vec{\lambda}) \arrow[r] \arrow[u, "\subset"] & \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec{\lambda}) \arrow[u, "\subset"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\langle\,\Phi\,|\ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\vec{\lambda})/\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})M(\vec{\lambda}),\mathbb{C}) \arrow[r, "\subset"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\vec{\lambda}),\mathbb{C}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec{\lambda}),\mathbb{C}) \arrow[r, "\subset"] \arrow[u, "\subset"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\lambda}),\mathbb{C}) \arrow[u, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

したがって, 以下では,

$$\langle\,\Phi\,|\ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec{\lambda}),\mathbb{C})$$

を Ansatz とする.

Theorem 3.1.

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec{\lambda}),\mathbb{C}\right) < \infty$$

over $\mathbb{C}$*.*

Proof. この定理を示すためには,

$$\dim\left(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})\mathcal{H}(\vec{\lambda})\right) < \infty \tag{3.1}$$

を示せば良い.

はじめに, それぞれの algebra がどのくらいの “大きさ” があるかを簡単に見ておこう. $S^*(\cdot)$ を $\cdot$ 上の多項式環とする. この時,

$$\begin{aligned}
M(\lambda) &= U(\hat{\mathfrak{g}})/U(\hat{\mathfrak{g}})\hat{\mathfrak{n}}_+ + \sum_{H\in\mathfrak{h}} U(\hat{\mathfrak{g}})(H-\lambda(H)) \\
&\cong U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \sim S^*(\hat{\mathfrak{g}}_-), \\
\hat{\mathfrak{g}}_- &= \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z^{-1}]z^{-1} \oplus \mathfrak{n}_-
\end{aligned}$$

である. さらに, $M(\lambda) \rightsquigarrow \mathcal{H}(\lambda)$ は, だいたい, $f^{\lambda(h_i)+1}$ で割っている. したがって,

$$\mathcal{H}(\lambda) \sim S^*(\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[z^{-1}]z^{-1})$$

位の大きさ. これは, 無限次元であって, でっかい！したがって, $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})$ で割る操作が, 問題となる.

$$\mathfrak{g} \otimes H^0(R, \mathcal{O}(*S_0)) = \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}) \subset \sum_{a=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_a)) \oplus \mathbb{C}K$$

であるので, $H^0(R, \mathcal{O}(*S_0)) \subset \mathbb{C}((z_a))$ がどのくらいあるかということが問題となる. 実際,

$$f \in H^0(R, \mathcal{O}(*S_0))$$

について, 点 $(Q_1, \cdots, Q_N)$ での singularity part $\sum_{a=1}^N f(z_a) \in \sum_{a=1}^N \mathbb{C}[z_a^{-1}]z_a^{-1}$ を対応させると, f は up to constant でこの singularity part で unique に決まり, $\sum_{a=1}^N \mathbb{C}[z_a^{-1}]z_a^{-1}$ の中での $H^0(R, \mathcal{O}(*S_0))$ の image の codimension は $(g-1)$ である.

(3.1) を示すために, $\mathcal{H}(\vec{\lambda})$, $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})$ に filtration を入れる. はじめに, $\mathcal{H}(\vec{\lambda})$ の filtration を以下のように入れる.

$$F_m\mathcal{H}(\lambda) := \mathrm{span}\left\{X_1(-n_1)\cdots X_p(-n_p)v_\lambda : \sum n_l \leq m\right\},$$

ここで, v_λ は $\mathcal{H}(\lambda)$ の highest weight vector. すると,

$$F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \cdots$$

$F_{-1} = \{0\}$, $F_0 = U(\mathfrak{g})v_\lambda$, $\dim F_m/F_{m-1} < \infty$ となる.

さらに,

$$F_m\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]]z^{-m} \oplus \mathbb{C}K$$

とおくと, (ただし, $m \geq 1$ では $\mathbb{C}K$ を除く)

$$\cdots \supset F_1\hat{\mathfrak{g}} \supset F_0\hat{\mathfrak{g}} \supset F_{-1}\hat{\mathfrak{g}} \supset \cdots$$

このとき, 次が成り立つ.

$$[F_m\hat{\mathfrak{g}}, F_n\hat{\mathfrak{g}}] \subset F_{m+n}\hat{\mathfrak{g}} \tag{3.2}$$

$$F_m\hat{\mathfrak{g}} \cdot F_n\mathcal{H}(\lambda) \subset F_{m+n}\mathcal{H}(\lambda) \tag{3.3}$$

さらに,

$$F_m\mathcal{H}(\vec{\lambda}) = \sum_{m_1+\cdots+m_N=m} F_{m_1}\mathcal{H}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes F_{m_N}\mathcal{H}(\lambda_N)$$
$$F_m\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) = \sum_{m_1+\cdots+m_N=m} F_{m_1}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_1)) \oplus \mathbb{C}K) \otimes \cdots \otimes F_{m_N}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_1)) \oplus \mathbb{C}K)$$

とおくと,

$$[F_m\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}), F_n\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})] \subset F_{m+n}\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) \tag{3.4}$$

$$F_m\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) \cdot F_n\mathcal{H}(\vec{\lambda}) \subset F_{m+n}\mathcal{H}(\vec{\lambda}) \tag{3.5}$$

が成り立つ. そこで, $\mathrm{Gr}_m := F_m/F_{m+1}$ を $\mathcal{H}(\vec{\lambda})$, $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ についてとる. さらに, $\mathrm{Gr}_\bullet = \sum_m \mathrm{Gr}_m$ とおくと, $\mathrm{Gr}_\bullet\, \mathcal{H}(\vec{\lambda})$ は $\mathrm{Gr}_\bullet\, \hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$-module となり, $\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})$ に $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ からの induced filtration をいれると,

$$\mathrm{Gr}_\bullet\, \hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) \supset \mathrm{Gr}_\bullet\, \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}) \quad \text{graded Lie subalgebra}$$

さらに, $\mathcal{H}(\vec{\lambda}) \supset \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X})v(\vec{\lambda}) =: \mathcal{H}'(\vec{\lambda})$ に induced filtration を入れると,

$$0 \longleftarrow \mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda}) \longleftarrow \mathcal{H}(\vec{\lambda}) \longleftarrow \mathcal{H}'(\vec{\lambda}) \longleftarrow 0 \tag{3.6}$$

なので, $\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda})$ には, quotient filtration が入る. よって, 次の完全系列を得る.

$$0 \longleftarrow \mathrm{Gr}_\bullet \left(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda})\right) \longleftarrow \mathrm{Gr}_\bullet\, \mathcal{H}(\vec{\lambda}) \longleftarrow \mathrm{Gr}_\bullet\, \mathcal{H}'(\vec{\lambda}) \longleftarrow 0. \tag{3.7}$$

したがって,

$$\mathrm{Gr}_\bullet\, \mathcal{H}(\vec{\lambda}) \supset [\mathrm{Gr}_\bullet\, (\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}))] \left(\mathrm{Gr}_\bullet\, \mathcal{H}(\vec{\lambda})\right)$$

となる. 以下,

$$[\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})]' := (\mathrm{Gr}_\bullet\,\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}))\,\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})$$

とおく.

Proposition 3.2.

$$\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})/[\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})]' \longrightarrow \mathrm{Gr}_\bullet\left(\mathcal{H}(\vec{\lambda})/\mathcal{H}'(\vec{\lambda})\right) \longrightarrow 0$$

surjective が成立する.

以後,

$$\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})/[\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})]'$$

の有限次元性を示す.

今, 次のようになっている.

$$\sum_{a=1}^{N}\mathbb{C}[z_a^{-1}]z_a^{-M} \subset \mathrm{Gr}_\bullet\,H^0(R,\mathcal{O}(*S_0)) \subset \sum_{a=1}^{N}\mathbb{C}[z_a^{-1}]z_a^{-1} \oplus \mathbb{C}\cdot 1, \quad \text{for } M \gg 1.$$

したがって

$$\mathcal{L}_- := \mathfrak{g}\otimes\sum_{a=1}^{N}\mathbb{C}[z_a^{-1}]z_a^{-1} \subset \mathrm{Gr}_\bullet\,\hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{X}) \subset \sum_{a=1}^{N}\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z_a^{-1}] =: \mathcal{L} \subset \mathrm{Gr}_\bullet\,\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$$

を考えよう.

$$H := \mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda}) = U(\mathcal{L})\cdot v(\vec{\lambda})$$

を $U(\mathcal{L})$-module と考える. ここで, $v(\vec{\lambda}) = v(\lambda_1)\otimes\cdots\otimes v(\lambda_N)$. さらに, $H' := U(\mathcal{L}_-)\cdot v(\vec{\lambda})$ とおく. すると,

$$H/H' \longrightarrow \mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})/[\mathrm{Gr}_\bullet\,\mathcal{H}(\vec{\lambda})]' \longrightarrow 0$$

が成り立つ. 一方, $\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}$: ideal であるので,

$$\bar{\mathcal{L}} := \mathcal{L}/\mathcal{L}_-$$

は有限次元 Lie algebra であり,

$$H/H' : \quad U(\bar{\mathcal{L}})\text{-module with 1-generator}$$

である. そこで, 以後の目的は, 次のようになった.

目的 3.. $U(\bar{\mathcal{L}})$-module $\bar{H} := H/H'$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元. $\bar{H}$ は $U(\bar{\mathcal{L}})$-module として, 1-generator.

今,

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{a=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z_a^{-1}]/(z_a^{-M})$$

となっている.

以後, $\bar{\mathcal{L}}$ は有限次元 Lie algebra, $\bar{H} = U(\bar{\mathcal{L}})v$ という状況だけを利用する. そこで, $U(\bar{\mathcal{L}})$ に filtration を入れる.

$$G_{-1}U(\bar{\mathcal{L}}) \subset G_0 U(\bar{\mathcal{L}}) \subset G_1 U(\bar{\mathcal{L}}) \subset \cdots$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&G_{-1}U(\bar{\mathcal{L}}) = \{0\}, \\
&G_0 U(\bar{\mathcal{L}}) = \mathbb{C} \cdot 1, \\
&G_1 U(\bar{\mathcal{L}}) = \mathbb{C} \cdot 1 + \bar{\mathcal{L}}, \\
&G_2 U(\bar{\mathcal{L}}) = \mathbb{C} \cdot 1 + \bar{\mathcal{L}} + \bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{L}}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

となっている.

$$G_m \bar{H} := G_m U(\bar{\mathcal{L}}) \cdot v$$

とおくと,

(3.8) $$G_m U(\bar{\mathcal{L}}) \cdot G_n U(\bar{\mathcal{L}}) \subset G_{m+n} U(\bar{\mathcal{L}})$$

(3.9) $$G_m U(\bar{\mathcal{L}}) \cdot G_n \bar{H} \subset G_{m+n} U \bar{H}$$

が成り立つ.

そこで, $\mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}})$-module $\mathrm{Gr}_\bullet \bar{H}$ を考えよう. $\mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}})$ は

(1) $\mathbb{C}$ 上可換環.

(2) Poisson algebra.

になっている. ここで, Poisson algebra とは, Poission product $\{\cdot,\cdot\}$ で,

$$\{\cdot,\cdot\}\colon\ \mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}}) \otimes \mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}})$$

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{g,fh\}$$

$$\{f,g\} = -\{f,g\}$$

をみたしているものが存在する algebra で, いま, $\{X,Y\} = [X,Y]$ とおけば良い. 特に, $\mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}})$ は多項式環である.

今, $\mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}})$ の ideal $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} := \{A \in \mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}}) : A\,\mathrm{Gr}_\bullet \bar{H} = 0\}$$

とおく.

Theorem 3.3. (Gabber). $\mathfrak{a}$ の *radical* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ は *Poisson product* で閉じている.

これは, characteristic variety の involutiveness の特別な場合. したがって, 有限次元性を証明するには, $\bar{\mathcal{L}}$ の basis $\{X_\alpha \otimes z_a^{-n}\, h_i \otimes z_a^{-n}\}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, $a = 1, \cdots, N$, $n = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, l$ が $\sqrt{\mathfrak{a}}$ に入ることを示せば良い. 今, $\alpha \in \Delta_+$ に対して,

$$X_\alpha \otimes z_a^{-n} \in \sqrt{\mathfrak{a}}$$

である. また,

$$\{X_{\alpha_i} \otimes 1, X_{-\alpha_i} \otimes z_a^n\} = \mathrm{const} \cdot h_i \otimes z_a^{-n}$$

であるので,

$$h_i \otimes z_a^{-n} \in \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

したがって, $\mathcal{L}$ の basis は全て $\sqrt{\mathfrak{a}}$ に入ることがわかった.

$\mathrm{Gr}_\bullet F$ は有限生成可換環 $\mathrm{Gr}_\bullet U(\bar{\mathcal{L}})$ の有限生成 module. ここで, 次のような事実が使う. R を $\mathbb{C}$ 上有限生成な可換環, M を有限生成 R-module とおき,

$$\mathfrak{a} := \{a \in R : aM = 0\}$$

とするとき, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ が maximal ideal ならば $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$. これにより, $\dim \mathrm{Gr}_\bullet \bar{\mathcal{H}} < \infty$: 有限次元がいえた. ∎

Remark. ここの証明では, Riemann 面 R は non-singular であると仮定したが, 実は, R は reduced complex algebraic curve over $\mathbb{C}$, Q_i: non-sigular points で, $R = \cup R_j$ と既約成分に分解した時, 各 R_j 上には少なくとも一つの Q_i が乗っているという条件の元で, 証明ができる.

Appendix 1. Affine Lie algebra.

A.1. Affine Lie algebra と Verma module.

Simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ に associate した affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ とは, $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}K$ である. ここで, $\mathbb{C}((z))$ は z についての formal Laurent series の作る体, K は不定元であって, 以下の relation で $\hat{\mathfrak{g}}$ に Lie algebra structure を与える.

(1) $K \in$ center of $\hat{\mathfrak{g}}$.

(2) $[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg + \mathrm{Res}_{z=0}(df\, g) \cdot (X, Y)K$.

ここで, $X(m) := X \otimes z^m$ と置くと, 上の relation (2) は,

$$[X(m), Y(n)] = [X, Y](m+n) + m\delta_{m+n,0}(X, Y) \cdot K$$

と書ける. さて, $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ とする時,

$$\hat{\mathfrak{n}}_+ := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]]z + \mathfrak{n}_+ \otimes 1,$$

$$\hat{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} \otimes 1 + \mathbb{C}K$$

と与えると, $\hat{\mathfrak{h}}$ は abelian subalgebra となる. そこで highest weight $\lambda \in \hat{P}_+(k)$ を fix して, $\hat{\mathfrak{g}}$ の Verma module $M(k, \lambda)$ を次で定義する. ここで, $\hat{P}_+(k)$ は dominant integhral weight の空間である.

$$M(k, \lambda) := U(\hat{\mathfrak{g}})/(U(\hat{\mathfrak{g}})\hat{\mathfrak{n}}_+ + \sum_{H \in \mathfrak{h}} U(\hat{\mathfrak{g}})(H - \lambda(H)) + U(\hat{\mathfrak{g}})(K - k)).$$

さらに, $\hat{\mathfrak{b}}_+ := \hat{\mathfrak{n}}_+ + \hat{\mathfrak{h}}$ と置く. いま, $v(\lambda, k) \in M(k, \lambda)$ を

1) $v(k, \lambda)$: generator,

2) $X(n)v(k, \lambda) = 0$, $n \geq 1$,

$X(0)v(k, \lambda) = 0$, $X \in \mathfrak{n}_+$,

$X(0)v(k,\lambda) = \lambda(H)v(k,\lambda)$, $X \in \mathfrak{h}$,

3) $K = k \cdot \mathrm{id}$

となるものとする. 以下 k を fix し, $M(\lambda)$, $v(\lambda)$ と書くことにする.

Lie algebra $\mathfrak{g}$ の rank とは, Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ の次元のことであり, $l = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}$ とおく. さらに, $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ とする. ただし, Δ_+ は positive root の集合であり, Δ_- は negative root の集合である. この時, 対応する simple root 全体のなす集合 Π を $\Pi := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\} \subset \mathfrak{h}^*$, simple coroot のなす集合 $\Pi^\vee$ を $\Pi^\vee := \{h_1, \cdots, h_l\} \subset \mathfrak{h}$ と書く. また, $\mathfrak{g}$-不変内積 $(\cdot,\cdot)$ を, highest root θ に対して, $(\theta,\theta) = 2$ と normalize しておく. この時, $\mathfrak{h}$ の adjoint action に関する同時固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

とする.

すると, $\mathfrak{g}$ の generator $(e_i, f_i, h_i)_{i=1,\cdots,l}$ で次をみたすものがとれる.

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i \quad \text{for } \forall h \in \mathfrak{h} \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i \quad \text{for } \forall h \in \mathfrak{h}. \end{cases}$$

すると, 各 i ごとに, (e_i, f_i, h_i) は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型な Lie subalgebra を生成する.

Definition A.1. $\hat{\mathfrak{g}}$-module M が可積分とは, M が weight space 分解

$$M = \sum_{\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*} M_\lambda$$

を持ち, $i = 0, 1, \cdots, l$ に対して, (e_i, f_i, h_i)-module と考えると, 有限次元 module の和となっている.

Verma module $M(\lambda)$ について次の命題が成り立つ.

Proposition A.2.

(1) $M(\lambda)$ は *unique* な *maximal proper* $\hat{\mathfrak{g}}$*-submodule* $J(\lambda)$ を持ち,

$$\mathcal{H}(\lambda) := M(\lambda)/J(\lambda)$$

は既約で *hightest weight* λ を持つ.

(2) $\mathcal{H}(\lambda)$ が可積分になることと $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が全ての $i = 0, 1, \cdots, l$ に対してなりたつこととは同値.

A.2. Riemann 面に付随した affine Lie algebra.

R を Riemann 面, $S_0 := \{Q_1, \cdots, Q_N\}$ を R 上の相異なる N 個の点とする. $\mathfrak{X} = (R, Q_1, \cdots, Q_N)$ を点つきの Riemann 面とする. さらに, 点 Q_a のまわりの local coordinate z_a, $z_a(Q_a) = 0$ をとってこれを固定する. この時, affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ は次のように定義される.

$$\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) = \sum_{a=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_a)) \oplus \mathbb{C}K.$$

ここで, $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ の Lie algebra structure は

$$\begin{aligned}
&[\sum_{a=1}^{N} X_a \otimes f_a, \sum_{a=1}^{N} Y_a \otimes g_a] \\
&= \sum_{a=1}^{M} [X_a, Y_a] \otimes f_a g_a + L \sum_{a=1}^{N} (X_a, Y_a) \cdot \operatorname*{Res}_{a=0}(df_a g_a) \\
&K \in \ \text{center}
\end{aligned}$$

として定義されている. さらに, $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ の Lie subalgebra $\hat{\mathfrak{g}}_{-}(\mathfrak{X})$ は,

$$\hat{\mathfrak{g}}_{-}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{g} \otimes H^0(R, \mathcal{O}(*S_0))$$

で定義される. ここで, $H^0(R, \mathcal{O}(*S_0))$ は, R 上の有理型関数で pole を S_0 のみに持つもの全体の空間である.

References.

[**1**] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, in "Advanced Studies in Pure Math., Integral Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics," 1989, pp. 459–566.

[**2**] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodcikov, *Infinite conformal symmetries in two dimensional quantum filed theory*, Nucluar Physics **B 241** (1984), 333-380.

[**3**] D. Freidan and S. Shenker, *The analytic geometry of two-dimensional conformal filed theory*, Nucluar Physics **B 281** (1987), 509–545.

[**4**] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodocikov, *Current algebra and Wess-Zumino models in two dimension*, Nucluar Physics **B 247** (1984), 83–103.

その他に関しては, [**1**] の References を参照して下さい.

Connection 付きの hermitian line bundle をめぐって

牛腸 徹 （東京大学・数理科学研究科）

目　　次

"connection 付きの hermitian line bundle をめぐって"

0. Introduction

最近, 場の量子論の考え方が陰に陽に数学のいろいろな分野に入ってきて様々な影響を与えているわけですが, 幾何学の分野も例外ではないと思います。これは主にWittenによるところが大きいのではないでしょうか。Wittenはいわゆるpath integralを基礎において議論を進めることが多いのですが, “これは厳密でない” という心理的な障害を乗り越えてしまえば, 幾何の人にとっては非常に分かりやすい議論なのではないかと思います。

物理には, Hamilton形式と Lagrange形式と呼ばれる一見異なる２つの定式化があります。ここ数年, 数学でもconformal field theoryの周辺の話題を耳にすることが多くなりましたが, それらは主にoperator formalismという前者の形式にもとずく議論でなされることが多く, 数学的には厳密なのですが, 幾何の人にとっては少しイメージがつかみにくいのではないかと思います。それに対してpath integralにもとづく後者の形式は多少厳密性に欠けますが, 背後にある幾何学的な定式化が見やすくイメージはつかみやすいのではないかと思います。筆者の周辺では「path integralを用いて話をしてくれた方が分かりやすい」という “数学者” もいるほどです。実際には, ２つの定式化のうちどちらか一方が他方より優れているということはなく, 見かけは異なるのに, それらは全く同じものである (と信じる) ということが豊富な数学を生みだすもとになっているのではないかと思います。

さて, この文章では, そうした幾何学的定式化の最も基礎をなしていると思われる部分を解説したいと思います。場の理論では多様体 M上の場のなす無限次元空間$\mathcal{F}_M$を問題にしますが, 幾何学的には path integralは $\mathcal{F}_M$上の適当な line bundleのsectionという解釈ができます。したがって, line bundleの幾何というのが根底にあると考えられるわけですが, ここでは, 単なる line bundleではなく “connection付きのhermitian line bundle” というものが最も基礎にある概念であるという立場をとりたいと思います。

というわけで, この文章では “connection付きのhermitian line bundle” の周辺の簡

単な事柄をまとめてみました。

内容については目次を見ていただければ大体予想が付くと思われますので, ここでは大まかに述べるにとどめます。

§1 で “closed 2-form 付きの manifold”(M, ω) と “connection 付きの hermitian line bundle”$(L, \nabla) \to M$が “同じ” 対象であることを説明します。

§2 から§6 までが本論といったところで, これら 2 つの対象 (M, ω) と $(L, \nabla) \to M$の持つ symmetry ということを中心概念に据えてまとめてみました。よく知られているように symplectic manifold M上の関数の空間 $C^\infty(M)$ は Poisson bracket に関して Lie 環をなしますが, その幾何学的な意味はあまり強調されることはないように思われます。ここでは「$C^\infty(M)$ は “connection 付きの hermitian line bundle”$(L, \nabla) \to M$ の infinitesimal symmetry である」という立場を全面に押し出して話を進めたいと思います。symplectic geometry の教科書でも（不思議なことに) “connection 付きの hermitian line bundle” の symmetry を強調したものは見かけないのですが, これを中心に据えることで, moment map と prequantum bundle への作用の持ち上げの関係など, いろいろな概念の有機的なつながりが見やすくなるのではないかと思います。

§7 では関連する話題として geometric quantization ということを簡単に説明します。

§8 では §6 までの内容の応用として Lie 群の central extension を作るということを説明します。特に Wess-Zumino-Witten model の基礎となる Loop 群の central extension についても簡単に触れます。

§9 では 前に path integral は場の空間上の “connection 付きの hermitian line bundle” の section とみなせるといったことの実例として Chern Simons gauge 理論を取り上げ, その出発点となるべき部分を説明しました。

全体としてあまり予備知識を仮定しないで, 背後にある思想が浮きでるように書いてみたつもりですが, 多少お話調になりすぎたかもしれません。興味を持たれた読者がさらに進んだ話題を扱った文献にあたられることを期待したいと思います。

最後に, 原稿の書きはじめから type を打ち終わるまで, 終始 “温かい励まし” を与

えてくれた深谷 賢治 氏に感謝したいと思います。また, 大槻 知忠, 後藤 竜司, 武部 尚志, 今野 宏の諸氏には typing の際に助けていただきました。ここに記して感謝の意を表したいと思います。

1. connection 付きの hermitian line bundle

まず, hermitian line bundle とその上の connection について必要なことを簡単に復習しましょう。

M を C^∞-manifold, $L \to M$ を C^∞-hermitian line bundle, ∇ を L 上の hermitian connection とします。local に open set $U(\subset M)$ 上で (hermitian line bundle として) $L|_U \cong U \times \mathbb{C}$ と自明化して, $\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha, \quad \alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ と表わします。このとき, $c_1(\nabla) := d\alpha$ と定めると, $c_1(\nabla)$ は L の局所自明化によらず M 上の global な closed 2-form を定めます。これを connection ∇ の *1st Chern form* と呼びます。$c_1(\nabla)$ の定める cohomology class $[c_1(\nabla)] \in H^2(M;\mathbb{R})$ は connection ∇ のとり方によらないので, これを $c_1(L)$ と書いて line bundle L の *1st Chern class* と呼びます。

いま, $\Sigma' \subset M$ を compact oriented 2-dimensional submanifold, $\partial\Sigma' = C(\cong S^1)$ とします。このとき, C に沿った connection ∇ の holonomy $Hol_C(\nabla)$ は Stokes の定理を用いると,

$$Hol_C(\nabla) = e^{2\pi\sqrt{-1}\int_\Sigma c_1(\nabla)}$$

と表わせます。$\Sigma \subset M$ を closed oriented 2-dimensional submanifold とするとき, Σ を $\Sigma = \Sigma_1 \cup_C \Sigma_2, \partial\Sigma_1 = C = -\partial\Sigma_2$ と分解して,

$$Hol_C(\nabla) = e^{2\pi\sqrt{-1}\int_{\Sigma_1} c_1(\nabla)} = e^{-2\pi\sqrt{-1}\int_{\Sigma_2} c_1(\nabla)}$$

と２通りに表わします。このときこれらの値が等しいことから $\int_\Sigma c_1(\nabla) \in \mathbb{Z}$ でなければならないことが分かります。このことから $c_1(L) \in H^2(M;\mathbb{Z})$ となることが分かります。

以上から, connection 付きの hermitian line bundle $(L, \nabla) \to M$ を考えると $H^2(M;\mathbb{Z})$ の元 $c_1(L)$ を代表する closed 2-form $c_1(\nabla)$ が対応させられることが分かりました。

次に逆を考えてみましょう。M 上に closed 2-form $\omega \in \Omega^2(M;\mathbb{R})$ で, $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$ となるものが与えられたとき, connection 付きの hermitian line bundle

$(L,\nabla)\to M$ で $c_1(\nabla)=\omega$ となるものはどれくらいあるのでしょうか。よく知られているように,

$$c_1 : \{M\text{上の hermitian line bundle の同型類}\} \xrightarrow{\sim} H^2(M;\mathbb{Z})$$

ただし, c_1は 1st Chern class を対応させる写像

という同型があるので, L は $c_1(L)=[\omega]$ となるものとして (同型を除いて) unique に定まります。

いま, L 上の勝手な hermitian connection を ∇_o として,

$$\nabla=\nabla_o-2\pi\sqrt{-1}\alpha,\quad \alpha\in\Omega^1(M,\mathbb{R})$$

という hermitian connection ∇ を考えると,

$$c_1(\nabla)=c_1(\nabla_o)+d\alpha$$

となるので, $c_1(\nabla)=\omega$ となる hermitian connection は少なくとも 1 つは存在することが分かります。同様にして, $c_1(\nabla)=\omega$ となる hermitian connection ∇_o を 1 つ fix すると, $c_1(\nabla)=\omega$ となる他の hermitian connection ∇ は,

$$\begin{array}{ccc} (L,\nabla) & \cong & (L\otimes\underline{\mathbb{C}},\nabla_o\otimes\nabla') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

ただし, $\underline{\mathbb{C}}:=M\times\mathbb{C}\to M$ は trivial hermitian line bundle,

∇' は$\underline{\mathbb{C}}$上の flat hermitian connection

という形で与えられることが分かります。したがって, $c_1(\nabla)=\omega$ となる hermitian connection ∇ のとり方には “flat $U(1)$ connection の moduli space”$=H^1(M;\mathbb{R})/H^1(M;\mathbb{Z})$ 分だけの ambiguity があることが分かります。特に,

42

$H^1(M;\mathbb{R}) = 0$ ならば, connection 付きの hermitian line bundle $(L, \nabla) \to M$ で $c_1(\nabla) = \omega$ となるものが（同型をのぞいて) unique に存在することが分かります。

以上の結果をまとめてみましょう。

Notation

- $\mathcal{M}_{(M,\omega)} := \{$connection 付きの hermitian line bundle $(L, \nabla) \to M | \quad c_1(\nabla) = \omega \quad \}/\sim$

ただし, M上の connection 付きの hermitian line bundles $(L, \nabla), (L', \nabla')$ に対して,

$$(L, \nabla) \sim (L', \nabla') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^{\exists} \text{ bundle 同型 } \phi : L \to L' \quad s.t. \quad \phi^* \nabla' = \nabla$$

と定めます。

Proposition 1.1

$\omega \in \Omega^2(M;\mathbb{R}), \quad d\omega = 0$ に対して,

1). $\mathcal{M}_{(M,\omega)} = \emptyset \quad$ if $[\omega] \notin H^2(M;\mathbb{Z})$

2). $\mathcal{M}_{(M,\omega)} \cong H^1(M;\mathbb{R})/H^1(M;\mathbb{Z}) \quad$ if $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$

これまでみてきたように, M 上の closed 2-form ω を考えることと M 上の connection 付きの hermitian line bundle $(L, \nabla) \to M$ を考えることが "ほぼ同じ" であることが分かりました。"ほぼ" と言ったのは, ω は $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$ という "量子化条件" を満たさねばならず, 対応には $H^1(M;\mathbb{R})/H^1(M;\mathbb{Z})$ 分の ambiguity があるからです。

以下では, closed 2-form 付きの manifold (M, ω) を "classical な対象", connection 付きの hermitian line bundle $(L, \nabla) \to M$ を "量子化された対象" とみなして, それぞれが定める数学的構造, symmetry, それらの間の関係を順に見てゆくことにしましょう。

2. (M,ω) の定める構造について

まず次の notation を定めておきます。

Notation

- $M : C^{\infty}$-manifold　(連結とします。)
- $\omega \in \Omega^2(M;\mathbb{R}),\quad d\omega = 0$　(　$[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$ は仮定しません。)
- $Z^1(M) := \{\alpha \in \Omega^1(M;\mathbb{R}) | \quad d\alpha = 0 \quad \}$　(= closed 1-form の全体)
- $B^1(M) := dC^{\infty}(M,\mathbb{R})$ (= exact 1-form の全体)
- $G_{(M,\omega)} := \{\phi \in \mathrm{Diff}(M) | \quad \phi^*\omega = \omega \quad \}$
- $\mathfrak{g}_{(M,\omega)} := \mathrm{Lie}(G_{(M,\omega)}) = \{X \in \mathfrak{X}(M) | \quad L_X\omega = 0 \quad \}$

$G_{(M,\omega)}$ は "classical な対象"(M,ω) の symmetry です。いま, $i\colon \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ を $i(X) = \iota_X\omega$ で定めます。$d\omega = 0$ より $L_X\omega = (d\iota_X + \iota_X d)\omega = d\iota_X\omega$ となるので, i は, $i\colon \mathfrak{g}_{(M,\omega)} \to Z^1(M)$ という写像を定めることが分かります。

そこで,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{(M,\omega)} &:= \{X \in \mathfrak{g}_{(M,\omega)} | \quad {}^{\exists}f \in C^{\infty}(M), \quad \iota_X\omega = df \quad \} \\ &= i^{-1}(B^1(M))\end{aligned}$$

と定めます。

lemma 2.1

$X, Y \in \mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ に対し,

$$\iota_{[X,Y]}\omega = d\iota_X\iota_Y\omega$$

44

proof :

$$
\begin{aligned}
\iota_{[X,Y]}\omega = \iota_{(L_X Y)}\omega &= L_X(\iota_Y\omega) - \iota_Y L_X\omega \\
&= (d\iota_X + \iota_X d)\iota_Y\omega \quad (\Leftarrow L_X\omega = 0) \\
&= d\iota_X\iota_Y\omega + \iota_X L_Y\omega \quad (\Leftarrow d\omega = 0) \\
&= d\iota_X\iota_Y\omega \quad (\Leftarrow L_Y\omega = 0).
\end{aligned}
\quad \blacksquare
$$

特に, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ は $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ の Lie subalgebra になることが分かります。いま,

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \xrightarrow{d} B^1(M) \to 0$$

という exact sequence を $i \colon \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to B^1(M)$ で引き戻して,

$$0 \to \mathbb{R} \to i^*C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$$

という exact sequence を考えます。

$i^*C^\infty(M)$ は,

$$i^*C^\infty(M) := \{(X,f) \in \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \times C^\infty(M) | \quad \iota_X\omega = df \quad \}$$

と書けますが, ここで,

$$
\begin{aligned}
[(X,f),(Y,g)] :\underset{\text{def}}{=} ([X,Y], -\omega(X,Y)) \\
(X,f),(Y,g) \in i^*C^\infty(M)
\end{aligned}
$$

と定義すると, lemma 2.1 から $([X,Y], -\omega(X,Y)) \in i^*C^\infty(M)$ となるので, $[\cdot,\cdot]$ は $i^*C^\infty(M)$ 上の積を定めることが分かります。

このとき次が成り立ちます。

Proposition 2.2

$i^*C^\infty(M)$ は $[\cdot,\cdot]$ について Lie 環になり,

$$0 \to \mathbb{R} \to i^*C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$$

は Lie 環の central extension になる。

proof :

Jacobi identity 以外は明らかです。

$\omega \in \Omega^2(M), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とするとき簡単な計算で,

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) = (L_X\omega)(Y,Z) + (L_Y\omega)(Z,X) + (L_Z\omega)(X,Y) \\ - \omega(X,[Y,Z]) - \omega(Y,[Z,X]) - \omega(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

となることが示せます。

ここで $d\omega = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ とすると,

$$\omega(X,[Y,Z]) + \omega(Y,[Z,X]) + \omega(Z,[X,Y]) = 0$$

となり Jacobi identity が示せます。∎

さて, $\mathfrak{k} = \ker\{i \colon \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)\}$ とします。

$X \in \mathfrak{g}_{(M,\omega)}, Y \in \mathfrak{k}$ とすると,

$$\begin{aligned} \iota_{[X,Y]}\omega = \iota_{L_X Y}\omega = L_X(\iota_Y\omega) - \iota_Y L_X\omega \\ = 0 \qquad (\quad \Leftarrow \iota_Y\omega = 0, L_X\omega = 0 \quad) \end{aligned}$$

となるので, $[X,Y] \in \mathfrak{k}$ となります。したがって, $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ の ideal となることが分かります。$i^*C^\infty(M)$ は, $\mathfrak{k}$ 上では $i^*C^\infty(M)|_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} \times \mathbb{R}$ と trivial な extension になるので, $\mathfrak{k} \times \mathbb{R}$ が $i^*C^\infty(M)$ に ideal として含まれることが分かります。

46

これより,

$$\mathcal{P}_{(M,\omega)} := i^*C^\infty(M)/\mathfrak{k}\times\mathbb{R} \quad (\subset C^\infty(M))$$

とすると, $\mathcal{P}_{(M,\omega)}$ には quotient としての Lie 環の構造が定まります。$\mathcal{P}_{(M,\omega)}$ 上の Lie bracket を $\{\cdot,\cdot\}$ で表すことにします。作り方から $\mathcal{P}_{(M,\omega)}$ は,

$$\mathcal{P}_{(M,\omega)} = \{f\in C^\infty(M) | \quad {}^\exists X\in\mathfrak{X}(M), \quad \iota_X\omega = df \quad \}$$

と書けますが, Lie bracket は,

$$\begin{aligned}&\{f,g\} = -\omega(X,Y)\\ &\qquad\qquad \text{ただし, } X,Y\in\mathfrak{X}(M) \text{ は } df=\iota_X\omega, dg=\iota_Y\omega \text{ となるもの}\end{aligned}$$

と書けることが分かります。簡単な計算で次のことが分かります。

Proposition 2.3

1). $f,g\in\mathcal{P}_{(M,\omega)}\Rightarrow f\cdot g\in\mathcal{P}_{(M,\omega)}$

2). $f,g,h\in\mathcal{P}_{(M,\omega)}$ に対して

$$\{f\cdot g,h\} = f\cdot\{g,h\}+\{f,h\}\cdot g$$

すなわち, $\mathcal{P}_{(M,\omega)}$ は Poisson algebra になります。

以上から, “classical な対象”(M,ω) には Poisson algebra $\mathcal{P}_{(M,\omega)}$ と Lie 環の central extension $0\to\mathbb{R}\to i^*C^\infty(M)\to\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}\to 0$ が付随することが分かりました。ここで $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ でなく, それより小さな $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ が現われましたが, $[\omega]\in H^2(M,\mathbb{Z})$ となる場合にはこのことの幾何学的意味付けが後ではっきりします。

3. Lie 環の central extension

ここで Lie 環の central extension について少し復習しましょう。

$\mathfrak{g}$ を ($\mathbb{R}$ 上の) Lie 環とするとき, $\mathbb{R}$ を center として含み, $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathbb{R} \cong \mathfrak{g}$ となる Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の *central extension* と呼びます。以下では central extension $\tilde{\mathfrak{g}}$ を

$$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0, \quad [\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{g}}] = 0$$

という exact sequence と同一視して話を進めます。

さて, このような central extension $\tilde{\mathfrak{g}}$ はどれくらいあるのでしょうか。vector space としては $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ となるので central extension は $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ 上に Lie 環の構造を入れたものとみなせます。いま, $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の dual vector space とするとき $\gamma \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ に対して $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ 上の bracket $[\cdot,\cdot]_\gamma$ を

$$[(X,a),(Y,b)]_\gamma = ([X,Y], \gamma(X,Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

により定めます。$\mathbb{R}$ が center であることと, projection $\pi\colon \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ が Lie 環の準同型であることから, $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ 上の Lie bracket は上の形でなければならないことが分かります。

次のことは容易に分かります。

lemma 3.1

$[\cdot,\cdot]_\gamma$ が$\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ 上に Lie 環の構造を定める。

$$\iff \gamma([X,Y],Z) + \gamma([Y,Z],X) + \gamma([Z,X],Y) = 0, \quad {}^\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

さて,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle F}\downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

となる線形写像 $F\colon \mathfrak{g}\oplus\mathbb{R}\to\mathfrak{g}\oplus\mathbb{R}$ は $\beta\in\mathfrak{g}^*$ を用いて $F(X,a)=(X,\beta(X)+a)$ という形で書けます。ここで bracket $[\cdot,\cdot]_\gamma$ を F で引き戻すと,

$$\gamma'(X,Y)=\gamma(X,Y)-\beta([X,Y])$$

となる $\gamma'\in\bigwedge^2\mathfrak{g}^*$ を用いた bracket $[\cdot,\cdot]_{\gamma'}$ となります。

以上のことは Lie 環の cohomology の言葉できれいに言い表すことができます。

一般に Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して, $\delta\colon \bigwedge^p\mathfrak{g}^*\to\bigwedge^{p+1}\mathfrak{g}^*$ を $\alpha\in\bigwedge^p\mathfrak{g}^*$ に対して,

$$(\delta\alpha)(X_0,\dots,X_p)=\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_0,\dots,\check{X}_i,\dots,\check{X}_j,\dots,X_p)$$
$$X_i\in\mathfrak{g}\quad(i=0,\dots,p)$$

と定めると $\delta^2=0$ となります。このとき $(\bigwedge^\bullet\mathfrak{g}^*,\delta)$ の cohomology

$$H^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}):=\ \mathrm{Ker}\{\delta\colon \bigwedge^p\mathfrak{g}^*\to\bigwedge^{p+1}\mathfrak{g}^*\}/\mathrm{Im}\{\delta\colon \bigwedge^{p-1}\mathfrak{g}^*\to\bigwedge^p\mathfrak{g}^*\}$$

を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の *cohomology* と呼びます。

この言葉を用いると,

1). $[\cdot,\cdot]_\gamma$ が Lie 環の構造を定める $\iff \delta\gamma=0$

2). $[\cdot,\cdot]_\gamma$ と $[\cdot,\cdot]_{\gamma'}$ が同型な Lie 環の構造を定める $\iff \gamma'=\gamma+\delta\beta,\quad {}^\exists\beta\in\mathfrak{g}^*$

となることが分かります。

以上をまとめると次のようになります。

Proposition 3.2

$$\{\mathfrak{g}\text{ の central extension の同型類}\}\cong H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R})$$

上の議論をたどると Prop.3.2 の同一視は次のように与えられることが分かります。

$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ を central extension とします。いま $s\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ という vector space としての lift （すなわち $\pi \circ s = id$ となる線形写像）を 1 つ fix します。$X \in \mathfrak{g}$ に対して $s(X) = \tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ と書くことにします。このとき

$$\gamma(X, Y) := [\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$$

と定めると $\gamma \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ かつ $\delta\gamma = 0$ となることが分かります。γ の cohomology class は lift $s\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ のとり方によらないので, これを $c(\tilde{\mathfrak{g}})$ で表わすことにします。このとき central extension $\tilde{\mathfrak{g}}$ に対して "*1st Chern class*"$c(\tilde{\mathfrak{g}}) \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ を対応させることにより Prop.3 2 の同一視が得られていることが分かります。

このことは標語的に,「Lie 環の central extension は "1st Chern class"$c(\tilde{\mathfrak{g}}) \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ で決まる」と言うことができます。これは「hermitian line bundle $L \to M$ は 1st Chern class $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ で決まる」ということの Lie 環での analogy, もしくはある意味での infinitesimal version とみなせます。

さて次に, central extension $0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ に対して Lie 環の準同型となる lift $s\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ がどれくらいあるのかを考えてみましょう。このような lift が存在することと extension が trivial, すなわち Lie 環として $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ となることは同値なので $c(\tilde{\mathfrak{g}}) = 0 \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ でなければなりません。このとき, $s_o\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ を 1 つの Lie 環の準同型となる lift とするとき, 他の lift は $\beta \in \mathfrak{g}^*$ を用いて,

$$s(X) = s_o(X) + \beta(X), \quad X \in \mathfrak{g}$$

という形で表わせます。このとき, $\mathbb{R}$ は center であることに注意すると,

$$\text{s が Lie 環の準同型} \iff \delta\beta = 0$$

となることが分かります。

したがって次が分かりました。

Proposition 3.3

$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ を $\mathfrak{g}$ の central extension で $c(\tilde{\mathfrak{g}}) = 0$ とする。

このとき,

$\{s \colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}} |$ s は Lie 環の準同型となる lift $\} \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$

このことは,

$$\text{“flat U(1) connection の moduli space”} \cong H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$$

ということに対応しているとみなせます。

以上のことは次のような問題に適用できます。

$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ を $\mathfrak{g}$ の central extension とします。$\mathfrak{h}$ を Lie 環として, $f \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ という Lie 環の準同型が与えられているとします。このとき, $\tilde{f} \colon \mathfrak{h} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ という Lie 環の準同型で,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathfrak{h} \arrow[ul, "\tilde{f}"] \arrow[u, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

となるものはどのくらいあるのでしょうか。

この答は次で与えられます。

Cororally 3.4

1). Lie 環の準同型となる lift $\tilde{f} \colon \mathfrak{h} \to \tilde{\mathfrak{g}}$が存在する $\Longleftrightarrow f^* c(\tilde{\mathfrak{g}}) = 0 \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$

2). $\{\tilde{f} \colon \mathfrak{h} \to \tilde{\mathfrak{g}} |$ Lie 環の準同型となる lift $\} \cong H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$

proof :

$0 \to \mathbb{R} \to f^*\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{h} \to 0$ という central extension に対して以上のことを適用すればよい。∎

最後に, §2 で考えた central extension $0 \to \mathbb{R} \to \iota^* C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$ の "1st Chern class" $c(\iota^* C^\infty(M))$ の具体的な形を求めてみましょう。そのためには, $s\colon \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to \iota^* C^\infty(M)$ という線形写像としての lift をつくる必要があります。これは次のようにできます。$s(X) = (X, f_X), \quad X \in \mathfrak{g}'_{(M,\omega)}, \quad f_X \in C^\infty(M)$ と表すことにします。いま, $p_o \in M$ を fix して, f_X を $\iota_X \omega = df_X, f_X(p_o) = 0$ によって定めます。この式で f_X は unique に定まり, s は線形写像としての lift を与えます。このとき定義から, $\gamma \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}'^{*}_{(M,\omega)}$ を,

$$\gamma(X,Y) := \{f_X, f_Y\} - f_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$$

により定めるとき,

$$c(i^* C^\infty(M)) = [\gamma] \in H^2(\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}, \mathbb{R})$$

と表わせることが分かります。

4. moment map と quotient construction

"classical な対象"(M,ω) に話をもどします。

H を Lie 群として, H が M 上 ω を保って作用している状況を考えます。このとき H は (M,ω) の symmetry とみなせますが, この symmetry で (M,ω) を reduce した対象を考えることができるでしょうか。単純に考えると商空間 M/H がよさそうですが, ω はこの上には自然な 2-form を定めることができないのでこれではいけません。ここでは (M,ω) を symmetry H で reduce するということを考えてみましょう。

以下では H は M に右から作用すると約束します。H の作用を微分すると infinitesimal な作用が得られます。すなわち, $\xi \in \mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H), \quad p \in M$ に対して,

$$\rho(\xi)_p = \frac{d}{dt}(p \cdot e^{t\xi})|_{t=0} \in T_pM$$

と定めることで, Lie 環の準同型

$$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}_{(M,\omega)} = \{X \in \mathfrak{X}(M) | L_X\omega = 0\}$$

が定まります。

以後, $\rho(\xi) = \xi^*$ と書くことにします。reduction を行なうためには, H が ω を保って作用するというだけでは弱すぎるので, 作用にいくつか条件をつける必要があります。これを順に説明しましょう。§2 で $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ の subalgebra (実は ideal) $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ を考えましたが, ここでも次を仮定します。

Assumption

$$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \subset \mathfrak{g}_{(M,\omega)}$$

すなわち infinitesimal な作用は $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ に含まれるとします。このとき次のような定義をします。

Definition

H の (M, ω) への作用が *Hamiltonian* 作用とは

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & i^*C^\infty(M) & \longrightarrow & \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \uparrow{\scriptstyle \rho} & & \\ & & & & & & \mathfrak{h} & & \end{array}$$

に Lie 環の準同型となる lift, $\tilde{\rho}$: $\mathfrak{h} \to i^*C^\infty(M)$ が存在すること。

これは Cor.3.4 から,

$$0 \to \mathbb{R} \to i^*C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$$

の extension class (= "1st Chern class") を $c(i^*C^\infty(M)) \in H^2(\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}, \mathbb{R})$ とするとき,

$$\rho^* c(i^*C^\infty(M)) = 0 \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$$

となることと同値です。

この Hamiltonian 作用と "ほとんど同値な" 概念として, moment map というものがあります。定義は次のとおりです。

Definition

H の (M, ω) 上の作用の *moment map* とは

$$\mu : M \to \mathfrak{h}^* \qquad (\mathfrak{h}^* \text{は} \ \mathfrak{h} \ \text{の dual vector space})$$

であって, 次をみたすもののこと。

i). $\mu(p \cdot h) = Ad_h^* \cdot \mu(p), \quad p \in M, h \in H$

すなわち, μ は equivariant map である。

ii). $\xi \in \mathfrak{h}$ に対して, $d < \mu, \xi >= \iota_{\xi*}\omega$,

ただし, $< \cdot, \cdot >$ は $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ の自然な pairing

moment map はいつでも存在するわけではなく, 上のような map μ が存在するときにそれを作用の moment map と呼ぶわけです。

定義だけながめると, Hamiltonian 作用と moment map とは異なるものに見えますが, それらが “ほとんど同じ” であることは次のように分かります。moment map は, $\mu\colon M\to\mathfrak{h}^*$, Hamiltonian 作用は, $\tilde{\rho}\colon\mathfrak{h}\to C^\infty(M)$ という map で与えられますが, これらを次のように関係付けてみましょう。

$$<\mu,\xi>=\tilde{\rho}(\xi)\quad(\in C^\infty(M)),\quad \xi\in\mathfrak{h}$$

このとき,

ii) の条件 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\rho}$ は ρ の (線形写像としての) lift

H_o を H の連結成分とするとき,

μ の H_o に関する equivariance $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\rho}$ は Lie 環の準同型

と対応することが分かります。したがって moment map の方が “少しだけ強い” 概念ですが, それらは “ほとんど同じ” ものとみなせることが分かります。特に, H が連結ならばそれらは全く同じ概念になります。

ここで, moment map の存在と uniqueness について考えてみましょう。

$\mu,\mu'\colon M\to\mathfrak{h}^*$ を 2 つの moment map とします。このとき, $d<\mu-\mu',\xi>=0$ となることから, ある $\beta\in\mathfrak{h}^*$ を用いて, $\mu'=\mu+\beta$ と書けることが分かります。さらに, H-equivariance から, $\beta\in Z_H^*:=\{\beta\in\mathfrak{h}^*|\quad Ad_h^*\beta=\beta,\quad {}^\forall h\in H\quad\}$ でなければなりません。議論を逆にたどると, $\mu\colon M\to\mathfrak{h}^*,\beta\in Z_H^*$とすると, $\mu'=\mu+\beta\colon M\to\mathfrak{h}^*$ も moment map になることが分かります。

したがって次が言えました。

Proposition 4.1

μ_o を 1 つの moment map とすると,

$$\{\mu\colon M\to\mathfrak{h}^*|\quad \text{moment map}\quad\}=\mu_o+Z_H^*$$

存在に関しては次のように考えます。

まず, H の連結成分 H_o の作用に対する moment map の存在について考えます。このとき, 問題はすべて Lie 環の cohomology の言葉になおります。

Cor.3.4 から,

$$\text{moment map が存在する} \iff \rho^* c(i^* C^\infty(M)) = 0 \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$$

となることが分かります。

H 作用については,「この H_o 作用の moment map が H-equivariant map になるか? 」を個々に check しなければならず, 一般的な必要十分条件はないように思われます。(少なくとも筆者は知りません。)

H が連結のときには Hamiltonian 作用という観点から考えると,

$$\{\mu\colon M \to \mathfrak{h}^* | \quad \text{moment map} \quad \} \cong H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$$

となりますが, $Z_H^* = H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ となっているので (当然のことながら) 前に与えた uniqueness の記述と同じものになっています。

さて, Lie 群 H の (M, ω) への作用が moment map をもつとします。このとき, (M, ω) を symmetry H で reduce した対象がつくれることをみてみましょう。

次を仮定します。

Assumption

1). $0 \in \mathfrak{h}^*$ は μ の regular value である。

(したがって, $\mu^{-1}(0)$ は M の submanifold になります。)

2). $\mu^{-1}(0)$ への H 作用は free かつ slice をもつ。

この仮定から, $N := \mu^{-1}(0)/H$ は C^∞-manifold になります。この N について次のことがいえます。

Proposition 4.2

N 上には自然な closed 2-form ω_N が存在する。

56

"自然な" という意味は, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(0) & \xrightarrow{\quad i \quad} & M \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ N := \mu^{-1}(0)/H & & \end{array}$$

を考えるとき, $\pi^* \omega_N = i^* \omega$ となるということです。

proof :

$p \in \mu^{-1}(0)$ に対して, $0 \in \mathfrak{h}^*$ は regular value であることから,

$$\begin{aligned} T_p \mu^{-1}(0) &= \ \ker\ (d\mu)_p \\ &= \{X \in T_p M | \quad \omega(X, \xi^*) = 0, \quad {}^\forall \xi \in \mathfrak{h} \quad \} \end{aligned}$$

と書けます。

また, p を通る H-orbit Hp の tangent space は H が free に作用することから,

$$T_p Hp = \{\xi_p^* \in T_p M | \quad \xi \in \mathfrak{h} \quad \}$$

と書けます。

このことから, ω は $T_p \mu^{-1}(0)/T_p Hp$ 上に skew な bilinear form を定めることが分かります。さらに, ω が H-不変なことから, これにより, $T_{\pi(p)} N \cong T_p \mu^{-1}(0)/T_p Hp$ 上に skew な bilinear form が定まります。

以上から, N 上に 2-form ω_N が定まって, $\pi^* \omega_N = i^* \omega$ となることが分かりました。このとき, $\pi^* d\omega_N = d\pi^* \omega_N = di^* \omega = i^* d\omega = 0$ で π は submmersion なので $d\omega_N = 0$ となることが分かります。∎

こうしてできた closed 2-form 付きの manifold (N, ω_N) を *Marsden-Weinstein quotient* と呼びます。

以上から, Lie 群 H が (M, ω) に ω を保って作用しているときに, moment map をもつという条件のもとで, (M, ω) を symmetry H で reduce した対象 (N, ω_N) が作れることが分かりました。

5. symplectic manifold の場合

ここでは, 特別な “classical な対象” である symplectic manifold の場合について, いくつか言葉上の注意をします。

Definition

M 上の closed 2-form ω で, ${}^\forall p \in M$ に対して ω_p が非退化なものを *symplectic form* と呼びます。これは, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ として, $\omega_p^m \neq 0, {}^\forall p \in M$ と同値です。

このとき, (M, ω) を *symplectic manifold* と呼びます。

(M, ω) を symplectic manifold とするとき, §2 で述べたことは次のようになります。

ω は非退化なので,

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\sim} & \Omega^1(M) \\ & \cup & & \cup \\ i: & \mathfrak{g}_{(M,\omega)} & \xrightarrow{\sim} & Z^1(M) \\ & \cup & & \cup \\ i: & \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} & \xrightarrow{\sim} & B^1(M) \end{array}$$

となります。

この場合, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ の元は *Hamiltonian vector field* と呼ばれ, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)} = \mathrm{Ham}(M)$ と書かれることがあります。また, i は同型なので, central extension は

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \to \mathrm{Ham}(M) \to 0$$

と書かれることがあります。さらに, $\mathcal{P}_{(M,\omega)} = C^\infty(M)$ となり $C^\infty(M)$ 全体が Poisson algebra になります。このような manifold は *Poisson manifold* と呼ばれています。

さて, §4 で述べた reduction の理論はもともと symplectic manifold の場合に Marsden と Weinstein によってなされたものです。manifold M' に対して, その cotangent bundle T^*M は古典力学では相空間と呼ばれ, 代表的な symplectic manifold です。いま, $M' = \mathbb{R}^{3m}$ (m 粒子の配位空間) として, $M = T^*\mathbb{R}^{3m}$ を考えると, Euclid 運動群 $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ (回転と平行移動) の $\mathbb{R}^3$ への自然な作用は, $M = T^*\mathbb{R}^3$ 上に lift

します。このとき対応する moment map, $\mu\colon M \to (\mathfrak{so}(3)\oplus\mathbb{R}^3)^*$ を考えるといわゆる total angular momentum と total linear momentum が現れます。このことが, "moment map" という名前の由来です。

最後に, (M,ω) が symplectic manifold のとき, Marsden-Weinstein quotient (N,ω_N) も再び symplectic manifold になることを述べておきましょう。

Proposition 5.1

(M,ω) が symplectic manifold のとき Marsden-Weinstein quotient (N,ω_N) は symplectic manifold になる。

Proof :

Prop.4.2 の証明中の言葉をそのまま使います。

$\dim_{\mathbb{R}} H = h$ とします。このとき仮定から, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} T_p\mu^{-1}(0) = h$ となります。

$$(T_p\mu^{-1}(0))^{\perp} := \{X \in T_pM| \quad \omega(X,Y)=0, \quad {}^{\forall}Y \in T_p\mu^{-1}(0) \quad \}$$

とすると, ω は非退化なので, $\dim_{\mathbb{R}}(T_p\mu^{-1}(0))^{\perp} = h$ となります。

定義から, $T_pHp \subset (T_p\mu^{-1}(0))^{\perp}$ となりますが, $\dim_{\mathbb{R}} T_pHp = h$ であるので $T_pHp = (T_p\mu^{-1}(0))^{\perp}$ となることが分かります。このことから, ω_N も非退化であることが分かります。∎

6. (L, ∇) の symmetry

次に, “量子化された対象” である connection 付きの hermitian line bundle (L, ∇) へ話を移します。

再び, 次の notation を定めておきます。

Notation

- $\mathrm{Aut}(L) := \{\sigma \colon L \to L| \quad \sigma$ は bundle 同型で hermitian metric を保つ $\}$
- $\tilde{G}_{(L,\nabla)} := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L)| \quad \sigma^*\nabla = \nabla \quad \}$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} := \mathrm{Lie}(\tilde{G}_{(L,\nabla)})$

また, $\omega := c_1(\nabla)$ として, §2 で用いた notation を使います。

すなわち,

- $G_{(M,\omega)} := \{\phi \in \mathrm{Diff}(M)| \quad \phi^*\omega = \omega \quad \}$
- $\mathfrak{g}_{(M,\omega)} := \mathrm{Lie}(G_{(M,\omega)}) = \{X \in \mathfrak{X}(M)| \quad d\iota_X\omega = 0 \quad \}$
- $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)} := \{X \in \mathfrak{X}(M)| \quad \iota_X\omega \in B^1(M) \quad \}$

とします。

$\sigma \in Aut(L)$ に対して, σ が base manifold M 上に induce する微分同型を対応させることによって, $j \colon Aut(L) \to \mathrm{Diff}(M)$ を定義します。すなわち, $j(\sigma) = \phi$ と書くとき, 次の図式が可換になるものとして, j を定義します。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

$\ker j = \mathcal{G}_M$ と書くことにします。 $\mathcal{G}_M$ は gauge 変換群と呼ばれているもので, いまの場合, $U(1)$ は可換群なので, $\mathcal{G}_M = C^\infty(M, U(1))$ となります。

さて, Imj は何になるでしょうか。$\phi \in \mathrm{Im}j \Longleftrightarrow \phi^* L \cong L$ であることと, hermitian line bundle は c_1 で決まることに注意すると,

$$\mathrm{Diff}(M)_L := \{\phi \in \mathrm{Diff}(M) | \quad \phi^* c_1(L) = c_1(L) \quad \}$$

として, $\mathrm{Im}j = \mathrm{Diff}(M)_L$ となることが分かります。これより, 次の exact sequence が得られました。

$$0 \to \mathcal{G}_M \to \mathrm{Aut}(L) \xrightarrow{j} \mathrm{Diff}(M)_L \to 0$$

さらに, $\sigma \in \tilde{G}_{(L,\nabla)}$ とすると,

$$\phi^* \omega = \phi^* c_1(\nabla) = c_1(\sigma^* \nabla) = c_1(\nabla) = \omega$$

となるので, j は, $j\colon \tilde{G}_{(L,\nabla)} \to G_{(M,\omega)}$ という map を定めます。

この map の kernel は何でしょうか。

この答は次で与えられます。

lemma 6.1

$$\mathcal{G}_M \cap \tilde{G}_{(L,\nabla)} = U(1) \quad (= \text{constant map})$$

proof :

$g \in \mathcal{G}_M = C^\infty(M, U(1))$ とします。open set $U \subset M$ 上で local に, $L|_U \cong U \times \mathbb{C}$ と自明化して, $\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha, \quad \alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ と表わします。このとき,

$$g^* \nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha + g^{-1} dg$$

となるので,

$$\begin{aligned} g \in \tilde{G}_{(L,\nabla)} &\Longleftrightarrow g^* \nabla = \nabla \\ &\Longleftrightarrow g^{-1} dg = 0 \\ &\Longleftrightarrow g = \text{ constant map} \end{aligned}$$

となることが分かります。∎

いま, $G'_{(M,\omega)} := j(\tilde{G}_{(L,\nabla)})$ と定めると

$$0 \to U(1) \to \tilde{G}_{(L,\nabla)} \to G'_{(M,\omega)} \to 0$$

という exact sequence ができますが, $U(1)$ は明らかに $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$ の center なのでこれは Lie 群 $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$ の central extension になっています。

次に, 上で述べた $G'_{(M,\omega)}$ が, 具体的に何になっているのかもう少し調べてみましょう。

§1 において, moduli space $\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ を考えました。

$$\mathcal{M}_{(M,\omega)} = \{ \text{ connection 付きの hermitian line bundle } (L,\nabla) | \quad c_1(\nabla) = \omega \quad \} / \sim$$

でした。$\phi \in G_{(M,\omega)}, \quad (L,\nabla) \in \mathcal{M}_{(M,\omega)}$ に対して, $\phi^*(L,\nabla) \underset{\text{def}}{:=} (\phi^* L, \phi^* \nabla)$ と定めると, $\phi^*\omega = \omega$ となることから, $\phi^*(L,\nabla)$ は, 再び, $\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ の元になります。これにより, $G_{(M,\omega)}$ は $\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ に (右から) 作用します。定義により, $G'_{(M,\omega)}$ は (L,∇) における isotropy 群であることが分かります。すなわち,

$$\begin{aligned} G'_{(M,\omega)} &= \{\phi \in G_{(M,\omega)} | \quad \phi^*[(L,\nabla)] = [(L,\nabla)] \in \mathcal{M}_{(M,\omega)} \quad \} \\ &= \{\phi \in G_{(M,\omega)} | \quad (\phi^* L, \phi^*\nabla) \sim (L,\nabla) \quad \} \end{aligned}$$

と書けることが分かりました。

この群作用をもう少し詳しく調べてみましょう。

$\mathrm{Aut}(L) \subset \mathrm{Diff}(L)$ であるので, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(L)) \subset \mathfrak{X}(L)$ とみなすことにします。L には, connection ∇ が入っているので, 各 $u \in L$ に対して tangent space $T_u L$ は, horizontal subspace H_u と fiber L_p ($\pi \colon L \to M$ を projection として $p = \pi(u)$ とします) に分解します。すなわち, $T_u L = H_u \oplus L_p$ となります。

いま, $\tilde{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(L))$ に対して, $X := \pi_* \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$, X の horizontal lift を, $X^h \in \mathfrak{X}(L)$ と書くことにします。このとき, $\tilde{X}$ は, M 上のある関数 $f_{\tilde{X}} \in C^\infty(M)$ を用いて,

$$\tilde{X}_u = X^h + 2\pi\sqrt{-1} f_{\tilde{X}} \cdot u \quad \in H_u \oplus L_p$$

と書けます。ただし, 第 2 項で, $u \in L_p$ とみなしました。

そこで, $\kappa \colon \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(L)) \to C^\infty(M)$ を, $\kappa(\tilde{X}) = f_{\tilde{X}}$ によって定義することにします。

このとき次が成り立ちます。

Proposition 6.2

σ_t を, $\mathrm{Aut}(L)$ の path で, $\sigma_0 = id_L$, $\frac{d}{dt}\sigma_t|_{t=0} = \tilde{X}$ となるものとします。

このとき

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^* \nabla|_{t=0} = -2\pi\sqrt{-1}(\iota_X \omega - df_{\tilde{X}}) \in \Omega^1(M, \mathfrak{u}(1)) = \Omega^1(M, \sqrt{-1}\mathbb{R})$$

proof :

$\phi_t = j(\sigma_t)$ とします。open set $U(\subset M)$ 上で $L|_U \cong U \times \mathbb{C}$ と自明化して,

$$\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha, \quad \alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{R}),$$

$(p, a) \in U \times \mathbb{C}$ に対して, $\sigma_t(p, a) = (\phi_t(p), g_t(p)a), \quad g_t \colon U \to U(1)$

と表わします。

このとき,

$$\begin{aligned}\sigma_t^* \nabla &= d - 2\pi\sqrt{-1}\phi_t^*\alpha + g_t^{-1} dg_t \\ &= d - 2\pi\sqrt{-1}\{\phi_t^*\alpha + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_t^{-1} dg_t\}\end{aligned}$$

と表わせます。

これより,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sigma_t^*\nabla|_{t=0} &= -2\pi\sqrt{-1}(L_X\alpha + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}d\dot{g}) \\ &= -2\pi\sqrt{-1}\{\iota_X d\alpha + d(\iota_X\alpha + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\dot{g})\} \\ &= -2\pi\sqrt{-1}\{\iota_X\omega + d(\iota_X\alpha + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\dot{g})\}\end{aligned}$$

と書けます。

いま, $L|_U \cong U \times \mathbb{C}$ という自明化のもとで, $u = (p, a) \in U \times \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{cases} \tilde{X}_u = (X_p, \dot{g}(p)a) \\ X_u^h = (X_p, 2\pi\sqrt{-1}\alpha(X)_p a) \end{cases} \qquad \in T_pU \times \mathbb{C} \cong T_{(p,a)}U \times \mathbb{C} \cong T_uL$$

と書けるので,

$$\tilde{X}_u = X_u^h - 2\pi\sqrt{-1}(\alpha(X)_p + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\dot{g}(p)) \cdot u$$

と表わせ,

$$f_{\tilde{X}} = -(\alpha(X) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\dot{g})$$

であることが分かります。

したがって,

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^*\nabla|_{t=0} = -2\pi\sqrt{-1}(\iota_X\omega - df_{\tilde{X}}) \in \Omega^1(M, \mathfrak{u}(1)) = \Omega^1(M, \sqrt{-1}\mathbb{R})$$

となることが分かりました。∎

これより次のことが分かります。

Corolally 6.3

$G_{(M,\omega)}$ の $\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ 上の infinitesimal な作用は (constant 倍を除いて), $X \in \mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ に対して

$$X^*_{(L,\nabla)} = [\iota_X\omega] \in T_{(L,\nabla)}\mathcal{M}_{(M,\omega)} = H^1(M, \mathbb{R})$$

で与えられる。

§2 では, $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ ではなく, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ を考えることが必要でしたが, “量子化された対象”$(L,\nabla) \to M$ を考える場合には, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$ は connection ∇ を保つ方向として自然な解釈ができることが分かりました。特に, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)} = \mathrm{Lie}(G'_{(M,\omega)})$ となることが分かります。

さらに, (M,ω) が symplectic manifold の場合には, infinitesimal な作用は onto map になるので各 orbit が open subset になりますが, $\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ は連結なので, $G_{(M,\omega)}$ 作用は transitive であることが分かります。すなわち,

(M,ω) が symplectic manifold $\Longrightarrow \mathcal{M}_{(M,\omega)} \cong G_{(M,\omega)}/G'_{(M,\omega)}$

となります。

さて, $G'_{(M,\omega)}$ には,

$$0 \to U(1) \to \tilde{G}_{(L,\nabla)} \to G'_{(M,\omega)} \to 0$$

という Lie 群の central extension が考えられました。一方, §2 から, $\mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$には,

$$0 \to \mathbb{R} \to i^*C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$$

という Lie 環の central extension が考えられました。これらの関係はどうなっているのでしょうか。

Prop.6.2 から, $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$ に対して, $\iota_X\omega = df_{\tilde{X}}$となるので, κは,

$$\begin{CD}
\tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} @>{\kappa}>{\sim}> i^*C^\infty(M) \\
@VVV @VVV \\
\mathfrak{g}_{(M,\omega)} @>{id}>{\sim}> \mathfrak{g}_{(M,\omega)}
\end{CD}$$

という同一視を与えています。これは Lie 環としての同型でしょうか。次にこれを調べてみましょう。

$\Omega^0(M,L)$ で L の section 全体, $D(M,L)$ で L 上の微分作用素全体を表わすことにします。$\tilde{G}_{(L,\nabla)}$ は, $\Omega^0(M,L)$ 上に引き戻しによって (右から) 作用するので, この作用の微分として, $\tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$ も, $\Omega^0(M,L)$ に作用します。

これは次で与えられます。

lemma 6.4

$\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}, \quad s \in \Omega^0(M,L)$ に対して

$$\tilde{X} \cdot s = \nabla_X s - 2\pi\sqrt{-1} f_{\tilde{X}} \cdot s$$

proof :

σ_t を, $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$ の path で, $\sigma_0 = id_L, \frac{d}{dt}\sigma_t|_{t=0} = \tilde{X}$ となるもの, $\phi_t = j(\sigma_t)$ とします。Prop.6.2 の証明と同様に, local に, $\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha, \quad \sigma_t(p,a) = (\phi_t(p), g_t(p)a)$ と表わします。このとき,

$$(\sigma_t^* s)(p) = g_t^{-1}(p) s(\phi_t(p))$$

と表わせます。これから,

$$\begin{aligned}
\tilde{X} \cdot s = \frac{d}{dt}\sigma_t^* s|_{t=0} &= -\dot{g} \cdot s + ds(X) \\
&= ds(X) - 2\pi\sqrt{-1}\alpha(X) \cdot s + 2\pi\sqrt{-1}(\alpha(X) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\dot{g}) \cdot s \\
&= \nabla_X s - 2\pi\sqrt{-1} f_{\tilde{X}} \cdot s
\end{aligned}$$

となることが分かります。∎

そこで, $\nu \colon \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \to D(M,L)$ を, $\nu(\tilde{X}) = \nabla_X - 2\pi\sqrt{-1} f_{\tilde{X}}$ によって定義することにします。作り方からこれは Lie 環の準同型です。このことを用いると次のことが示せます。

Proposition 6.5

$\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$ に対して,

$$f_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} = \{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}$$

proof :

$\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}, s \in \Omega^0(M, L)$ に対して

$$\begin{aligned}\nu(\tilde{X}) \cdot \nu(\tilde{Y}) \cdot s &= (\nabla_X - 2\pi\sqrt{-1}f_{\tilde{X}}) \cdot (\nabla_Y s - 2\pi\sqrt{-1}f_{\tilde{Y}} \cdot s) \\ &= \nabla_X \nabla_Y s - 2\pi\sqrt{-1}df_{\tilde{Y}}(X) \cdot s - 2\pi\sqrt{-1}df_{\tilde{Y}}\nabla_X s \\ &\quad - 2\pi\sqrt{-1}f_{\tilde{X}}\nabla_Y s + (2\pi\sqrt{-1})^2 f_{\tilde{X}} \cdot f_{\tilde{Y}} \cdot s\end{aligned}$$

となります。

いま, $df_{\tilde{Y}}(\tilde{X}) = \omega(Y, X) = \{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}$ となることに注意すると,

$$[\nu(\tilde{X}), \nu(\tilde{Y})] \cdot s = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)s - 2 \cdot 2\pi\sqrt{-1}\{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}$$

となります。また,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X &= \nabla_{[X,Y]} - 2\pi\sqrt{-1}\omega(X, Y) \\ &= \nabla_{[X,Y]} + 2\pi\sqrt{-1}\{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}\end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned}[\nu(\tilde{X}), \nu(\tilde{Y})] \cdot s &= \nabla_{[X,Y]}s - 2\pi\sqrt{-1}\{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\} \cdot s \\ &= \nu([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \cdot s + 2\pi\sqrt{-1}(f_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} - \{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}) \cdot s\end{aligned}$$

となります。νは準同型で, $\nu([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [\nu(\tilde{X}), \nu(\tilde{Y})]$ となることから,

$$(f_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} - \{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}) \cdot s = 0, \quad {}^{\forall}s \in \Omega^0(M, L)$$

となり, $f_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} = \{f_{\tilde{X}}, f_{\tilde{Y}}\}$ となることが分かります。∎

したがって, $\kappa\colon \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \xrightarrow{\sim} i^*C^\infty(M)$ は Lie 環の同型であることが分かりました。すなわち, §2 で考察した Lie 環の central extension

$$0 \to \mathbb{R} \to i^*C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$$

は, Lie 群の central extension

$$0 \to U(1) \to \tilde{G}_{(L,\nabla)} \to G'_{(M,\omega)} \to 0$$

に対応するものであることが分かりました。

"classical な対象"(M,ω) の考察だけでは幾何学的な意味付けがはっきりしなかった central extension $i^*C^\infty(M)$ は, "量子化された対象"$(L,\nabla) \to M$を考えることによって, "(L,∇) の infinitesimal symmetry" というはっきりした意味付けをもつことになるわけです。

ここで少し気になっている読者もおられるのではないかと思うので, $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}$などの Lie 環の構造について注意します。

いままで, Diff(M) は M に左から作用していると約束して話を進めてきました。このとき infinitesimal な作用を考え, Lie(Diff(M)) $\cong \mathfrak{X}(M)$ とみなすことによって, $\mathfrak{X}(M)$ の普通の bracket を Lie(Diff(M)) の bracket のように扱ってきました。しかし, 一般に Lie 群 Hの Lie 環 $\mathfrak{h} =$ Lie(H) には, H上の左不変ベクトル場から入る bracket を考えることにすると, Diff(M) の Mへの作用が左作用であることから, Lie(Diff(M)) $\tilde{\to}$ $\mathfrak{X}(M)$ という同一視は実は Lie 環の反準同型になっています。したがって, 上では, $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}, \mathfrak{g}'_{(M,\omega)}, \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$ などを, $\mathfrak{g}_{(M,\omega)}, \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \subset \mathfrak{X}(M)$, $\tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \subset \mathfrak{X}(L)$ とみなして, $\mathfrak{X}(\cdot)$ から induce される bracket を考えていましたが, 実はこれは本来の Lie bracket の (-1) 倍になっています。しかし, ベクトル場として, $\mathfrak{g}_{(M,\omega)} \subset \mathfrak{X}(M)$ と実現しておいた方が幾何学的に考えやすいので, この埋め込みが Lie 環の反準同型であるということを頭において, "$\mathfrak{g}_{(M,\omega)}$ の Lie bracket は $\mathfrak{X}(M)$ から induce されたものを考える" と約束することにします。暗にこの約束のもとで, いままで話を進めてきたわけです。したがって, $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$ が $\Omega^0(M,L)$ に右から作用しているにもかかわらず, $\nu\colon \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \to D(M,L)$ は Lie 環の準同型になったりしたわけです。以下でも, この約束のもとで話が進められると理解して下さい。

さて話を戻して, 次に moment map との関係をみてみましょう。再び H を Lie

群として, H が, $(L,\nabla) \to M$ 上に hermitian metric と connection ∇ を保って作用しているとします。§4 のときと同様に, H は右から作用しているとします。これは, $\varpi\colon H \to \tilde{G}_{(L,\nabla)}$ という反準同型を与えることと同値です。上での約束から, infinitesimal な作用, $d\varpi\colon \mathfrak{h} \to \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$は Lie 環の準同型になります。このとき次の可換図式が得られます。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & i^*C^\infty(M) \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{g}_{(M,\omega)} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u, "id"] & \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \arrow[r] \arrow[u, "\kappa"] & \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \arrow[r] \arrow[u, "id"] & 0 \\
 & & & \mathfrak{h} \arrow[u] \arrow[ul, "d\varpi"] &
\end{tikzcd}$$

この図は, Hの M上の作用が Hamiltonian 作用であることを表わしていますが, さらに, この作用が moment map をもつことも容易に示すことができます。

逆に, (M,ω) 上に Lie 群 H の moment map をもつ Hamiltonian 作用があるとすると, $i^*C^\infty(M) \cong \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$であることから, $(L,\nabla) \to M$上には, Hの普遍被覆群$\tilde{H}$の作用が定義されることが分かります。これが Hの作用におちるかどうかは, それぞれの場合に check しなければなりません。

以上のことをまとめると,「(M,ω) 上の H作用の moment map の存在 $\Longleftrightarrow$ $(L,\nabla) \to M$上への H作用の infinitesimal な持ち上げの存在」と表現できることが分かりました。

次に, H が $(L,\nabla) \to M$ 上に hermitian metric と connection ∇ を保って作用しているときに, symmetry H で "量子化された対象"$(L,\nabla) \to M$ を reduce することができるかどうか考えてみましょう。"classical な対象"(M,ω) のときと同じく, $L/H \to M/H$ を考えると, hermtian line bundle はできますが, connection ∇ はここにはおちないのでこれではいけません。ここでも前と同様に, Marsden-Weinstein quotient $N := \mu^{-1}(0)/H$を考えるとうまくゆくことが分かります。

まず, M上に induce された Hの作用は §2 で考えた仮定を満たしていて, Marsden-Weinstein quotient $N = \mu^{-1}(0)/H$が考えられるとします。このとき, $L_N :=$

$(L|_{\mu^{-1}(0)})/H$によって, hermitian line bundle $L_N \to N$が構成できますが, 次のことを示すことができます。

Proposition 6.6

$L_N \to N$には "自然な"hermitian connection ∇^Nが存在する。

"自然な" という意味は,

$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{\tilde{i}} & L|_{\mu^{-1}(0)} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & L_N = (L|_{\mu^{-1}(0))/H} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xleftarrow{i} & \mu^{-1}(0) & \xrightarrow{\pi} & N = \mu^{-1}(0)/H \end{array}$$

という可換図式を考えたとき, $\tilde{i}^*\nabla = \tilde{\pi}^*\nabla$ となるということです。

このとき,

$$\pi^* c_1(\nabla^N) = c_1(\tilde{\pi}^*\nabla) = c_1(\tilde{i}^*\nabla) = i^* C_1(\nabla) = i^*\omega$$

となるので, $c_1(\nabla^N) = \omega_N$ となることが分かります。

proof :

作用にsliceがあることから, localに, N のopen set V をとって, $V \times H \cong \pi^{-1}(V) \subset \mu^{-1}(0)$ と同一視できます。このとき, L 上の H作用を用いて, (hermitian line bundle として,) $L|_{V\times H} \cong V \times H \times \mathbb{C}$ と自明化すると, $L|_{V\times H}$上で H作用は,

$$h \cdot (p, h', a) = (p, h'h, a), \quad p \in V, \quad h, h' \in H, \quad a \in \mathbb{C}$$

という形で表わすことができます。この自明化のもとで, $\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha, \quad \alpha \in \Omega^1(V \times H, \mathbb{R})$ と表わします。

このとき, Prop.6.2で行なった計算から, $\xi \in \mathfrak{h}$ のinfinitesimalな作用を, $\xi^* \in \mathfrak{X}(M)$ として,

$$< \mu, \xi >= -\alpha(\xi^*)$$

と表わせることが分かりますが, $\pi^{-1}(V) \subset \mu^{-1}(0)$ なので,

$$\alpha(\xi^*) = 0, \quad {}^\forall \xi \in \mathfrak{h}$$

となることが分かります。

このことと, α が H不変であることから, ある $\hat{\alpha} \in \Omega^1(V, \mathbb{R})$ が存在して, $\pi^* \hat{\alpha} = \alpha$ と表わせることが分かります。

そこで, $L_N|V \cong V \times \mathbb{C}$ 上で, $\nabla^N = d - 2\pi\sqrt{-1}\hat{\alpha}$と定めると, これらは global に貼りあって, L_N上の connection∇^Nを定めることが確かめられます。∎

以上から, "量子化された対象"(L, ∇) に対しても, それを symmetry で reduce した対象である "*Marsden-Weinstein quotient*" が構成できることが分かりました。

ここで, 簡単な例をあげましょう。

$M = \mathbb{C}^{m+1}$, $\mathbb{C}^{m+1}$の複素座標を $(z_0, \cdots, z_m)$ として, $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=0}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i$とします。$z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i \quad (i = 0, \ldots, m)$ によって実座標 $(x_o, \cdots, x_m, y_0, \cdots, y_m)$ を考えると, $\omega = \sum_{i=0}^m dx_i \wedge dy_i$と表わせます。

このとき,$H = U(1)$ として M上の Hの作用を,

$$\zeta \cdot z = (\zeta \cdot z_0, \cdots, \zeta \cdot z_m), \quad \zeta \in H, z \in M$$

と定めます。この作用は moment map をもち, $e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \longleftrightarrow \theta$によって, $U(1) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}, \quad \mathfrak{u}(1)^* \cong \mathbb{R}$ と同一視すると, moment map は, $c \in \mathbb{R}$ を constant として,

$$\mu(z) = -\pi|z|^2 + c$$

と書けます。constant cは, $H^1(\mathfrak{u}(1), \mathbb{R}) = Z^*_{U(1)} \cong \mathbb{R}$ の ambiguity に対応しています。

対応する Marsden-Weinstein quoptient は,

$$N = \begin{cases} \mathbb{C}P^m & \text{if } c > 0 \ , \\ \{\text{point}\} & \text{if } c = 0 \ , \\ \emptyset & \text{if } c < 0 \end{cases}$$

となります。$c > 0$ のとき, $\mathbb{C}P^m$上に定まる 2-form ω_N は Fubini-Study metric と呼ばれています。特に $c = 1$ のとき, $[\omega_N]$ は, $H^2(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z})$ の generator になります。

次に, (L, ∇) として,

$$L := \underline{\mathbb{C}} = M \times \mathbb{C} \quad : \text{trivial bundle}$$
$$\nabla := d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha$$
$$\alpha := \frac{\sqrt{-1}}{4}\sum_{i=0}^{m}(z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}(x_i dy_i - y_i dx_i)$$

と定めます。($\mathcal{M}_{(M,\omega)} = \{pt\}$ なので, どんなモデルで考えても同じです。)

このとき, $c \in \mathbb{R}$ に対し, $\tilde{H} = \mathbb{R}$ の L 上の作用を,

$$\theta \cdot (z, a) = (e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}z, e^{2\pi\sqrt{-1}c\theta}a), \quad \theta \in \tilde{H}, (z, a) \in M \times \mathbb{C}$$

と定めると, $\tilde{H}$の作用は, L 上の hermitian metric と connection ∇ を保ちます。対応する moment map は,

$$\mu(z) = -\pi|z|^2 + c$$

となります。

いま, $c \notin \mathbb{Z}$ ならば, 上の$\tilde{H}$作用は H作用にはおちないことが分かります。したがって, 一般に, (M, ω) への Lie 群 Hの momemt map をもつ Hamiltonian 作用があっても, line bundle $(L, \nabla) \to M$への$\tilde{H}$の作用は Hにおちるとは限らないことが分かりました。

さて, $c = n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(L, \nabla) \to M$の "Marsden-Weinstein quotient"$(L_N, \nabla^N) \to N$ が考えられますが, これは, いわゆる hyperplane bundle $H \to \mathbb{C}P^m$ (この Hは Lie 群の Hとは別のものです) を用いて,

$$\begin{array}{ccc} L_N & & nH \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ N & & \mathbb{C}P^m \end{array}$$

と書けます。

7. geometric quantization

さて, §6 で述べたことに関連する話題で, geometric quantization ということを極く簡単に説明しましょう。

名前のとおり, これはもともと量子力学から発したものです。古典力学では, 系のとり得る状態のなす symplectic manifold (M, ω) (これを相空間と呼びます) を考え, Mの上の flow を問題にします。数学的には次のように定式化できます。

まず, Hamiltonian と呼ばれる関数 $H \in C^\infty(M)$ が最初に与えられています。つまり, (M, ω, H) という組を与えることを, 物理系を与えることとみなすわけです。このとき, §5 で考えた map $C^\infty(M) \to \mathrm{Ham}(M)$ によって, H から M上のベクトル場 $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ が定まります。すなわち, $dH = \iota_{X_H}\omega$となるものとして X_Hは unique に定まります。このとき, X_Hの生成する flow ϕ_t が考えられますが, これが系の時間発展を与えると考えます。対応する運動方程式

$$\frac{d\phi}{dt} = X_H$$

は, Hamilton 方程式と呼ばれています。

さて, “物理量”$f \in C^\infty(M)$ は $\phi_t^* f$によって時間発展しますが, これを方程式で表わしてみましょう。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_t^* f &= L_{X_H} f = df(X_H) = \omega(X_f, X_H)\\ &= -\omega(X_H, X_f) = \{H, f\}\end{aligned}$$

となるので, “物理量” の時間発展は,

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

により与えられることが分かりました。

これに対して量子力学では, 系のとり得る状態は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$をなし, 物理量とは $\mathcal{H}$上の hermite operator であると考えます。ここでも Hamiltonian と呼ばれる operator $\hat{H}$が与えられていて, $(\mathcal{H}, \hat{H})$ という組が物理系を表わすと考えます。

このとき, 系の時間発展を表わす運動方程式はどう与えたらよいでしょうか。Heisenberg が気付いたのは, 古典力学の方程式を物理量の時間発展という形で,

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

と書いてしまうと, これは, もはや $C^\infty(M)$ 上の方程式と見なくとも, bracket$\{\cdot,\cdot\}$ さえ定義されていれば, そのような対象の上でも意味をもつということだったのではないでしょうか。特に, operator の空間には bracket $[\cdot,\cdot]$ が定義できるので, 次の方程式が analogy として考えられます。

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \sqrt{-1}[\hat{H}, \hat{f}]$$

これは Heisenberg 方程式と呼ばれていて量子力学の基礎方程式です。$\sqrt{-1}$が付いているのは物理量を hermite operator (これは数学でいう Lie 環はなしません) と見るためで, $\hat{f}$の代わりに$\sqrt{-1}\hat{f}$を考えて, 物理量とは skew hermite operator (これは Lie 環をなします) であると約束すれば,

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{H}, \hat{f}]$$

と全く同じ形で書けます。

以上のことから,「古典力学系 (=symplectic manifold) (M, ω) を "量子化する" とは, それに付随する Lie 環 $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$上の表現を与えることである」と極めて単純化して考えてみましょう。このとき canonical な方法で幾何学的に "量子化" を与えることができないでしょうか。これが geometric quantization のもとにある発想です。

§6 でみたように, $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$ という条件のもとで, これは次のように行われます。

まず, $(L,\nabla) \in \mathcal{M}_{(M,\omega)}$を 1 つ fix します。このことを prequantization と呼び, (L,∇) を prequantum bundle と呼びます。$\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ とするとき, symplectic form ω は $dvol_M = \frac{1}{m!}\omega^m$によって M上の volume element を定めます。これにより, $\Omega^0(M,L)$ 上に

$$< s_1, s_2 > = \int_M (s_1(p), s_2(p))dvol_M, \qquad s_1, s_2 \in \Omega^0(M,L)$$

ただし $(\cdot,\cdot)$ は L 上の hermitian metric

によって L^2-内積が入ります。そこで $\mathcal{H} := L^2(M,L)(= L$ の L^2-section 全体$)$ とすることで Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が定まります。

このとき, $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$は L の hermitian metric と symplectic form ω を保って作用することから, $\mathcal{H}$上 unitary に作用することが分かります。§6 でみたように, infinitesimal な作用 $\nu\colon \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \to D(M,L)$ は, $\nu(\tilde{X}) = \nabla_X - 2\pi\sqrt{-1}f_{\tilde{X}}$ によって与えられます。

一方, $\tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)}$は, $\kappa\colon \tilde{\mathfrak{g}}_{(L,\nabla)} \xrightarrow{\sim} i^*C^\infty(M)$ により $i^*C^\infty(M)$ と, さらに, ωは非退化なので, $i^*C^\infty(M) \cong C^\infty(M)$ となることから $C^\infty(M)$ と同一視できるので,

$$\nu \circ \kappa^{-1}\colon C^\infty(M) \to D(M,L)$$

によって, $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ の $\mathcal{H}$上の表現が幾何学的に構成できたことになります。

これですべてうまくいったようですが, 実はまだうまくいっていないということが "経験的に" 分かっています。つまり, $\mathcal{H}$はあまりに "大きすぎる" ことが分かっています。

いま Lie 群 Hが, $(L,\nabla) \to M$上に, hermitian metric と connection ∇ を保って作用しているとします。このとき Hは, Mにも $\mathcal{H}$ にも作用します。さて, Hの M上の作用が transitive であるとします。このことは古典的にはすべての状態が Hの作用に

より移りあえることを言っています。このとき, 量子的な状態もある意味で Hの作用で移りあえることを期待したいのですが, これは, “$\mathcal{H}$上の Hの表現は既約である” ということで表現されます。一般には $\mathcal{H}$ は Hの既約表現にはならないので, うまく既約成分を取り出してくるような機構を考えなければなりません。

そこで次のような概念を考えます。

Definition

integrable な Lagrangian (complex) subbundle

$$E \subset TM^{\mathbb{C}} \quad (= TM \otimes \mathbb{C})$$

を *polarization* と呼ぶ。

ここで,

integrable とは,

$$X, Y \in \Omega^0(M, E) \Longrightarrow [X, Y] \in \Omega^0(M, E)$$

となることで,

Lagrangian とは, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ とするとき

i). $\quad \mathrm{rank}_{\mathbb{C}} E = m$

ii). $\quad \omega|_{E_p} = 0, \quad {}^{\forall} p \in M$

となることです。

polarization が与えられると次のように $\mathcal{H}$を小さくすることができます。つまり,

$$\mathcal{H}_0 := \{ s \in \mathcal{H} | \quad \nabla_X s = 0 \quad {}^{\forall} X \in \Omega^0(M, E) \quad \}$$

によって $\mathcal{H}_0$ を定め, $\mathcal{H}$ の代わりに $\mathcal{H}_0$を考えることにするわけです。こうしてしまうと, もはや $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$は $\mathcal{H}_0$を保たないので $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ 全体の unitary 表現はできなくて, polarization を保つ subalgebra の表現しかできなくなります。そこで, “量子

化する” ということの意味をもう少し考える必要がありますが, それは筆者の手にはあまるのでここでは立ち入りません。ただ, 「polarization を考えるほうが物事がうまくゆき, 数学としてもおもしろいものがでてくるということが “経験的に” 分かっている」とだけ述べておくことにします。

さて, polarization の例として代表的なものを 2 つあげましょう。

Nを C^∞-manifold として, $M = T^*N$, ω を T^*N上の canonical な symplectic form とします。

このとき

$$\begin{tikzcd} TM^{\mathbb{C}} \arrow[r, "d\pi"] \arrow[d] & TN^{\mathbb{C}} \arrow[d] \\ M = T^*N \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

という可換図式を考え, $E_1 = \ker d\pi \subset TM^{\mathbb{C}}$とすると E_1は polarization を定めます。

このとき, $\mathcal{H}_0$は, “$L^2(N)$” になると考えられます。

次に (M, ω) が Kähler 多様体のときを考えましょう。

まず Kähler 多様体の定義を述べます。

Definition

(M, ω) が *Kähler* 多様体であるとは次を満たすことである。

1). Mは complex manifold (complex structure を Jとします。)

2). $\omega \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$, $d\omega = 0$ で,

i). $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$, $X, Y \in TM$

ii). $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ により gを定めるとき gは M上の metric になる

さて, (M, ω) を Kähler 多様体とします。

このとき,

$$E_2 = TM^{0,1} (= (0,1)\text{-vector 全体})$$

とすると, E_2は polarization になります。これを Kähler polarization といいます。

いま Kähler 多様体 M上に prequantum bundle $(L, \nabla) \to M$が与えられているとします。

このとき, open set $U(\subset M)$ 上で, local に,

$$\nabla_X s = 0, \quad {}^\forall X \in \Omega^0(U, E)$$

という方程式を考えてみましょう。s_1, s_2 を 0 にならない 2 つの解とすると, L は line bundle なので,

$$s_1(p) = g(p)s_2(p), \quad g\colon U \to \mathbb{C}^*$$

という形に書けますが, 両者とも方程式の解であるということから, gは holomorphic function であることが分かります。

このことから, 各点のまわりで上の方程式の解が local に存在すれば, L には holomorphic line bundle の構造が入ることが分かります。local な解の存在は, $c_1(\nabla) = \omega$ が (1,1)-form であるということから保証されます。したがって, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_o$は, L の holomorphic section 全体の空間 $H^0(M, L)$ となります。

さて, Prop.5.1 でみたように symplectic manifold (M, ω) の Marsden-Weinstein quotient (N, ω_N) は再び symplectic manifold になりました。これは Kähler 多様体のときにはどうなるでしょうか。

いま Lie 群 Hが M上に, ω を保って holomorphic に作用しているとします。さらに, §4 で述べた作用に関する条件が満たされ, Marsden-Weinstein quotient (N, ω_N) が考えられるとします。このとき, (N, ω) も Kähler 多様体になるでしょうか。

この答は次で与えられます。

Proposition 7.1

(M, ω) が Kähler 多様体のとき Marsden-Weinstein quotient (N, ω_N) は Kähler 多様体になる。

証明は難しくないのですが, Kähler 多様体について若干説明を要するのでここでは

省略する事にします。

§6 の終わりで, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$が, $\mathbb{C}^{m+1}$への $U(1)$ 作用に対する Marsden-Weinstein quotient として作れることをみました。このことから, $\mathbb{C}P^m$が Kähler 多様体になることが分かります。Kähler 多様体の complex submanifold は再び Kähler 多様体になることは容易に分かるので, 代数多様体はすべて Kähler 多様体になることが分かりました。

こうした geometric quantization という枠組みは, 例えば数学では表現論へ応用する事ができます。代表的なものに, compact Lie 群の表現に関する Borel-Weil 理論というものがあります。compact Lie 群 G に対し, T を G の maximal torus とするとき, $M := G/T$ は flag manifold と呼ばれ Kähler 多様体になります。このとき, flag manifold Mに対して geometric quantization を行うと, G の表現が, M上の適当な holomorphic line bundle L の holomorphic section の空間 $H^0(M, L)$ 上に構成できます。この表現は既約表現であることが示せます。この例は, Mの "量子化" として期待される性質が, polarization を考えることでうまく得られるということを示す一例になっています。

最後に, classical な symmetry と量子化された symmetry との差について触れたいと思います。

上でみてきたように, "classical な対象"(M, ω) を "量子化する" には, すべてを "量子化された対象"(L, ∇) 上に持ち上げて考えなければなりません。特に symmetry について考えてみましょう。

§6 でみたように, "classical な symmetry" の全体である $G_{(M,\omega)}$と "量子化された

symmetry” の全体である $\tilde{G}_{(L,\nabla)}$ との関係は次の図式で表せます。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & U(1) & \rightarrow & \tilde{G}_{(L,\nabla)} & \rightarrow & G'_{(M,\omega)} & \rightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & G_{(M,\omega)} & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & \mathcal{M}_{(M,\omega)} & \cong & H^1(M,\mathbb{R})/H^1(M,\mathbb{Z}) \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

この図式は, “classical な symmetry” は, ($\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ という obstuction を clear しても,) central extension をしなければ, 一般に, “量子化された symmetry” には持ち上がらないことを表わしています。このことは, 物理でよく,「量子化すると phase factor は決まらない」とか,「symmetry の作用は projective にしか決まらない」とか言われることの, 1つの幾何学的な表現とみることができます。

8. Lie 群の central extension

§6 でみたように, “量子化された対象”$(L, \nabla) \to M$には,

$$0 \to U(1) \to \tilde{G}_{(L,\nabla)} \to G'_{(M,\omega)} \to 0$$

という Lie 群の central extension が付随していました。これは infinitesimal には

$$0 \to \mathbb{R} \to i^* C^\infty(M) \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)} \to 0$$

という Lie 環の central extension に対応していました。

ここでは, これらを用いてLie群のcentral extensionを作ることを考えてみましょう。

いま, $G'_{(M,\omega)}$の subgroup H があって, H の M上の作用はsimply transitiveであるとします。言い替えると, $p_o \in M$ を1つfix して, $j\colon H \to M$ を, $j(h) = h \cdot p_o$ と定めるとき, $j\colon H \xrightarrow{\sim} M$ となっているとします。このとき, $\tilde{H} := \tilde{G}_{(L,\nabla)}|_H$, $\quad S(L) := L$ の unit sphere bunble, とすると, $\tilde{H}$ の $S(L)$ への作用も simply transitive になることが容易に分かります。したがって, $u_o \in S(L)_{p_o}$を1つ fix して, $\tilde{j}\colon \tilde{H} \to S(L)$ を, $\tilde{j}(\tilde{h}) = \tilde{h} \cdot u_o$ によって定めると,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} & \xrightarrow[\sim]{\tilde{j}} & S(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow[\sim]{j} & M \end{array}$$

という同一視ができます。この同一視により, $M, S(L)$ は Lie 群になり

$$0 \to U(1) \to S(L) \to M \to 0$$

という Lie 群の central extension が得られることが分かります。

ここで議論を逆にたどると, 次のことが分かります。

Hを, $H^1(H, \mathbb{R}) = 0$ となる Lie 群とします。これは, 単連結な Lie 群や, compact (もしくは complex) semi-simple Lie 群などを含みます。いま ω を H上の left invariant closed 2-form であって, $[\omega] \in H^2(H,\mathbb{Z})$ となるものとします。条件から $\mathcal{M}_{(M,\omega)}$ は 1 点 (L,∇) からなります。このとき H は, 左からのかけ算により, ω を保って H 自身に simply transitive に作用します。したがって上でみたように, L の unit sphere bundle $S(L)$ は, $\tilde{e} \in S(L)_e$ (e は H の単位元) を 1 つ fix することで Lie 群の構造を持ち,

$$0 \to U(1) \to S(L) \to H \to 0$$

という central extension を与えることが分かります。

さて, H 上の left invariant closed 2-form は, $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*, \delta\omega = 0$ という元と同一視できるので, $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ という cohomology class を定めます。

一方, $\tilde{H} := S(L), \tilde{\mathfrak{h}} = Lie(\tilde{H})$ とするとき, Lie 群の central extension

$$0 \to U(1) \to \tilde{H} \to H \to 0$$

から, Lie 環の central extension

$$0 \to \tilde{\mathfrak{h}} \to \mathfrak{h} \to 0$$

が得られます。このとき, この central extension の extension class $c(\tilde{\mathfrak{h}}) \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ と $[\omega]$ はどういう関係にあるのでしょうか。

これについては次のことが言えます。

Proposition 8.1

$c(\tilde{\mathfrak{h}}) = -[\omega]$

proof :

$\delta\omega = 0$ となることから,

$$\omega([\xi,\eta],\zeta) = \omega([\xi,\zeta],\eta) + \omega(\xi,[\eta,\zeta]), \quad \xi,\eta,\zeta \in \mathfrak{h}$$

となることに注意します。

82

いま, $\xi \in \mathfrak{h}$ の定める infinitesimal action $\xi^* \in \mathfrak{X}(H)$ は, $h \in H$に対して,

$$\xi^*_h = h^{-1}\xi h \in T_hH \cong \mathfrak{h}$$

で与えられます。

ここで天下り的ですが, $\xi, \eta \in \mathfrak{h}$ に対して, $F_{(\xi,\eta)} \in C^\infty(H)$ を,

$$F_{(\xi,\eta)}(h) := \omega(\xi^*_h, \eta^*_h) = \omega(h^{-1}\xi h, h^{-1}\eta h)$$

により定めます。

このとき, $\zeta \in \mathfrak{h} \cong T_hH$に対し,

$$\begin{aligned}(dF_{(\xi,\eta)})_h(\zeta) &= \omega([h^{-1}\xi h, \zeta], h^{-1}\eta h) + \omega(h^{-1}\xi h, [h^{-1}\eta h, \zeta]) \\ &= \omega([h^{-1}\xi h, h^{-1}\eta h], \zeta) \qquad\qquad (\Leftarrow \delta\omega = 0) \\ &= \omega(h^{-1}[\xi, \eta]h, \zeta) \\ &= \omega([\xi, \eta]^*_h, \zeta)\end{aligned}$$

となることから,

$$\iota_{[\xi,\eta]}\omega = dF_{(\xi,\eta)}$$

となることが分かりました。

§3 の最後で述べたことから, $\xi \in \mathfrak{h}$ に対して, $f_\xi \in C^\infty(H)$ を,

$$\begin{cases} \iota_{\xi^*}\omega = df_\xi \\ f_\xi(e) = 0 \end{cases}$$

となるものとして,

$$\gamma(\xi, \eta) := \{f_\xi, f_\eta\} + f_{[\xi,\eta]}$$

とすると, $c(\tilde{\mathfrak{h}}) = [\gamma]$ となります。

(ここで第 2 項が "+" になっているのは, H作用が左作用で, $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}'_{(M,\omega)}$が Lie 環の反準同型になっているからです。)

上でみたことから,

$$f_{[\xi,\eta]} = \omega(\xi^*, \eta^*) - \omega(\xi, \eta)$$

となります。一方,

$$\{f_\xi, f_\eta\} = -\omega(\xi^*, \eta^*)$$

となるので,

$$\gamma(\xi, \eta) = -\omega(\xi, \eta)$$

となることが分かります。∎

ここで, 例を見てみることにしましょう。

(V, ω) を symplectic vector space として, $(M, \omega) = (V, \omega)$ とします。また, $H = V$ として, Hの V上の作用を平行移動で定めます。いま, $\alpha \in \Omega^1(V, \mathbb{R})$ を, $u \in V$に対して,

$$\alpha_u(v) = \omega(u, v), \quad v \in T_u V \cong V$$

により定め, $L = \underline{\mathbb{C}} = V \times \mathbb{C}, \nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\alpha$ と定めます。

このとき, $\tilde{H} = S(L) = V \times U(1)$ に induce される Lie 群の構造は,

$$(u, a) \cdot (v, b) = (u + v, e^{\pi\sqrt{-1}\omega(u,v)}ab), \quad u, v \in V, \quad a, b \in U(1)$$

となります。$\tilde{H}$は Heisenberg 群と呼ばれています。

次に無限次元の例を見てみましょう。

対象が無限次元なのでデリケートな点もありますが, ここでは大まかな (多少いい加減な) 説明をします。

G を単連結な compact simple Lie 群とします。このとき

- $LG = C^\infty(S^1, G)$

- $\Omega G = \{\gamma \in LG | \gamma(0) = e\}$

  ただし, $0, e$ はそれぞれ S^1, G の単位元とします。

$LG, \Omega G$ は,

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(\theta) = \gamma_1(\theta) \cdot \gamma_2(\theta), \quad \theta \in S^1$$

という積により Lie 群になります。

このとき, G は LG に constant loop として含まれていると考えると,

$$0 \to G \to LG \to \Omega G \to 0$$

という exact sequence から,

$$\cdots \to \pi_i(G) \to \pi_i(LG) \to \pi_i(\Omega G) \to \pi_{i-1}(G) \to \cdots$$

という exact sequence が得られますが, $\pi_i(\Omega G) \cong \pi_{i+1}(G)$ であることと, $\pi_1(G) = \pi_2(G) = 0, \quad \pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$ であることから, $\pi_1(LG) = 0, \quad \pi_2(LG) \cong \mathbb{Z}$ となることが分かります。

したがって, $H^1(LG, \mathbb{Z}) = 0, H^2(LG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ となることが分かりました。

$H^2(G, \mathbb{Z}) = 0$ なので, G 自体にはおもしろい central extension はありませんが, Loop 群 LG を考えると, $H^2(LG, \mathbb{Z})$ の元から non-trivial な central extension が得られます。

以下では, $G \subset U(N)$ と埋め込んで, G や $\mathfrak{g} := Lie(G)$ の元は行列だとみなすことにします。

$\xi, \eta \in L\mathfrak{g} := C^\infty(S^1, \mathfrak{g}) = \mathrm{Lie(LG)}$ に対して

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \mathrm{tr}(\xi d\eta)$$

により, $\omega \in \bigwedge^2 L\mathfrak{g}$ を定めます。このとき, $\delta\omega = 0$ となることは容易に分かります。したがって, ω は $[\omega] \in H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ を定めますが, 実は $H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\omega]$ であることが知られています。

いま, ωを LG 上の left invariant 2-form と同一視して, $[\omega] \in H^2(LG,\mathbb{R})$ とみなすことにします。このとき適当に constant $c_o > 0$ をとると, $\omega_o := c_o\omega$として, $H^2(LG,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_o]$ とできます。このとき, $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathcal{M}_{(LG,k\omega_o)}$の uique な元 $(L,\nabla) \to LG$ を用いることにより

$$0 \to U(1) \to S(L) \to LG \to 0$$

という central extension が得られます。

こうして得られた $S(L)$ は, $\widehat{LG}_k$などと書かれ, LG の level k の central extension と呼ばれています。

この prequantum bundle $(L,\nabla) \to LG$ は conformal field theory の１つである Wess-Zumino-Witten model と密接な関係があるのですが, それについては今野さんの解説を参照して下さい。

最後に, いままで述べてきたことに関して１つ注意をしたいと思います。

これまではすべて smooth category で話を進めてきましたが, これらを holomorphic category で行うことも可能です。すなわち, C^∞-manifold を complex manifold に, closed 2-form を holomorphic closed 2-form に, hermitian line bundle を holomorphic line bundle に, hermitian connection を holomorphic connection に etc. というように, すべてを holomorphic な object に置き換えて話をする事ができます。しかし, それはほとんど straightforward にできるので, これを行うことは読者に任せたいと思います。

例えば, 上で考えた compact Lie 群 G の Loop 群 LG のかわりに, G の複素化である complex Lie 群 $G^{\mathbb{C}}$の Loop 群 $LG^{\mathbb{C}}$を考えると, 同様の考察で,

$$0 \to \mathbb{C}^\times \to \widehat{LG^{\mathbb{C}}} \to LG^{\mathbb{C}} \to 0$$

という complex Lie 群の central extension が得られます。これも Wess-Zumino-Witten model と密接に関係するのですが, それについても今野さんの解説を参照し

て下さい。

9. Chern-Simons gauge 理論に向けて

a) introduction

ここでは, Chern-Simons gauge 理論について, その出発点となるべき部分を説明します。

歴史的には Witten が, [W-3] において, Chern-Simons functional を Lagrangian とする場の理論を展開し, それが Wess-Zumino-Witten model と密接な関係にあることを見抜くことで, Jones polynomial など link invariant が現われることを論じたのが始まりです。そこでは path integral を用いて議論が展開されているのですが, 現時点では, 数学として path integral を基礎付けることはできないので, path integral が持つべき性質を抽象し, それを公理化した枠組みを, Atiyah が [A-1] において topological field theory として提出しました。同様の試みはそれ以前に, Segal が conformal field theory に対して行っており, Atiyah はそれをまねたと言ってよいと思います。

topological field theory というものも, もともとは「Donaldson の理論を場の理論として解釈しなさい」という Atiyah の宿題に Witten が答えたもので, [W-1],[W-2] において始めて展開された考え方ですが, そこで展開されているのはいわゆる "cohomological な理論" と言われるもので, 最初から action が topological な Chern-Simons gauge 理論とは少し趣が異なるように思います。

数学者の側では, Atiyah の公理系を満たすように 数学的な model を厳密に構成するということが行われているのですが, そこでは公理系は天与のものとして認めてしまい, それが出てきた由来などに振れられることはあまりないと思われます。

Chern-Simons gauge 理論は, これまで述べてきた connection 付きの hermitian line bundle の話が非常にうまくゆく例ですが, ここではそれを説明するとともに, どうして Atiyah の公理系が自然に現れてくるのかをみてゆくことにします。

よく知られているように, 数学としては Reshetikhin-Turaev や河野 俊丈氏などによって対応する invariant の構成がなされて, 現在も様々に発展しているわけですが, そうした話題については話を聞く機会も多いでしょうから, ここではすべて省略する

ことにします。

b) Chern-Simons theory の setting

まず, 次の notations を定めておきます。

Notation

- M: compact oriented 3-dimensional manifold.
- G: compact simple Lie 群.

簡単のため、$\pi_1(G) = 1$ とします。

- $\mathfrak{g}$:=Lie(G): G の Lie 環.
- $\begin{array}{c} P := M \times G \\ \downarrow \\ M \end{array}$: M 上の trivial G-bundle.

(上の仮定のもとでは, M 上の G-bundle は自明なものしかありません。)

- $\mathcal{A}_M := \{$ P 上の connection 全体 $\}$.
- $\mathcal{G}_M := C^\infty(M, G)$: gauge 変換群.

また, Σ を compact oriented 2-dimensional manifold とするとき, $\mathcal{A}_\Sigma$, $\mathcal{G}_\Sigma$ を上で M を Σ におきかえて同様に定めることにします。

$\mathcal{A}_M$ は $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ を model とする affine space ですが, 今の場合 trivial connection という特別な connection があるので, それを基点として, $\mathcal{A}_M \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ と同一視することにします。

以後の話では, connection space のことを知らなくとも, $\mathcal{A}_M = \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ だと思っていればそれほど困ることはないと思います。前と同様に $G \subset U(N)$ と埋め込んで, G, $\mathfrak{g}$ は行列だとみなすことにします。

さて, connection space $\mathcal{A}_M$ には $\mathcal{G}_M$ が引き戻しによって (右から) 作用します。これは, $g \in \mathcal{G}_M$, $A \in \mathcal{A}_M$ に対して,

$$g^* A := g^{-1} A g + g^{-1} dg$$

によって与えられます。

また, connection $A \in \mathcal{A}_M$ に対して, その curvature F_A が,

$$F_A := dA + A \wedge A \qquad \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

によって定義されます。

ここまでは一般論ですが, $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$ ということを使うと, 次のような特別なことができます。

M を closed とします。いま,

$$< \alpha, \beta > := \int_M \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta), \qquad \alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}), \quad \beta \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

によって pairing $< \cdot, \cdot >: \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \times \Omega^2(M, \mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ を定めると, $< \cdot, \cdot >$は非退化な pairing になります。これにより,

$$\Omega^2(M, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})^*$$

とみなすことにします。

さて, $A \in \mathcal{A}_M$ に対して tangent space は $T_A \mathcal{A}_M = \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ となりますが, curvature F は $\mathcal{A}_M \ni A \mapsto F_A \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})^*$ とみなすことにより, $\mathcal{A}_M$ 上の 1-form であるとみなすことができます。すなわち, $F \in \Omega^1(\mathcal{A}_M, \mathbb{R})$ とみなせます。このとき F は exact form になり, Chern-Simons functioal と呼ばれる $\mathcal{A}_M$ 上の関数 $CS : \mathcal{A}_M \to \mathbb{R}$ を用いて, $F = dCS$ と書けることが分かります。これは具体的には,

$$CS(A) := \tfrac{1}{2} \int_M \mathrm{tr}(dA \wedge A + \tfrac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

によって与えられます。

$$d\ \mathrm{tr}(dA \wedge A + \tfrac{2}{3} A \wedge A \wedge A) = \mathrm{tr}(F_A \wedge F_A)$$

となりますが, CS はもともと secondary characteristic class として見つかったものです。

簡単な計算で次のことが示せます。後でも用いるので, $\partial M \neq \phi$ の場合まで込めて書くことにします。

lemma 9.1

$g \in \mathcal{G}_M$, $A \in \mathcal{A}_M$ に対して,

$$\begin{aligned} CS(g^*A) = CS(A) &+ \tfrac{1}{2}\int_{\partial M} \mathrm{tr}(A \wedge dg\, g^{-1}) \\ &- \tfrac{1}{6}\int_M \mathrm{tr}(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg). \end{aligned}$$

ここで最後に現れる, $\int_M \mathrm{tr}(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg)$ には次のような意味があります。いま, G の元を, $h \in G$ と表わすことにして, G 上の 3-form η を,

$$\eta := \mathrm{tr}(h^{-1}dh \wedge h^{-1}dh \wedge h^{-1}dh)$$

と定めます。容易に分かるように, $d\eta = 0$ となります。そこで, η は, $[\eta] \in H^3(G, \mathbb{R})$ という元を定めますが,

$$H^3(G, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\eta]$$

となることが知られています。したがって, 適当な constant c_oを選ぶと, $\eta_0 = c_0\eta$ として,

$$H^3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\eta_0]$$

となるようにできます。例えば $G = SU(N)$ に対しては, $c_0 = \frac{1}{24\pi^2}$ です。

さて, $\partial M = \phi$ のときには

$$CS(g^*A) = CS(A) - \frac{1}{6c_0}\int_M g^*\eta_0$$

と書けますが, 新しく (normalized) Chern-Simons funcitional CS' を

$$CS'(A) := 6c_0 CS(A)$$

と定義し直すと,

$$CS'(g^*A) = CS'(A) - \int_M g^*\eta_0$$

となり,

$$\int_M g^*\eta_0 = \langle g^*[\eta_0], [M]\rangle \in \mathbb{Z}$$

となることから, $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $e^{2\pi\sqrt{-1}k\,CS'(A)}$ は, $\mathcal{A}_M$ 上の $\mathcal{G}_M$ 不変な関数になります。

このとき次の積分を考えてみましょう。

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} e^{2\pi\sqrt{-1}k\,CS'(A)}\mathcal{D}A.$$

Witten は, これが 3 次元多様体 M の topological invariant になることを主張しました。

一般に, 場の理論では, 多様体 (物理では時空といいますが) M上の場の空間 $\mathcal{F}_M$とその上の action と呼ばれる関数 $S\colon \mathcal{F}_M \to \mathbb{R}$ が与えられたときに 1 つの物理系が与えられたと考え,

$$\int_{\mathcal{F}_M} e^{\sqrt{-1}S(\phi)}\mathcal{D}\phi$$

という形の "積分" を問題にします。前に §7 で述べた古典力学や量子力学との対応でいうと, 上の "積分" を考えることが Hamiltonian を考えることに相当します。action Sの主要項はだいたい ϕ の 2 次式で与えられ, 上の "積分" は Gauss 型の積分のようなものとみなせます。このような "exponential sum" を考えることは数学でもよくあることで, 上の "積分" も数学的に捉えることができるようになれば, おもしろい対象になるのではないかと期待されます。

ともかく, ここでは $Z_k(M) \in \mathbb{C}$ が何らかの方法で定義されたとして話を進めます。

次に $\partial M \neq \emptyset$ のときに $Z_k(M)$ の定義を拡張しましょう。

このときは, $Z_k(M) \in \mathbb{C}$ ではなく, $\mathcal{A}_\Sigma$上の関数 $Z_k(M)\colon \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{C}$ として

$$Z_k(M)(\alpha) = \int_{A|_\Sigma=\alpha} e^{2\pi\sqrt{-1}kCS'(A)}\mathcal{D}A, \quad \alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$$

と “定義” すると都合のよいことがあとで分かります。

さて closed manifold Mを, $M = M_1 \cup_\Sigma M_2, \quad \partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$と 2 つに分けたとします。このとき $Z_k(M)$ は

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_\Sigma} Z_k(M_1)(\alpha) Z_k(M_2)(\alpha) \mathcal{D}\alpha$$

と表わせ, これは,

$$Z_k(M) =< Z_k(M_1), Z_k(M_2) >$$

という pairing の形で表わすことができます。このことを拡張したのが Atiyah の公理でいう gluing axiom です。これは, “積分” という立場からみると, Mの中の surface Σを考え, Σ上の boundary 条件 $\alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$を fix して “積分” してから boundary 条件である $\alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$ について “積分” したものと, 最初から boundary 条件なしに “積分” したものは同じになるということを表わしたものです。

c) $\mathcal{A}_\Sigma$の幾何

さて, $\partial M = \Sigma$とするとき, $Z_k(M)$ は $\mathcal{A}_\Sigma$上の関数であると考えたわけですが, これはある connection 付きの hermitian line bundle $(L_\Sigma, \nabla) \to \mathcal{A}_\Sigma$の section とみなす方がより自然だということを見てみることにしましょう。そのために, いままでみてきた枠組みを無限次元の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$に適用するとどういうことになるのかを考えてみましょう。

$\alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$に対して, tangent space は, $T_\alpha \mathcal{A}_\Sigma = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ となりますが, $T_\alpha \mathcal{A}_\Sigma$上には,

$$\omega(\alpha, \beta) = -\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

により skew bilinear form が入ります。ω は非退化で, $(\mathcal{A}_\Sigma, \omega)$ は無限次元の symplectic manifold になります。

このとき, $(L_\Sigma, \nabla) \in \mathcal{M}_{(\mathcal{A}_\Sigma, \omega)}$を次のように作ります。

$\theta \in \Omega^1(\mathcal{A}_\Sigma, \mathbb{R})$ を, $\alpha \in \mathcal{A}_\Sigma \cong \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ に対して,

$$\begin{aligned}\theta_\alpha(\beta) :&= \frac{1}{2}\omega(\alpha, \beta) \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha, \beta), \qquad \beta \in T_\alpha \mathcal{A}_\Sigma = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})\end{aligned}$$

により定め, $L_\Sigma = \underline{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C}$, $\quad \nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\theta$とします。これは §8 で Heisenberg 群を考えたときに行ったことの無限次元版です。

さて, $\mathcal{A}_\Sigma$には $\mathcal{G}_\Sigma$が作用していましたが, 実はもっと大きな群 $\mathrm{Diff}(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$が作用します。

これは次のようにみることができます。いま,

$$\mathrm{Aut}(P) := \{\sigma\colon P \to P| \quad \sigma \text{ は G-bundle の同型} \quad \}$$

として, $j\colon \mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Diff}(\Sigma)$ を, $\sigma \in \mathrm{Aut}(P)$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sigma} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{j(\sigma)} & \Sigma \end{array}$$

が可換図式になるものとして定義します。すると,

$$0 \to \mathcal{G}_\Sigma \to \mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Diff}(\Sigma) \to 0$$

という exact sequence ができますが, Pが trivial ということからこの exact sequence は split して, $\mathrm{Aut}(P) \cong \mathrm{Diff}(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$となります。$\mathrm{Aut}(P)$ は $\mathcal{A}_\Sigma$上に connection を引き戻すことにより作用するので, $\mathrm{Diff}(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$が $\mathcal{A}_\Sigma$に作用します。

具体的には, $(\phi, g) \in \mathrm{Diff}(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$に対して,

$$(\phi, g)^*\alpha := g^{-1} \cdot \phi^*\alpha \cdot g + g^{-1}dg, \quad \alpha \in \mathcal{A}_\Sigma \cong \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

と書けます。このとき, $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) = \{\phi \in \mathrm{Diff}(\Sigma)| \quad \phi$ は orientation preserving $\quad\}$ と定めると, $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$の作用は ω を保つことが容易に分かります。

この作用は moment map を持つのでしょうか。

以下では少し一般化して, $\partial\Sigma \neq \emptyset$という場合も込めて考えてみることにしましょう。

$\mathfrak{g}_\Sigma := \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g})$ とすると, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma$と書けます。

このとき簡単な計算で次が分かります。

lemma 9.2

1). $\quad (\phi, g) \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma, \quad (X, \xi) \in \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma$ に対して,

$$(\phi, g) \cdot (X, \xi) \cdot (\phi, g)^{-1} = (\phi_* X, (\phi^{-1})^* (\iota_X dg \cdot g^{-1} + g\xi g^{-1}))$$

2). $\quad (X, \xi), (Y, \eta) \in \mathfrak{X}(\Sigma) \otimes \mathfrak{g}_\Sigma$に対して,

$$[(X, \xi), (Y, \eta)] = (-[X, Y], L_Y \xi - L_X \eta + [\xi, \eta])$$

また, infinitesimal な作用は次で与えられることも容易に計算できます。

lemma 9.3

$(X, \xi) \in \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma, \quad \alpha \in \mathcal{A}_\Sigma \cong \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ に対して,

$$\begin{cases} X^*_\alpha = L_X \alpha \\ \xi^*_\alpha = d_\alpha \xi := d\xi + \alpha\xi - \xi\alpha \end{cases}$$

さて, $\rho\colon \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma \to \mathrm{Ham}(\mathcal{A}_\Sigma)$ を, $\rho(X, \xi) = X^* + \xi^*$により定めると,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & C^\infty(\mathcal{A}_\Sigma) \arrow[r] & Ham(\mathcal{A}_\Sigma) \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma \arrow[u, "\rho"] & \end{tikzcd}$$

という図式から,

$$0 \to \mathbb{R} \to \rho^* C^\infty(\mathcal{A}_\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma \to 0$$

という central extension が得られます。この extension は trivial でしょうか。言いかえると $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$の作用は Hamiltonian 作用でしょうか。

次にこれを調べてみましょう。前と同様にまず次のことをみましょう。

lemma 9.4

$X \in \mathfrak{X}(\Sigma), \xi \in \mathfrak{g}_\Sigma$に対して,

$$\begin{cases} f_X(\alpha) = -\frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}(L_X\alpha \wedge \alpha) \\ f_\xi(\alpha) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(\xi F_\alpha) - \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi\alpha) \end{cases} \quad , \alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$$

とすると,

$$\begin{cases} \iota_{X^*}\omega = df_X, \text{ かつ } f_X(0) = 0 \\ \iota_{\xi^*}\omega = df_\xi, \text{ かつ } f_\xi(0) = 0 \end{cases}$$

となる。

proof :

f_ξに対してのみ示すことにします。

α_tを, $\mathcal{A}_\Sigma$の path で, $\frac{d\alpha_t}{dt}|_{t=0} = \beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ となるものとすると, $F_\alpha = d\alpha + \alpha \wedge \alpha$ から,

$$\frac{d}{dt}F_{\alpha_t}|_{t=0} = d\beta + \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha$$

となります。

一般に $\beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ に対して

$$d_\alpha\beta := d\beta + \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha$$

と定めることにします。

このとき,

$$(df_\xi)_\alpha(\beta) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(\xi d_\alpha\beta) - \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi\beta)$$

となりますが,

$$d\mathrm{tr}(\xi\beta) = \mathrm{tr}(d_\alpha\xi \wedge \beta) + \mathrm{tr}(\xi d_\alpha\beta)$$

となることから,

$$(df_{\xi})_{\alpha}(\beta) = -\int_{\Sigma} \mathrm{tr}(d_{\alpha}\xi \cdot \beta) = \iota_{\xi^*}\omega(\beta)$$

となることが分かります。∎

次に extension class を計算してみましょう。

これは §3 でみたように,

$$\gamma(A, B) = \{f_A, f_B\} - f_{[A,B]}, \quad A, B \in \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_{\Sigma}$$

という γ の定める class $[\gamma] \in H^2(\mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_{\Sigma}, \mathbb{R})$ で表わせます。

これは次のように計算できます。

Proposition 9.5

$(X, \xi), (Y, \eta) \in \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_{\Sigma}$に対して,

$$\gamma((X, \xi), (Y, \eta)) = \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi d\eta)$$

となる。

proof :

i). $\gamma(X, Y) = 0$ を示します。

$$\begin{aligned}\{f_X, f_Y\}(\alpha) &= -\omega(X^*, Y^*) \\ &= \int_{\Sigma} \mathrm{tr}(L_X\alpha \wedge L_Y\alpha) \\ &= -\int_{\Sigma} \mathrm{tr}(L_Y L_X \alpha \wedge \alpha),\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\{f_X, f_Y\}(\alpha) &= -\int_{\Sigma} \mathrm{tr}(\alpha \wedge L_X L_Y \alpha) \\ &= \int_{\Sigma} \mathrm{tr}(L_X L_Y \alpha \wedge \alpha),\end{aligned}$$

と表わせることから，

$$\{f_X, f_Y\}(\alpha) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}(L_{[X,Y]}\alpha \wedge \alpha)$$
$$= f_{[(X,0),(Y,0)]}(\alpha)$$

となることが分かります。

ii). $\gamma(X,\eta) = 0$ を示します。

$$\begin{aligned}\{f_X, f_\eta\}(\alpha) &= -\omega(X^*, \eta^*)\\ &= \int_\Sigma \mathrm{tr}(L_X\alpha \wedge d_\alpha\eta)\\ &= -\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha \wedge L_X d_\alpha\eta)\end{aligned}$$

となりますが，

$$L_X d_\alpha \eta = d_\alpha L_X\eta + L_X\alpha\cdot\eta - \eta\cdot L_X\alpha$$

となることから，

$$\{f_X, f_\eta\}(\alpha) = -\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha\wedge d_\alpha L_X\eta) - \int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha \wedge (L_X\alpha\cdot\eta - \eta\cdot L_X\alpha))$$

となります。

さらに，

$$d\mathrm{tr}(\alpha\wedge L_X\eta) = \mathrm{tr}(d_\alpha\alpha \wedge L_X\eta) - \mathrm{tr}(\alpha\wedge d_\alpha L_X\eta)$$

となることから，

$$\begin{aligned}\{f_X, f_\eta\}(\alpha) &= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{tr}(\alpha\wedge L_X\eta) - \int_\Sigma \mathrm{tr}(d_\alpha\alpha\wedge L_X\eta) - \int_\Sigma \mathrm{tr}(L_X(\alpha\wedge\alpha)\wedge\eta)\\ &= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{tr}(\alpha\wedge L_X\eta) - \int_\Sigma \mathrm{tr}((d_\alpha\alpha - \alpha\wedge\alpha)\wedge L_X\eta)\end{aligned}$$

と書けますが，

$$d_\alpha\alpha - \alpha\wedge\alpha = d\alpha + \alpha\wedge\alpha + \alpha\wedge\alpha - \alpha\wedge\alpha = F_\alpha$$

となることから,

$$\{f_X, f_\eta\}(\alpha) = -\int_\Sigma \mathrm{tr}(F_\alpha \wedge L_X\eta) + \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(L_X\eta \wedge \alpha)$$
$$= f_{L_X\eta}(\alpha) = f_{[(X,0),(0,\eta)]}(\alpha)$$

が分かります。

iii). $\gamma(\xi,\eta) = \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi d\eta)$ を示します。

$$\{f_\xi, f_\eta\}(\alpha) = -\omega(\xi^*, \eta^*) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(d_\alpha\xi \wedge d_\alpha\eta)$$

となりますが,

$$\begin{cases} d\mathrm{tr}(\xi d_\alpha\eta) = \mathrm{tr}(d_\alpha\xi \wedge d_\alpha\eta) + \mathrm{tr}(\xi d_\alpha d_\alpha\eta) \\ d_\alpha d_\alpha\eta = F_\alpha \wedge \eta - \eta \wedge F_\alpha \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\{f_\xi, f_\eta\}(\alpha) &= -\int_\Sigma (\xi(F_\alpha\eta - \eta F_\alpha)) + \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi d_\alpha\eta) \\ &= \int_\Sigma \mathrm{tr}([\xi,\eta]F_\alpha) + \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi(d\eta + \alpha\eta - \eta\alpha)) \\ &= \int_\Sigma \mathrm{tr}([\xi,\eta]F_\alpha) - \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}([\xi,\eta]\alpha) + \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi d\eta) \\ &= f_{[(0,\xi),(0,\eta)]}(\alpha) + \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi d\eta)\end{aligned}$$

となることが分かります。∎

さて, $\mathfrak{g}_{\partial\Sigma} := C^\infty(\partial\Sigma, \mathfrak{g})$ として, $\gamma' \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}_{\partial\Sigma}{}^*$を,

$$\gamma'(\xi', \eta') = \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\xi' d\eta'), \quad \xi', \eta' \in \mathfrak{g}_{\partial\Sigma}$$

で定めます。γ' は, $\partial\Sigma \cong S^1$のとき, §8 で Loop 群の central extension を作るときに用いた 2-cocycle です。

$r\colon \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma \to \mathfrak{g}_{\partial\Sigma}$ を, $r(X,\xi) = \xi|_{\partial\Sigma}, \quad (X,\xi) \in \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma$により定めると,

$$0 \to \mathbb{R} \to \rho^* C^\infty(\mathcal{A}_\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma \to 0$$

という central extension の extension class は, $r^*[\gamma'] \in H^2(\mathfrak{X}(\Sigma) \oplus \mathfrak{g}_\Sigma, \mathbb{R})$ で与えられることが分かりました。

$\partial\Sigma \neq \emptyset$ のときには, $r^*[\gamma'] \neq 0$ となることが示せ, $\mathcal{A}_\Sigma$上の $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$の作用は $\mathcal{G}_{\partial\Sigma,0} := \{g \in \mathcal{G}_\Sigma| \quad g|_{\partial\Sigma} = 0 \quad \}$ として, subgroup $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_{\Sigma,0}$に制限しなければ Hamiltonian 作用にはならないことが分かります。

このとき $f_\bullet$の equivariance を check することで次が分かります。

Proposition 9.6

$X \in \mathfrak{X}(\Sigma), \quad \xi \in \mathfrak{g}_{\Sigma,0} := \{\xi \in \mathfrak{g}_\Sigma| \quad \xi|_{\partial\Sigma} = 0 \quad \}$ に対して

$$\begin{cases} f_X(\alpha) = -\frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}(L_X\alpha \wedge \alpha) \\ f_\xi(\alpha) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(\xi F_\alpha) \end{cases}$$

は $\mathcal{A}_\Sigma$上の $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_{\Sigma,0}$作用の moment map を与える。

さて, 話を $\partial\Sigma = \emptyset$ の場合に戻します。

§6 でみたように, moment map の存在は prequantum bundle への $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$ 作用の infinitesimal な持ち上げと同値でした。いまの場合これはどうなっているのでしょうか。また, これに対応する $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$の作用の持ち上げは存在するのでしょうか。

驚いたことに, Chern-Simons functional を用いることにより, この問に対する答が得られます。次にこのことを見てみましょう。

いま compact oriented 3-dimensional manifold Mを, $\partial M = \Sigma$となるものとします。前にみたように, $\tilde{g} \in \mathcal{G}_M, A \in \mathcal{A}_M$に対して,

$$CS'(\tilde{g}^*A) = CS'(A) + 3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(A \wedge d\tilde{g}\tilde{g}^{-1}) - \int_M \tilde{g}^*\eta_o$$

となりますが, $[\eta_o] \in H^2(G, \mathbb{Z})$ であることから,

$$e^{2\pi\sqrt{-1}(CS'(\tilde{g}^*A) - CS'(A))}$$

100

は, $g=\tilde{g}|_\Sigma, \alpha = A|_\Sigma$にしかよらないことが, さらに, $\partial M = \Sigma$ となる Mのとり方にもよらないことが分かります。そこで,

$$\zeta(g,\alpha) := e^{2\pi\sqrt{-1}S(g,\alpha)}$$
$$S(g,\alpha) := 3c_o \int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha \wedge dg \cdot g^{-1}) - \int_M \tilde{g}^* \eta_o$$

により, $\zeta\colon \mathcal{G}_\Sigma \times \mathcal{A}_\Sigma \to U(1)$ を定めると, これは $\partial M = \Sigma$ となる Mや, $\tilde{g}|_\Sigma = g$ となる$\tilde{g} \in \mathcal{G}_M$によらずに定まることが分かります。

さて, symplectic form を, $\omega \mapsto \omega' := 6c_o\omega$, connection form も, $\theta \mapsto \theta' := 6c_o\theta$ と normarize して, $L_\Sigma := \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C}, \nabla' := d - 2\pi\sqrt{-1}\theta'$ で与えられる prequantum bundle $(L_\Sigma, \nabla') \to \mathcal{A}_\Sigma$ を考えます。

このとき次が成り立ちます。

Proposition 9.7

$(\phi, g) \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$に対して,

$$(\phi,g)^*(\alpha,a) := ((\phi,g)^*\alpha, \zeta(g,\phi^*\alpha)a), \quad (\alpha,a) \in L_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C}$$

とすると, これにより $\mathrm{Diff}_+(\Sigma) \ltimes \mathcal{G}_\Sigma$ の (L_Σ, ∇') 上の hermitian metric と connection ∇'を保つ作用が定まり, 対応する moment map は, $X \in \mathfrak{X}(\Sigma), \xi \in \mathfrak{g}_\Sigma$に対して,

$$\begin{cases} f_X(\alpha) = -3c_o \int_\Sigma \mathrm{tr}(L_X\alpha \wedge \alpha) \\ f_\xi(\alpha) = 6c_o \int_\Sigma \mathrm{tr}(\xi \wedge F_\alpha) \end{cases}$$

で与えられる。

proof :

作用になることは,

$$\zeta(g,\alpha) = e^{2\pi\sqrt{-1}(CS'(\tilde{g}^*A) - CS'(A))}$$

という表示を用いると見やすいです。

$(\phi,g)\in \mathrm{Diff}_+(\Sigma)\ltimes \mathcal{G}_\Sigma$に対して, $\zeta_{(\phi,g)}\colon \mathcal{A}_\Sigma\to U(1)$ を $\zeta_{(\phi,g)}(\alpha)=\zeta(g,\phi^*\alpha)$ により定めます。

すると,

$$(\phi,g)^*\nabla'=d-2\pi\sqrt{-1}\{(\phi,g)^*\theta'+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\zeta^{-1}_{(\phi,g)}d\zeta_{(\phi,g)}\}$$

と表せます。

このとき, $\alpha\in\mathcal{A}_\Sigma,\quad \beta\in T_\alpha\mathcal{A}_\Sigma=\Omega^1(\Sigma,\mathfrak{g})$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\{(\phi,g)^*\theta'+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\zeta^{-1}_{(\phi,g)}d\zeta_{(\phi,g)}\}_\alpha(\beta)\\
&=\theta'_{(\phi,g)^*\alpha}(g^{-1}\cdot\phi^*\beta\cdot g)-3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(\phi^*\beta\wedge dg\cdot g^{-1})\\
&=-3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}\{(g^{-1}\cdot\phi^*\alpha\cdot g+g^{-1}\cdot dg)\wedge g^{-1}\cdot\phi^*\beta\cdot g\}-3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(\phi^*\beta\wedge dg\cdot g^{-1})\\
&=-3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha\wedge\beta)\\
&=\theta'_\alpha(\beta)
\end{aligned}$$

となることから, $(\phi,g)^*\theta'=\theta'$となることが分かります。

次に対応する moment map を求めましょう。

i). $X\in\mathfrak{X}(\Sigma)$ に対して, 対応する flow を $\phi_t\in\mathrm{Diff}_+(\Sigma)$ とします。このとき,

$$\phi_t^*(\alpha,a)=(\phi_t^*\alpha,a),\quad (\alpha,a)\in\mathcal{A}_\Sigma\times\mathbb{C}$$

と書けます。§6 でみたことから,

$$\begin{aligned}
f_X(\alpha)&=-\theta'_\alpha(X^*_\alpha)=3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha\wedge L_X\alpha)\\
&=-3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(L_X\alpha\wedge\alpha)
\end{aligned}$$

となることが分かります。

ii). $\xi\in\mathfrak{g}_\Sigma$に対して, $g_t=e^{t\xi}\in\mathcal{G}_\Sigma$ とします。このとき,

$$g_t^*(\alpha,a)=(g_t^*\alpha,\zeta(g_t,\alpha)),\quad (\alpha,a)\in\mathcal{A}_\Sigma\times\mathbb{C}$$

102

と書けます。

$$\frac{d}{dt}\zeta(g_t,\alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}S(g_t,\alpha)|_{t=0} = 2\pi\sqrt{-1}\cdot 3c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha\wedge d\xi)$$

となることから，

$$\begin{aligned} f_\xi(\alpha) &= -\{\theta'_\alpha(d_\alpha\xi) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{d}{dt}\zeta(g_t,\alpha)|_{t=0}\} \\ &= 3c_o\{\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha\wedge d_\alpha\xi) + \int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha\wedge d\xi)\} \\ &= 3c_o\{\int_\Sigma \mathrm{tr}((d_\alpha\alpha + d\alpha)\xi)\} \end{aligned}$$

となりますが，

$$d_\alpha\alpha + d\alpha = d\alpha + \alpha\wedge\alpha + \alpha\wedge\alpha + d\alpha = 2F_\alpha$$

となることから，

$$f_\xi(\alpha) = 6c_o\int_\Sigma \mathrm{tr}(F_\alpha\xi)$$

となることが分かります。∎

したがって，この $\mathrm{Diff}_+(\Sigma)\ltimes\mathcal{G}_\Sigma$ の作用は，Prop.9.6 の moment map に対応するものであることが分かりました。

d). $Z_k(M)$ の $\mathcal{G}_\Sigma$ 不変性

さて，Chern-Simons gauge 理論の話に戻ります。

$\partial M = \Sigma$ として，

$$Z_k(M)(\alpha) = \int_{A|_\Sigma=\alpha} e^{2\pi\sqrt{-1}kCS'(A)}\mathcal{D}A$$

を考えてみましょう。

$\tilde{g} \in \mathcal{G}_M$に対して, $\tilde{g}|_\Sigma = g$ とすると,

$$
\begin{aligned}
Z_k(M)(g^*\alpha) &= \int_{A|_\Sigma=\alpha} e^{2\pi\sqrt{-1}kCS'(\tilde{g}^*A)}\mathcal{D}A \\
&= \int_{A|_\Sigma=\alpha} \zeta(g,\alpha)^k e^{2\pi\sqrt{-1}kCS'(A)}\mathcal{D}A \\
&= \zeta(g,\alpha)^k \int_{A|_\Sigma=\alpha} e^{2\pi\sqrt{-1}kCS'(A)}\mathcal{D}A \\
&= \zeta(g,\alpha)^k Z_k(M)(\alpha)
\end{aligned}
$$

となることから, $Z_k(M)$ は, $L_\Sigma^{\otimes k}$の $\mathcal{G}_\Sigma$-invariant section であることが分かります。そこで Mの invariant $Z_k(M)$ が住むべき空間として, ひとまず,

$$
\mathcal{H}_\Sigma := \Omega^0(\mathcal{A}_\Sigma, L_\Sigma^{\otimes k})^{\mathcal{G}_\Sigma} (= L_\Sigma^{\otimes k} \text{の } \mathcal{G}_\Sigma\text{-invariant section 全体})
$$

と定めてみましょう。このとき $\mathcal{H}_\Sigma$は Σに関してどのように振る舞うのでしょうか。

まず, Σ が Σ_1 と Σ_2 の disjoint union である場合を考えます。このとき, $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_{\Sigma_1} \times \mathcal{A}_{\Sigma_2}, L_\Sigma = L_{\Sigma_1} \boxtimes L_{\Sigma_2}$となるので,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_\Sigma = \mathcal{H}_{\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2} &= \Omega^0(\mathcal{A}_{\Sigma_1} \times \mathcal{A}_{\Sigma_2}, L_{\Sigma_1} \boxtimes L_{\Sigma_2})^{\mathcal{G}_{\Sigma_1} \times \mathcal{G}_{\Sigma_2}} \\
&= \Omega^0(\mathcal{A}_{\Sigma_1}, L_{\Sigma_1})^{\mathcal{G}_{\Sigma_1}} \otimes \Omega^0(\mathcal{A}_{\Sigma_2}, L_{\Sigma_2})^{\mathcal{G}_{\Sigma_2}} \\
&= \mathcal{H}_{\Sigma_1} \otimes \mathcal{H}_{\Sigma_2}
\end{aligned}
$$

となります。

次に, Σの orientation を逆にしてみましょう。すると connection form θ'は$-\theta'$に変わります。これは line bundle L_Σが dual line bundle L_Σ^* に変わったと考えることができます。このことは次のように言うともっとはっきりするかも知れません。

$\mathcal{H}_\Sigma$は, もともと, $\partial M = \Sigma$ となる Mの invariant $Z_k(M)$ が住むべき空間として考えたものでした。いま, $\partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$ となる 2 つの manifold M_1, M_2 を考えます。このとき M_1, M_2の invariant $Z_k(M_1), Z_k(M_2)$ は素朴には $\mathcal{A}_\Sigma$上の関数, 言い替え

ると trivial line bundle $\underline{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C} \to \mathcal{A}_\Sigma$の section とみなせるわけですが, $\mathcal{G}_\Sigma$に対する変換性が $Z_k(M_1)$ と $Z_k(M_2)$ とでは異なるわけです。そこで $\mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C} \to \mathcal{A}_\Sigma$を単なる line bundle ではなくて, "connection 付きの hermitian line bundle" $(L_\Sigma, \nabla') \to \mathcal{A}_\Sigma$ であるとみなすと, hermitian line bundle としては, $L_\Sigma^{\otimes k} \cong \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C} \cong L_\Sigma^{*\otimes k}$ですが, $Z_k(M_1)$ は, $\mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C} \cong L_\Sigma^{\otimes k}$とみなしたときに induce される $\mathcal{G}_\Sigma$作用に関して不変に, $Z_k(M_2)$ は $\mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C} \cong L_\Sigma^{*\otimes k}$とみなしたときに induce される $\mathcal{G}_\Sigma$作用に関して不変になるわけです。

したがって,

$$\begin{cases} Z_k(M_1) \in \Omega^0(\mathcal{A}_\Sigma, L_\Sigma^{\otimes k})^{\mathcal{G}_\Sigma} = \mathcal{H}_\Sigma \\ Z_k(M_2) \in \Omega^0(\mathcal{A}_\Sigma, L_\Sigma^{*\otimes k})^{\mathcal{G}_\Sigma} = \mathcal{H}_\Sigma^* \end{cases}$$

とみなせるので, $\mathcal{H}_{-\Sigma} = \mathcal{H}_{\partial M_2} = \mathcal{H}_\Sigma^*$ と考えるのが自然です。

これまで述べて来たことから, $Z_k(M)$ という invariant を数学的に抽象すると, closed oriented 2-dimensional manifold Σに対して, vector space $\mathcal{H}_\Sigma$で, $\mathcal{H}_{\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2} = \mathcal{H}_{\Sigma_1} \otimes \mathcal{H}_{\Sigma_2}, \mathcal{H}_{-\Sigma} = \mathcal{H}_\Sigma^*$となるものを対応させ, compact oriented 3-dmensional manifold M に対して, $\mathcal{H}_{\partial M}$の元 $Z_k(M)$ を対応させることで, 最初に述べた manifold の貼り合わせに対する gluing axiom を含むいくつかの性質を持ったものとして定式化できることが分かります。これが Atiyah の公理なわけですが, 詳しいことは文献を参照して下さい。

さて, これで invariant を捉える枠組みはできたわけですが, 具体的な model の構成という点では, $\mathcal{H}_\Sigma = \Omega^0(\mathcal{A}_\Sigma, L_\Sigma^{\otimes k})^{\mathcal{G}_\Sigma}$ではまだ "大きすぎる" ので, §7 で述べた polarization (この場合は Kähler polarization を考えるのですが) や $\mathcal{G}_\Sigma$作用に対する不変性を用いて, Marsden-Weinstein quotient $\mathcal{M}_\Sigma$上の対応物に話を還元します。そうした話については, 既にいくつか文献があるので, ここでは, Prop.9.6 から $\mathcal{M}_\Sigma$は "flat G connection の moduli space" になることだけを注意して立ち入ることはしないことにします。興味をもたれた読者がそれぞれ文献にあたられることを期待して, そうした世界への道案内であるこの文章を終わりたいと思います。

References

[A-1]. M.F.Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publ. Math. IHES **68** (1989), 175-86.

[A-2]. M.F.Atiyah, “The geometry and physics of knots,” Cambridge Univ. Press, 1990.

[G-S]. V.Guillemin and S.Sternberg, “Symplectic technique in physics,” Cambridge Univ. Press, 1984.

[P-S]. A.Pressley and G.Segal, “Loop groups,” Oxford Univ. Press, 1986.

[W-1]. E.Witten, *Topological quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 353-86.

[W-2]. E.Witten, *Topological sigma models*, Commun. Math. Phys. **118** (1988), 411-49.

[W-3]. E.Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 351-99.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ループ群の幾何と Wess-Zumino-Witten model

今野 宏 （東京大学・数理科学研究科）

ループ群の幾何と **Wess-Zumino-Witten model**

今野　宏

東京大学数理科学研究科

1. 序

このノートはWess-Zumino-Witten model（以下WZWモデル）と呼ばれるリーマン面上の共形場理論を幾何学としてスケッチしようと試みたものである。

まず、共形場理論とは何か、ということを幾何学として以下のように定式化する。この定式化はG.Segalによるものである。（すべての公理を厳密に列挙することは意図していない。特徴的な性質のみを拾い上げることにする。）

共形場理論とはコンパクトリーマン面の不変量を与える枠組で、次のような性質を持つものである。

(1) 境界のないコンパクトリーマン面Σに対する不変量$Z(\Sigma)$は$\mathbb{C}$に値を持つ。

(2) S^1に対して無限次元ベクトル空間H_{S^1}を対応させる。

(3) 境界のないコンパクトリーマン面Σを

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup_i \Sigma_2$$

と分解する。但し$i\colon S^1 \to \partial\Sigma_1$は向きを保つ同一視とする。このとき境界付きリーマン面Σ_1に対しても不変量

$$Z(\Sigma_1, i) \in H^*_{S^1} \quad \text{但し } H^*_{S^1} \text{は } H_{S^1} \text{の双対空間}$$

が定義される。一方$i\colon S^1 \to \partial\Sigma_2$は向きを逆にする同一視であるから、このとき境界付きリーマン面Σ_2に対する不変量

$$Z(\Sigma_2, i) \in H_{S^1}$$

が定義される。そして

$$Z(\Sigma) = \langle Z(\Sigma_1, i), Z(\Sigma_2, i) \rangle$$

を満たす。

以上共形場理論の特徴を述べたが、その形式は位相的場の理論と全く同じである。違いは、位相的場の理論では多様体の不変量がその位相構造のみで決まるのに対して、共形場理論では多様体の不変量がその共形構造（実 2 次元のものだけ考えているので複素構造）により決まるということである。

以下このノートでは、ＷＺＷモデルという共形場理論を構成して、その性質を調べる。2 章で経路積分を用いてＷＺＷモデルを構成する。このとき基本となる考え方は幾何学的量子化である。幾何学的量子化については牛腸氏の解説を参照されたい。この章ではループ群を幾何学的量子化して、それによって得られた無限次元ベクトル空間のベクトルとして境界付きリーマン面の不変量を構成する。その際、経路積分が用いられる。3 章ではループ群 LG の中心拡大の性質を調べる。4 章では、2 章で経路積分によって構成されたＷＺＷモデルを数学的に厳密に再構成するための手がかりを探す。具体的にはＷＺＷモデルのゲージ対称性を調べることが中心で、その結果、問題を無限次元の幾何から有限次元の幾何に reduce することが出来る。その際、ＷＺＷモデルが‘ 正則な理論 ’と‘ 反正則な理論 ’に分解されること、‘ 正則な理論 ’がリーマン面上のベクトル束のモジュライ空間と深い関係があること、などが明らかになる。

2 WZWモデルの経路積分による構成

以下レベルと呼ばれる正の整数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ と単連結リー群 $G = SU(2)$ を固定する。この章ではレベル k の $SU(2)$ WZWモデルと呼ばれる共形場理論を経路積分により構成する。主なテーマはループ群を幾何学的量子化することである。すなわち境界付きリーマン面の不変量を定式化しようとすると、自然にループ群を幾何学的量子化することが必要になること、そしてその量子化をどのように実行するかということを述べてゆく。

2.1 境界のないコンパクトリーマン面に対する不変量

Σを境界のないコンパクトリーマン面とする。もちろんΣ上の複素構造を考えている。この節ではΣの不変量 $Z_k(\Sigma) \in \mathbb{C}$ を定義する。

まずなめらかな写像 $f\colon \Sigma \to G$ に対して $e^{-S_{WZW}(f)} \in \mathbb{C}$ を次のように定義する。

$$e^{-S_{WZW}(f)} = e^{\frac{\sqrt{-1}k}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\partial f \wedge f^{-1}\bar{\partial} f) + \frac{\sqrt{-1}k}{12\pi}\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f})^3},$$

但し BはΣを境界に持つ向き付けられたコンパクト 3 次元多様体で、$\tilde{f}$ は fの拡張、すなわち

$$\tilde{f}\colon B \to G \quad かつ \quad \tilde{f}|\Sigma = f$$

を満たす。すると

$$\frac{-1}{24\pi^2}\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f})^3 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

は $B, \tilde{f}$の取り方によらずに well defined となる。この項は Wess-Zumino 項と呼ばれている。以上より $e^{-S_{WZW}(f)} \in \mathbb{C}$ も well defined となる。このときΣの不変量 $Z_k(\Sigma)$ を

$$Z_k(\Sigma) = \int_{f:\Sigma\to G} e^{-S_{WZW}(f)}\mathcal{D}f \in \mathbb{C}$$

により‘ 定義 ’する。

注意 1. 写像 $f\colon \Sigma \to G$ をΣ上の‘　場　’と呼ぶ。また写像全体の空間 $\{f\colon \Sigma \to G\}$ を場の全体のなす空間と呼ぶ。Σの不変量は汎関数

$$S_{WZW}\colon \{f\colon \Sigma \to G\} \to \mathbb{C}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$$

を e の肩にのせて場の全体の空間で積分したものである。

注意 2. 写像 $f\colon \Sigma \to G$ に対して、そのエネルギー $E(f)$ は

$$E(f) = -\sqrt{-1}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\partial f \wedge f^{-1}\bar{\partial} f)$$

であった。

注意 3. $Z_k(\Sigma)$ の定義式より、$Z_k(\Sigma)$ はΣの複素構造（共形構造）により定められると考えられる。したがってこの経路積分から出発して構成された理論が、1 章の意味での共形場理論となることが期待される。

$e^{-S_{WZW}(f)}$の簡単な性質を 1 つまとめておく。

補題 2.1. Σを境界のないコンパクトリーマン面、$f, g\colon \Sigma \to G$ とする。このとき

$$e^{-S_{WZW}(fg)} = e^{-S_{WZW}(f)}e^{-S_{WZW}(g)}e^{-\frac{\sqrt{-1}k}{2\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\bar{\partial} f \wedge \partial g g^{-1})}$$

が成立する。

証明. 単なる計算なので省略する。∎

2.2 境界付きリーマン面の不変量への拡張に向けて

この節では境界付きリーマン面の不変量を定義するためには、何をすればよいのかを考える。そのために Chern-Simons ゲージ理論の概念との対応関係を見ることにする。Chern-Simons ゲージ理論については牛腸氏の解説を参照されたい。

Chern-Simons ゲージ理論は、コンパクトで向き付けられた 3 次元多様体の不変量を与える位相的場の理論である。Mを境界のないコンパクトで向き付けられた 3 次元多様体とする。このとき M上の場は自明バンドル $E = M \times \mathbb{C}^2$上の $G = SU(2)$ 接続で、場全体のなす空間は E上の G 接続全体の空間 $\mathcal{A}_M$である。Mの位相不変量は

$$\text{Chern-Simons 汎関数:}\ \mathcal{A}_M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

を e の肩にのせたものを $\mathcal{A}_M$上で積分することにより得られる。

$$M = M_1 \cup_\Sigma M_2$$

と分解するとき、M_1は境界Σを持つ 3 次元多様体である。このとき M_1の位相不変量は $E|\Sigma$上の G 接続全体の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$上のある直線束の切断として実現される。

ＷＺＷモデルでは、$\mathcal{A}_M$に対応するものは写像の空間 $\{f\colon \Sigma \to G\}$ である。したがって、

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup_i \Sigma, \quad i\colon S^1 \to \partial\Sigma_1$$

とするとき、Σ_1の不変量は $\{\gamma\colon S^1 \to G\}$ 上の直線束の切断として実現される。すなわちΣ_1の不変量 $Z_k(\Sigma_1, i)$ はループ群 LG 上の直線束の切断として実現される。

$\mathcal{A}_\Sigma$は可縮なので、その上の直線束は位相的には自明となり、そのために記述が容易であった。一方ＷＺＷモデルにおいて LG 上のねじれた直線束が必要となるので、その記述に工夫を要する。実はこの記述方法と Wess-Zumino 項に深い関係があるのだが、その様子を次第に明らかにしてゆきたい。

2.3 直線束の記述

この節では一般の単連結な多様体上の直線束を記述する方法を述べる。Mを単連結な多様体とする。LをM上の直線束とする。L上に接続∇を固定し、その第1Chern型式をωとする。$x_0 \in M$を固定する。$p\colon [0,1] \to M$をx_0を始点とするM内の道とする。$u \in L_{x_0}$に対して$(p,u)_\omega \in L_{p(1)}$によって、$u \in L_{x_0}$を始点とする道$p$に沿って平行移動をしたときの終点を表す。このとき次が成立する。

補題 **2.3.**

$$p, p'\colon [0,1] \to M, \quad p(0) = p'(0) = x_0, \quad p(1) = p'(1), \quad u, u' \in \mathbb{C}$$

とする。このとき

$$(p,u)_\omega = (p',u')_\omega \Longleftrightarrow u = u' e^{2\pi\sqrt{-1}\int_A \omega},$$

但し$A \subset M$は2次元円板で$\partial A = p' * p^{-1}$を満たすものとする。

この補題を逆手にとって、直線束を次のように記述する。

Mを単連結多様体とし、基点$x_0 \in M$を固定する。ωをM上の閉2formで$[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$を満たすものとする。このとき

$$L = \{(p,u)_\omega | p\colon [0,1] \to M, \quad p(0) = x_0, \quad u \in \mathbb{C}\}/\sim,$$

と定義する。ここで

$$(p,u)_\omega \sim (p',u')_\omega \Longleftrightarrow p(1) = p'(1), \quad u = u' e^{2\pi\sqrt{-1}\int_A \omega},$$

但し$A \subset M$は2次元円板で$\partial A = p' * p^{-1}$を満たすものとする。このときLはM上の直線束で自然な接続を持つ。しかもその第1Chern型式はωとなる。このM上のωから構成される直線束Lを

$$L = \mathrm{line}(M, \omega)$$

と書く。

最後に L と $L^* = \mathrm{line}(M, -\omega)$ との自然な pairing を記述しておく。

$$(p,u)_\omega \in L_{p(1)}, \quad (p,v)_{-\omega} \in L^*_{p(1)}$$

に対して

$$\langle (p,u)_\omega, (p,v)_{-\omega} \rangle_{p(1)} = uv$$

と定義する。この定義が well defined であることは、容易に確かめられる。

2.4 境界に対応させられるベクトル空間

この節ではループ群 LG 上の直線束と境界 S^1に対応させられる無限次元ベクトル空間 H_{S^1}を定義する。そのために $G = SU(2)$ 上の閉 3formσを次のように定議する。$g \in G$ に対し

$$\sigma_{\mathrm{at}\, g} = \frac{-1}{24\pi^2} \operatorname{Tr}(g^{-1}dg)^3$$

このとき $[\sigma]$ は $H^3(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元であることが知られている。

次に LG 上の閉 2formω_{WZW}を定義する。

$$\phi\colon LG \times S^1 \to G$$

を evaluation map とするとき、

$$\omega_{WZW} = \int_{S^1} \phi^* \sigma$$

により定めると、定義よりω_{WZW}は LG 上の閉 2form であって、$[\omega_{WZW}]$ は $H^2(LG;\mathbb{Z})$ を生成する。さらにω_{WZW}は自然に $LG^{\mathbb{C}}$（但し
$G^{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$）に拡張されることもわかる。

$LG^{\mathbb{C}}$は単連結かつ $l\omega_{WZW}$（$l \in \mathbb{Z}$ を 1 つ固定する）は $LG^{\mathbb{C}}$上の閉 2form で、かつ $[l\omega_{WZW}] \in H^2(LG^{\mathbb{C}};\mathbb{Z})$ であるから 2.3 節の方法により $LG^{\mathbb{C}}$上の直線束 $\mathcal{L}^l_{WZW}$が構

成される。すなわち

$$\mathcal{L}^l_{WZW} = \mathrm{line}(LG^{\mathbb{C}}, l\omega_{WZW})$$

と定義する。さらに境界 S^1に対応させられるベクトル空間を $\mathcal{L}^k_{WZW}$ （$k \in \mathbb{Z}_{>0}$はレベル）の正則切断の空間、すなわち

$$H_{S^1} = H^0(LG^{\mathbb{C}}, \mathcal{L}^k_{WZW})$$

と定義する。もちろん H_{S^1}は無限次元である。H_{S^1}の構造は 4 章で論じられる。

2.5 境界付きリーマン面に対する不変量－目標

この節では境界付きリーマン面に対する不変量を定義するために必要な数学的事項を整理する。境界のないコンパクトリーマン面Σを

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup_i \Sigma_2$$

と分解する。但し $i\colon S^1 \to \partial\Sigma_1$を向きを保つ同一視とする。このとき

$$Z_k(\Sigma_1, i) \in H^*_{S^1}, \quad Z_k(\Sigma_2, i) \in H_{S^1}$$

を経路積分を用いて表したい。

そのために

$$f\colon \Sigma_1 \to G^{\mathbb{C}}, \quad f \circ i = \gamma \in LG^{\mathbb{C}}$$
$$g\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}, \quad g \circ i = \gamma \in LG^{\mathbb{C}}$$

に対して

$$e^{-S_{WZW}(f)} \in \mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma} = (\mathcal{L}^k_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma})^*$$
$$e^{-S_{WZW}(g)} \in \mathcal{L}^k_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma}$$

を

$$\langle e^{-S_{WZW}(f)}, e^{-S_{WZW}(g)}\rangle_\gamma = e^{-S_{WZW}(f\cup g)}$$

となるように定義したい。ここで$\langle\quad,\quad\rangle_\gamma$は$\mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma}$と$\mathcal{L}^{k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma}$の自然なpairing、$f\cup g$は自然な写像

$$f\cup g\colon \Sigma = \Sigma_1\cup\Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}$$

である。

もしこのような定義ができたなら$\gamma\in LG$に対して

$$\begin{aligned}
Z_k(\Sigma_1, i)(\gamma) &= \int_{f:\Sigma_1\to G, f\circ i=\gamma} e^{-S_{WZW}(f)}\mathcal{D}f \in \mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma}\\
Z_k(\Sigma_2, i)(\gamma) &= \int_{g:\Sigma_2\to G, g\circ i=\gamma} e^{-S_{WZW}(g)}\mathcal{D}g \in \mathcal{L}^{k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma}
\end{aligned}$$

となり、それぞれ$Z_k(\Sigma_1, i)$は$\mathcal{L}^{-k}_{WZW}|LG$、$Z_k(\Sigma_2, i)$は$\mathcal{L}^{k}_{WZW}|LG$の切断となる。さらに

$$\begin{aligned}
\langle Z_k(\Sigma_1, i), Z_k(\Sigma_2, i)\rangle &= \int_{LG}\langle Z_k(\Sigma_1, i)(\gamma), Z_k(\Sigma_2, i)(\gamma)\rangle\mathcal{D}\gamma\\
&= Z_k(\Sigma_1\cup\Sigma_2)
\end{aligned}$$

を満たす。

最後に$Z_k(\Sigma_1, i), Z_k(\Sigma_2, i)$が$LG^{\mathbb{C}}$上に自然に拡張されることを示せば、少なくとも経路積分のレベルでは、WZWモデルという共形場理論が構成されたことになる。

2.6 Polyakov-Wiegmann の公式

2 次元円板

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$$

と境界の同一視

$$i\colon \{|z| = 1\} \to D, \quad \text{自然な埋めこみ}$$

を固定する。この節では

$$a\colon D \to G^{\mathbb{C}}, \quad a(0) = e$$

（以後 $a\colon (D,0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$ と書く。）

に対し

$$e^{-S_{WZW}(a)} \in \mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma_a = a\circ i \in LG^{\mathbb{C}}}$$

を定義して、その性質を調べる。

$a\colon (D,0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$ に対して $LG^{\mathbb{C}}$内の道

$$P_a\colon [0,1] \to LG^{\mathbb{C}}$$

を次のように定義する。すなわち $r \in [0,1]$ を固定するとき

$$P_a(r)\colon \{|z| = 1\} \to G^{\mathbb{C}}$$

を $e^{\sqrt{-1}\theta} \in \{|z| = 1\}$ に対して

$$P_a(r)(e^{\sqrt{-1}\theta}) = a(re^{\sqrt{-1}\theta})$$

と定義する。このとき

$$P_a(0) = e \in LG^{\mathbb{C}}, \quad P_a(1) = \gamma_a = a \circ i \in LG^{\mathbb{C}}$$

であるから、$e^{-S_{WZW}(a)}$を

$$e^{-S_{WZW}(a)} = (P_a, e^{\frac{\sqrt{-1}k}{4\pi}\int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\partial a\wedge a^{-1}\bar{\partial}a)})_{-k\omega_{WZW}} \in \mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma_a}$$

と定義する。

$e^{-S_{WZW}(a)}$の変換則を調べておく。これは Polyakov-Wiegmann の公式と呼ばれている。

定理 **2.6.** (Polyakov-Wiegmann)

$$a, b\colon (D, 0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$$

とする。a は∂Dの近傍で恒等的に e への写像とする。

(1) さらに

$$\bar{a}\colon \Sigma \to G^{\mathbb{C}}$$

を次のように定義する。Σを境界のないコンパクトリーマン面とし、埋めこみ $D \subset \Sigma$ を固定する。$\bar{a}$は a を$\Sigma \setminus D$には e への恒等写像として拡張したものとする。このとき

$$e^{-S_{WZW}(\bar{a})} \in \mathbb{C}$$

はΣ、あるいは埋めこみ $D \subset \Sigma$の取り方によらずに *well defined* である。

(2) さらにこのとき

$$e^{-S_{WZW}(ab)} = e^{-S_{WZW}(\bar{a})}e^{-S_{WZW}(b)}e^{-\frac{\sqrt{-1}k}{2\pi}\int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\bar{\partial}a\wedge\partial b b^{-1})}$$

が成立する。ここで

$$e^{-S_{WZW}(ab)}, e^{-S_{WZW}(b)} \in \mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma_b = b\circ i\in LG^{\mathbb{C}}}$$

である。

2.7 境界付きリーマン面に対する不変量の定義

境界のないコンパクトリーマン面Σを

$$\Sigma = D \cup_i \Sigma_2$$

と分解する。ここで $D = \{|z| \leq 1\}$ を 2 次元円板、$i\colon \{|z| = 1\} \to D$を自然な埋めこみとする。

$f\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}$に対して、

$$e^{-S_{WZW}(f)} \in \mathcal{L}^k_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma_f = f\circ i \in LG^{\mathbb{C}}}$$

を次のように定義する。

$$b\colon (D, 0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$$

を

$$b \cup f\colon \Sigma = D \cup \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}$$

がなめらかになるように 1 つ固定する。このとき

$$e^{-S_{WZW}(b)} \in \mathcal{L}^{-k}_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma_f}, \quad e^{-S_{WZW}(b\cup f)} \in \mathbb{C}$$

が定まっているので

$$\langle e^{-S_{WZW}(b)}, e^{-S_{WZW}(f)} \rangle_{\gamma_f} = e^{-S_{WZW}(b\cup f)}$$

を満たすように定義する。これは補題 2.1 と定理 2.6 によって b の取り方によらずに well defined であることがわかる。

そこでΣ_2の不変量 $Z_k(\Sigma_2, i)$ を $\mathcal{L}^k_{WZW}$の切断として次のように定義する。すなわち $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$に対して、$f\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}$で $f \circ i = \gamma$となるものを固定し、

$$Z_k(\Sigma_2, i)(\gamma) = \int_{f\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}, f\circ i = \gamma} e^{-S_{WZW}(fg)} \mathcal{D}g \in \mathcal{L}^k_{WZW\,\mathrm{at}\,\gamma \in LG^{\mathbb{C}}}$$

とする。このように $Z_k(\Sigma_2, i)$ が $\mathcal{L}^k_{WZW}$ の切断として実現されたが、これが正則な切断となる根拠は私にはよくわかりません。とにかくこれが正則な切断であると信じて話をすすめてゆくことにする。以上でひとまずWZWモデルが経路積分を用いて、構成されたわけである。

このようなループ群の幾何学的量子化としてWZWモデルの基礎づけを行なう、ということはGawedzki[G] に始まる。彼は $\mathcal{L}^k_{WZW}, e^{-S_{WZW}(f)}$ などをDeligne cohomologyというきわめて抽象的な概念を用いて定式化した。彼の理論はBrylinski によって一般化されて、最近教科書として出版された [B]。このノートでは $\mathcal{L}^k_{WZW}, e^{-S_{WZW}(f)}$ などを幾何学的に直接構成することを試みた。その結果 $Z_k(\Sigma_2, i)$ のゲージ不変性を確立することができた。これは 4 章で論じられる。

3 ループ群の中心拡大

この章ではループ群の中心拡大を記述し、その性質を調べる。

3.1 リー群の中心拡大

この節では一般の単連結リー群の中心拡大を記述する。$\mathcal{G}$を単連結リー群とする。ω を左不変な $\mathcal{G}$上の閉 2form で、$[\omega] \in H^2(\mathcal{G}; \mathbb{Z})$ とする。このとき $\mathcal{G}$の $\mathbb{C}^\times$による中心拡大$\hat{\mathcal{G}}$、すなわち

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \hat{\mathcal{G}} \to \mathcal{G} \to 1 \quad \text{完全列}$$

を次のように定義する。まず$\hat{\mathcal{G}}$を集合として次のように定義する。考え方は直線束を記述したときとまったく同じである。

$$\hat{\mathcal{G}} = \{(p, u)_\omega | p\colon [0, 1] \to \mathcal{G}, \quad p(0) = e, \quad u \in \mathbb{C}^\times\}/\sim,$$

と定義する。ここで

$$(p, u)_\omega \sim (p', u')_\omega \Longleftrightarrow p(1) = p'(1), \quad u = u' e^{2\pi\sqrt{-1}\int_A \omega},$$

但し $A \subset \mathcal{G}$は2次元円板で$\partial A = p' * p^{-1}$を満たすものとする。次に$\hat{\mathcal{G}}$の群構造を以下のように定義する。$[(p,u)_\omega]$ によって $(p,u)_\omega$の定める同値類を表す。

$$[(p_1,u_1)_\omega] * [(p_2,u_2)_\omega] = [(p_1 * p_1(1)p_2, u_1u_2)_\omega]$$

この群構造が well defined であることは、ωが左不変であることから保証される。この $\mathcal{G}$のωを用いて定義された中心拡大$\hat{\mathcal{G}}$を

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathrm{gp}(\mathcal{G}, \omega)$$

と書く。

最後に dual な中心拡大との自然な pairing の性質を 1 つ述べておく。リー群$\mathcal{G}$と左不変 2formωを上と同様に取り、

$$\hat{\mathcal{G}}_\omega = \mathrm{gp}(\mathcal{G}, \omega)$$

と定義する。一方

$$\hat{\mathcal{G}}_{-\omega} = \mathrm{gp}(\mathcal{G}, -\omega)$$

とする。このとき 2.3 節と同様に

$$(p,u)_\omega \in \hat{\mathcal{G}}_\omega, \quad (p,v)_{-\omega} \in \hat{\mathcal{G}}_{-\omega}$$

に対して自然な pairing

$$\langle (p,u)_\omega, (p,v)_{-\omega} \rangle = uv$$

が定義される。この pairing の性質を 1 つまとめておく。自然な射影

$$\hat{\mathcal{G}}_\omega \to \mathcal{G}, \quad \hat{\mathcal{G}}_{-\omega} \to \mathcal{G}$$

をいずれもπと書く。

120

補題 **3.1.**

$$a_i \in \hat{\mathcal{G}}_\omega, \quad b_i \in \hat{\mathcal{G}}_{-\omega}, \quad \pi(a_i) = \pi(b_i) \quad (i = 1.2)$$

とする。このとき

$$\langle a_1 a_2, b_1 b_2 \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle \langle a_2, b_2 \rangle$$

が成立する。

3.2 ループ群上の左不変な閉 **2form**

3.1 節の方法でループ群 $LG^{\mathbb{C}}$ の中心拡大を得るためには、$LG^{\mathbb{C}}$ 上の左不変な 2form が必要であった。2.4 節で構成した $LG^{\mathbb{C}}$ 上の 2form ω_{WZW} は残念ながら左不変ではない。この節ではある左不変な 2form ω_{inv} を定義して、ω_{WZW} との関係を調べる。

G のリー環を $\mathfrak{g}$ とするとき、$LG^{\mathbb{C}}$ のリー環は

$$L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \{\xi \colon S^1 \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\}$$

である。$LG^{\mathbb{C}}$ の接バンドルの自明化

$$TLG^{\mathbb{C}} = LG^{\mathbb{C}} \times L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

を左不変ベクトル場によって与える。この自明化により、任意の $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$ に対して、同一視

$$T_\gamma LG^{\mathbb{C}} \cong L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

が与えられたことになる。

$LG^{\mathbb{C}}$ 上の左不変 2formω_{inv} を次のように定義する。すなわち $\xi, \eta \in L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\omega_{inv}(\xi, \eta) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}(\xi \frac{d\eta}{d\theta}) d\theta$$

と定義する。任意の $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$ に対して、$T_\gamma LG^{\mathbb{C}} \cong L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ と見なしているから、これは左不変 2form である。

次に $LG^{\mathbb{C}}$上の 1formαを次のように定義する。$\gamma \in LG^{\mathbb{C}}, \xi \in L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cong T_\gamma LG^{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\alpha_\gamma(\xi) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}(\gamma^{-1}\frac{d\gamma}{d\theta}\xi)d\theta$$

と定義する。このとき次が成立する。

命題 **3.2.**

$$\omega_{inv} = \omega_{WZW} + d\alpha$$

3.3 ループ群の中心拡大

$l \in \mathbb{Z}$ とするとき

$$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_l} = \mathrm{gp}(LG^{\mathbb{C}}, l\omega_{inv})$$

によりループ群の中心拡大を定義する。この節の目的は$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_{-k}}$ の積構造を具体的に記述することである。

2.6 節と同様に $a\colon (D,0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$ に対して

$$e^{-S_{inv}(a)} \in \widehat{LG^{\mathbb{C}}_{-k}}{}_{\mathrm{at}\ \gamma_a = a\circ i \in LG^{\mathbb{C}}}$$

を

$$e^{-S_{inv}(a)} = (P_a, e^{\frac{\sqrt{-1}k}{4\pi}\int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\partial a\wedge a^{-1}\bar\partial a)})_{-k\omega_{inv}}$$

と定義する。このとき次が成り立つ。

命題 **3.3.**

$$a, b\colon (D,0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$$

とする。このとき$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_{-k}}$の元として

$$\begin{aligned} &e^{-S_{inv}(ab)}e^{2\pi\sqrt{-1}k\int_{P_{ab}}\alpha} \\ &\qquad = e^{-S_{inv}(a)}e^{2\pi\sqrt{-1}k\int_{P_a}\alpha}e^{-S_{inv}(b)}e^{2\pi\sqrt{-1}k\int_{P_b}\alpha} \\ &\qquad\qquad \times e^{-\frac{\sqrt{-1}k}{2\pi}\int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\bar\partial a\wedge\partial b b^{-1})} \end{aligned}$$

が成立する。

4 ゲージ対称性

2 章では経路積分を用いてＷＺＷモデルを構成した。すなわち 2.7 節のように境界のないリーマン面Σを

$$\Sigma = D \cup_i \Sigma_2$$

と分解するとき、境界付きリーマン面の不変量を

$$Z_k(\Sigma_2, i) \in H_{S^1} = H^0(LG^{\mathbb{C}}, \mathcal{L}^k_{WZW})$$

として構成した。

この章のテーマは経路積分を用いて構成されたＷＺＷモデルを数学的に厳密に構成する手がかりを見出すことである。もし経路積分が数学的に正当化されたならば、ＷＺＷモデルも数学的に構成されるであろう。しかし経路積分は本当に正当化されるかどうかわからないし、もしされるとしてもずっと先のことであろう。

そこで我々は経路積分を正当化することはあきらめて、別の方法を考える。おおらかに経路積分の存在を認めて、$Z_k(\Sigma_2, i)$ の性質を調べるのである。具体的にはΣ_2上のゲージ群が H_{S^1}に作用し、その作用に関して $Z_k(\Sigma_2, i)$ が不変になることを示す。H_{S^1}は無限次元であるが、ゲージ群の作用に関して不変な部分空間は有限次元となり、我々は問題を有限次元のところまで帰着することができるようになるのである。

ゲージ群の作用についてもう少し詳しく述べると、ゲージ群は H_{S^1}に左右両方から作用する。この左右の作用によって、ＷＺＷモデルが‘ 正則な理論 ’と‘ 反正則な理論 ’に分解されることがわかる。さらに‘ 正則な理論 ’がリーマン面上のベクトル束のモジュライ空間と密接な関係を持っていることも明らかになってくる。この章ではこれらのことも、次第に説明してゆきたい。

4.1 ループ群の中心拡大の直線束への作用

$l \in \mathbb{Z}$ を固定する。この節ではループ群の中心拡大$\widehat{LG_l^{\mathbb{C}}}$ の直線束 $\mathcal{L}^l_{WZW}$への作用を定義する。命題 3.2

$$\omega_{inv} = \omega_{WZW} + d\alpha$$

を思い出そう。この $LG^{\mathbb{C}}$上の 3 つの 2form に応じて、それぞれ $LG^{\mathbb{C}}$ 上の直線束

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^l_{inv} &= \mathrm{line}(LG^{\mathbb{C}}, l\omega_{inv}),\\
\mathcal{L}^l_{WZW} &= \mathrm{line}(LG^{\mathbb{C}}, l\omega_{WZW}),\\
\mathcal{L}^l_{\alpha} &= \mathrm{line}(LG^{\mathbb{C}}, ld\alpha)
\end{aligned}$$

を定義しておく。

$\mathcal{L}^l_\alpha$は自然な自明化

$$\mathcal{L}^l_\alpha = LG^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$$

を持っている。すなわちこの自明化に関し $\mathcal{L}^l_\alpha$上の自然な接続 ∇^αは

$$\nabla^\alpha = d - 2\pi\sqrt{-1}l\alpha$$

と表される。2.3 節の方法で $(p,u)_{ld\alpha}$と記述された $\mathcal{L}^l_\alpha$ の点は上の自明化によって

$$(p(1), e^{2\pi\sqrt{-1}l\int_p \alpha})$$

と表される。以後 $\mathcal{L}^l_\alpha$の点は、この自明化に関して記述する。

命題 3.2 より自然な同型

$$\mathcal{L}^l_{WZW} \otimes \mathcal{L}^l_\alpha \cong \mathcal{L}^l_{inv}$$

がある。たとえばこの同型によって、

$$(p,u)_{l\omega_{WZW}} \otimes (p(1), e^{2\pi\sqrt{-1}l\int_p \alpha})$$

124

は

$$(p,u)_{l\omega_{inv}}$$

に写される。少々人為的に見えるかも知れないが、同型写像

$$\Psi\colon \mathcal{L}^l_{WZW} \to \mathcal{L}^l_{inv}$$

を

$$\Psi(x) = x \otimes (\pi(x), 1) \in \mathcal{L}^l_{WZW} \otimes \mathcal{L}^l_{\alpha} \cong \mathcal{L}^l_{inv}$$

と定義する。ここで$\pi\colon \mathcal{L}^l_{WZW} \to LG^{\mathbb{C}}$は自然な射影である。

$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_l}$は$\mathcal{L}^l_{inv}$の主束であるから、$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_l}$は$\mathcal{L}^l_{inv}$に自然に作用する。$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_l}$の$\mathcal{L}^l_{WZW}$への作用を$t \in \widehat{LG^{\mathbb{C}}_l}, x \in \mathcal{L}^l_{WZW}$に対して

$$tx = \Psi^{-1}(t\Psi(x)) \in \mathcal{L}^l_{WZW}$$

により定義する。

4.2 ゲージ群の作用の持上げ

この節では 2.7 節と同様に

$$\Sigma = D \cup_i \Sigma_2$$

という状況を考える。このときΣ_2上のゲージ群

$$\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}}) = \{ f\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}} \quad \text{正則} \}$$

は自然な埋めこみ

$$\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}}) \to LG^{\mathbb{C}}$$

によって左右から $LG^{\mathbb{C}}$に作用している。この節ではまずゲージ群の $LG^{\mathbb{C}}$への作用を $\mathcal{L}^k_{WZW}$への左作用に持ち上げることを考える。そのために埋めこみ

$$\hat{i}\colon \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}}) \to \widehat{LG^{\mathbb{C}}_k}$$

を $f \in \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ に対し、

$$\hat{i}(f) = \Psi(e^{-S_{WZW}(f)})$$

によって定義する。このとき次がわかる。

定理 **4.2.** $\hat{i}$は単射準同型写像である。

証明**.** 単射性は明らかなので、準同型であることを示す。
$f, g \in \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ とする。

$$a, b\colon (D, 0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$$

をそれぞれ $a \cup f, b \cup g$がΣ上なめらか（もちろん正則でなくてよい。）になるように取る。また自然な同型

$$\mathcal{L}^{-k}_{inv} \cong \mathcal{L}^{-k}_{WZW} \otimes \mathcal{L}^{-k}_{\alpha}$$

が

$$e^{-S_{inv}(a)} \mapsto e^{-S_{WZW}(a)} \otimes (a \circ i, e^{-2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_a} \alpha})$$

と書けることを注意しておく。このとき

$$\begin{aligned}
&\langle e^{-S_{inv}(ab)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_{ab}} \alpha}, \hat{i}(f)\hat{i}(g)\rangle \\
=&\langle e^{-S_{inv}(a)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_a} \alpha} e^{-S_{inv}(b)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_b} \alpha}, \hat{i}(f)\hat{i}(g)\rangle \\
&\qquad \times e^{-\frac{\sqrt{-1}k}{2\pi} \int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\bar{\partial}a \wedge \partial b b^{-1})} \\
=&\langle e^{-S_{inv}(a)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_a} \alpha}, \hat{i}(f)\rangle \langle e^{-S_{inv}(b)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_b} \alpha}, \hat{i}(g)\rangle \\
&\qquad \times e^{-\frac{\sqrt{-1}k}{2\pi} \int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\bar{\partial}a \wedge \partial b b^{-1})}
\end{aligned}$$

となる。上で命題 3.3 と補題 3.1 を用いた。ところで

$$\begin{aligned}
&\langle e^{-S_{inv}(a)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_a} \alpha}, \hat{i}(f)\rangle \\
=&\langle e^{-S_{WZW}(a)} \otimes (a \circ i, 1), e^{-S_{WZW}(f)} \otimes (f \circ i, 1)\rangle \\
=&\langle e^{-S_{WZW}(a)}, e^{-S_{WZW}(f)}\rangle \\
=&e^{-S_{WZW}(a \cup f)}
\end{aligned}$$

同様に

$$\langle e^{-S_{inv}(b)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_b} \alpha}, \hat{i}(g)\rangle = e^{-S_{WZW}(b \cup g)}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\langle e^{-S_{inv}(ab)} e^{2\pi\sqrt{-1}k \int_{P_{ab}} \alpha}, \hat{i}(f)\hat{i}(g)\rangle \\
=&e^{-S_{WZW}(a \cup f)} e^{-S_{WZW}(b \cup g)} e^{\frac{\sqrt{-1}k}{2\pi} \int_D \mathrm{Tr}(a^{-1}\bar{\partial}a \wedge \partial b b^{-1})} \\
=&e^{-S_{WZW}(a \cup f)(b \cup g)} \\
=&e^{-S_{WZW}(ab \cup fg)}
\end{aligned}$$

ここで fが正則なことと補題 2.1 とを用いた。一方

$$\langle e^{-S_{inv}(ab)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\int_{P_{ab}}\alpha}, \hat{i}(fg)\rangle = e^{-S_{WZW}(ab\cup fg)}$$

であったから

$$\langle e^{-S_{inv}(ab)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\int_{P_{ab}}\alpha}, \hat{i}(f)\hat{i}(g)\rangle = \langle e^{-S_{inv}(ab)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\int_{P_{ab}}\alpha}, \hat{i}(fg)\rangle$$

が結論され、

$$\hat{i}(f)\hat{i}(g) = \hat{i}(fg)$$

を得る。∎

4.3 ゲージ不変性

この節も引き続き 2.7 節と同様に

$$\Sigma = D \cup_i \Sigma_2$$

という状況を考える。このときΣ_2の不変量 $Z_k(\Sigma_2, i)$ は直線束 $\mathcal{L}^k_{WZW}$の切断として実現されていたことを思い出そう。この節では前節で構成したΣ_2上のゲージ群 $\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ の $\mathcal{L}^k_{WZW}$への左作用に関して $Z_k(\Sigma_2, i)$ が不変であることを示す。これを示すための基礎となる数学的な事実は次のことである。

定理 **4.3.**

$$f \in \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$$

$$g\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}} \quad \text{なめらかな写像}$$

とする。このとき

$$\hat{i}(f) e^{-S_{WZW}(g)} = e^{-S_{WZW}(fg)}$$

が成立する。

証明．定理 4.2 の証明と同様に

$$a, b\colon (D, 0) \to (G^{\mathbb{C}}, e)$$

をそれぞれ $a \cup f, b \cup g$ が Σ 上なめらかになるように取る。あとは

$$\langle e^{-S_{WZW}(ab)}, \hat{i}(f) e^{-S_{WZW}(g)} \rangle = \langle e^{-S_{WZW}(ab)}, e^{-S_{WZW}(fg)} \rangle$$

を示せばよいのであるが、これも定理 4.2 の証明と同様にできる。詳しくは [K] 参照。∎

‘系’**4.3.** （これは数学の命題ではない）
$Z_k(\Sigma_2, i)$ はゲージ群の左作用に関し不変である。

‘証明’:

$$f \in \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$$
$$g, h\colon \Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}} \quad \text{なめらかな写像}$$

とする。さらに

$$\gamma_g = g \circ i, \gamma_f = f \circ i \in LG^{\mathbb{C}}$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} Z_k(\Sigma_2, i)(\gamma_f \gamma_g) &= \int_{h:\Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}, h \circ i = e} e^{-S_{WZW}(fgh)} \mathcal{D}h \\ &= \int_{h:\Sigma_2 \to G^{\mathbb{C}}, h \circ i = e} \hat{i}(f) e^{-S_{WZW}(gh)} \mathcal{D}h \\ &= \hat{i}(f) \{ Z_k(\Sigma_2, i)(\gamma_g) \} \end{aligned}$$

となり、‘証明’が終わった。∎

以上ゲージ群$\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ の左作用を論じてきたが、右作用も同様に定義できる。$f \in \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ の右作用を $x \in \mathcal{L}^k_{WZW}$ に対して

$$x \mapsto \Psi^{-1}(\Psi(x)\Psi(e^{-S_{WZW}(f^*)})) \in \mathcal{L}^k_{WZW}$$

と定義する。このときこのゲージ群の右作用に関して $Z_k(\Sigma_2, i)$ は不変になることがわかる。

4.4 conformal block

今まで我々が得た結論をまとめておく。2.7 節のように境界のないリーマン面Σ を

$$\Sigma = D \cup_i \Sigma_2$$

と分解したとき、その不変量

$$Z_k(\Sigma_2, i) \in H_{S^1} = H^0(LG^{\mathbb{C}}, \mathcal{L}^k_{WZW})$$

がゲージ群$\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ の両側からの作用に関して不変であった。

H_{S^1}の構造を復習しておく。$\mathcal{L}^k_{WZW}$に両側から$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_k}$が作用していたから、$H_{S^1}$にも両側から$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_k}$が作用する。

$$P_k = \{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{k}{2}\}$$

とおく。これは$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_k}$の既約な lowest weight 表現全体である。表現 $j \in P_k$の表現空間を $\mathcal{H}_j$と書く。このとき次の事実が知られている。これは Peter-Weyl の定理のループ群 version である。

定理 **4.4.** [FGK] 両側$\widehat{LG^{\mathbb{C}}_k}$加群として

$$H_{S^1} \approx \sum_{j \in P_k} \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}^r_j$$

が成立する。

注意. $\approx$とは少なくとも lowest weight 加群の部分に関しては等しい、ということである。（この章はお話なのであまり細かいことは気にしないで下さい。）$\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j^r$とは$\mathcal{H}_j$が$\widehat{LG_k^{\mathbb{C}}}$の左作用を、$\mathcal{H}_j^r$が右作用を受け持つ、ということである。

ところで

$$CB_k(\Sigma_2, i; j) = \{v \in \mathcal{H}_j | v\text{は左}\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})\text{ 不変}\}$$
$$CB_k^r(\Sigma_2, i; j) = \{v \in \mathcal{H}_j^r | v\text{は右}\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})\text{ 不変}\}$$

と定義する。$Z_k(\Sigma_2, i) \in H_{S^1}$は両側$\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ 不変であったから、H_{S^1}の分解に応じて

$$Z_k(\Sigma_2, i) = \sum_{j \in P_k} a_j^{(\nu)} \otimes b_j^{(\nu)},$$

但し $a_j^{(\nu)} \in CB_k(\Sigma_2, i; j), b_j^{(\nu)} \in CB_k^r(\Sigma_2, i; j)$ 、と書かれる。実は $CB_k(\Sigma_2, i; j), CB_k^r(\Sigma_2, i; j)$ は conformal block の空間と呼ばれているものである。上の定義は [TUY] の conformal block の空間（の双対空間）の定義と本質的に同じである。そして $Z_k(\Sigma_2, i)$ が上のように分解されるということことが、WZWモデルが‘正則な理論’と‘反正則な理論’に分解されることを意味している。実は$CB_k(\Sigma_2, i; j)$, $CB_k^r(\Sigma_2, i; j)$ は有限次元なので $Z_k(\Sigma_2, i)$ を有限次元にまで制限することができたわけである。以上のようにゲージ不変性から conformal block という概念が自然に生じてくることが説明された。

4.5 パラボリックベクトル束のモジュライ空間との関係

この節では、前節で定義したconformal blockの空間 $CB_k(\Sigma_2, i; j)$ がパラボリックベクトル束のモジュライ空間上のある正則直線束の正則切断の空間として実現されるだろう、という予想の根拠を述べる。

ところで $\widehat{LG_k^{\mathbb{C}}}$ の表現 $\mathcal{H}_j$ は $LG^{\mathbb{C}}/B^+LG^{\mathbb{C}}$ 上のある正則直線束 $\mathcal{L}_{(k,j)}$ の正則切断の空間

$$H^0(LG^{\mathbb{C}}/B^+LG^{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{(k,j)})$$

として実現されることが知られている [PS]。但し $B \subset G^{\mathbb{C}}$ は $G^{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群とするとき

$$B^+LG^{\mathbb{C}} = \{f\colon D \to G^{\mathbb{C}} \text{正則}, f(0) \in B\}$$

と定義される。これはループ群の Borel 部分群と考えられる。

conformal blockの空間 $CB_k(\Sigma_2, i; j)$ は $H^0(LG^{\mathbb{C}}/B^+LG^{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{(k,j)})$ の $\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})$ 不変な部分空間、すなわち

$$\begin{aligned} CB_k(\Sigma_2, i; j) &= H^0(LG^{\mathbb{C}}/B^+LG^{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{(k,j)})^{\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})} \\ &\approx H^0(\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})\backslash LG^{\mathbb{C}}/B^+LG^{\mathbb{C}}, \mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})\backslash\mathcal{L}_{(k,j)}) \end{aligned}$$

であった。$\Sigma = D \cup \Sigma_2$ における D の原点を P とする。ところで

$$\mathrm{hol}(\Sigma_2, G^{\mathbb{C}})\backslash LG^{\mathbb{C}}/B^+LG^{\mathbb{C}}$$

は

$$(\Sigma\text{上の正則ベクトル束}, P\text{における fiber の flag})$$

という組の同型類である。これは Σ 上のパラボリックベクトル束の同型類である [MS]。以上より $CB_k(\Sigma_2, i; j)$ は安定パラボリックベクトル束のモジュライ空間上のある正則ベクトル束の正則切断の空間として実現されることが期待される。

4.6 おわりに

以上経路積分を用いてWZWモデルを構成し、そのゲージ対称性を調べることによって境界付きリーマン面の不変量 $Z_k(\Sigma_2, i)$ が conformal block の空間の元の組合わせとして表されることがわかった。次の問いは $Z_k(\Sigma_2, i)$ が conformal block 空間の元のどのような組合わせとして表されるか、ということである。これに関して少しだけお話として述べることにする。

Σ_2の複素構造と、境界の同一視 $i\colon S^1 \to \partial\Sigma_2$ を動かして、これらのモジュライ空間を $\mathcal{M}$ とする。すなわち $\mathcal{M}$ の点 (Σ_2, i) を1つ決めると、conformal block の空間 $CB_k(\Sigma_2, i; j)$ が決まるわけである。$\mathcal{M}$ 上の自明なベクトル束 $\mathcal{M} \times \mathcal{H}_j$の部分束

$$\mathcal{F}_j \subset \mathcal{M} \times \mathcal{H}_j$$

を $\mathcal{F}_j$の $(\Sigma_2, i) \in \mathcal{M}$ における fiber が $CB_k(\Sigma_2, i; j)$ となるように定義する。ところで $\mathcal{F}_j$に自然な（射影）平坦接続が定まることがわかる。さらに境界付きリーマン面の不変量 Z_kは自明束

$$\bigoplus_{j \in P_k} \mathcal{M} \times \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j^r$$

の切断と考えられるが、実は Z_kは $\mathcal{M} \times \mathcal{H}_j$と $\mathcal{M} \times \mathcal{H}_j^r$の（射影）平坦切断の組合わせとして表される。$Z_k$は $\mathcal{M}$ 上で1価であるはずなので、平坦切断の組合わせ方にも大きな制限がつけられる、という具合に Z_kが限定されてゆく。

以上の理由などからも $\mathcal{F}_j$上の自然な（射影）平坦接続の構成、およびそのモノドロミーの決定が共形場理論の重要なテーマとなる。実は $\mathcal{M}$ がある意味で flag 多様体と思える、というのが（WZWモデルに限らず）共形場理論の基本原理の1つで、このことから $\mathcal{F}_j$上に自然な接続が入るようである。これらのことに関しては土屋先生の解説を参照して下さい。

最後になりましたがこのような機会を与えた下さった深谷賢治先生、このノートを書くにあたって有益な助言をくれた牛腸徹氏に感謝の意を表したいと思います。

References

[B]. J.Brylinski, "Loop Spaces, Characteristic classes and Geometric Quantization," Birkháuser, 1993.

[FGK]. G.Felder, K.Gawedzki and A.Kupiainen, *Spectra of Wess-Zumino-Witten models with arbitrary simple group*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 127-158.

[G]. K.Gawedzki, *Topological actions in two-dimensional quantum field theory*, in "Nonperturbative Quantum Field Theories," ed. G't Hooft, A.Jaffe, G.Mack, P.K.Mitter, R.Stora NATO Series vol. 185, Plenum Press, 1988, pp. 101-142.

[K]. H.Konno, *Geometry of loop groups and Wess-Zumino-Witten models*, in preparation.

[MS]. V.Mehta and C.S.Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. **248** (1980), 205-239.

[PS]. A.Pressley and G.Segal, "Loop groups," Oxford Univ. Press, 1986.

[S]. G.Segal, *Two dimensional conformal field theories and modular functors*, in "IXth Proc. Tnternat. Cong. Math. Phys. Swansea 1988," Ada Hilger, 1989, pp. 22-37.

[TUY]. A.Tsuchiya, K.Ueno and Y.Yamada, *Conformal field theory on the universal family of stable curves with gauge symmetry*, Adv. Stud. Pure Math **19** (1989), 459.

[W]. E.Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 351-399.

[牛]. 牛腸徹, *connection* 付きの *hermitian line bundle* をめぐって, in this volume.

代数幾何学の立場から見た mirror symmetry

小林 正典 （東京工業大学・理学部）

代数幾何学の立場から見た mirror symmetry

小林 正典

東京工業大学理学部数学教室

Introduction

近年の素粒子物理学、特に超弦理論によると、素粒子はもはや点ではなく円周 S^1 であって、時間が経つにつれて移動することにより曲面を描く。その ambient space である宇宙ももはや 4 次元ではなく、26 次元あるのだという。そのうち 6 次元は非常に小さいコンパクト多様体で、Calabi-Yau threefold と呼ばれる 3 次元複素多様体になる。

一方、代数幾何学の方でも、極小モデルの一般論が 3 次元で解決し、いよいよ個々の多様体の幾何、モジュライの記述へと目が向けられていた。特に、Calabi-Yau threefold は重要な対象である。

その折りも折り、相異なる Calabi-Yau threefold の間に mirror symmetry という摩訶不思議な関係がありそうだという話が物理から舞い込んできた。経路積分を用いた方法で、代数幾何、それも分類理論に関わる場所に何らかの予言がなされるとは、寝耳に水であった。

本稿では、いまだ確立されていない mirror symmetry の現状について、主に代数幾何の観点から述べる。

本稿の内容であるが、第 1 章では主たる対象である Calabi-Yau 多様体について述べる。第 2 章では mirror symmetry の歴史を振り返る。第 3 章では SCA の表現論として、第 4 章では幾何的に mirror symmetry について概説する。第 5 章では Batyrev による toric mirror symmetry について述べる。

原稿を書く間暖かく励まし続けて下さった深谷賢治氏、大野浩司氏、松下大介氏に感謝します。

Notation

本稿を通じて、以下のように記号を定める。

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$：それぞれ正の整数の集合、整数環、有理数体、実数体、複素数体。

$\mathbf{T} = (\mathbf{C}^*)^d$：$d$ 次元代数的トーラス。

$\mathbf{P}^n$：n 次元複素射影空間。

$\mathbf{P}(a_0, \cdots, a_n)$： 重み $a_0, \cdots, a_n$の重射影空間。すなわち、$\mathbf{P}^n$ の 群 $\mathbf{Z}/a_0\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/a_n\mathbf{Z}$ の自然な対角作用による商。但し、$a_i \in \mathbf{N}$ であり、簡単のため $g.c.d.(a_0, \cdots a_n) = 1$ とする。

以下、Xを $\mathbf{C}$ 上の d 次元 normal variety とする。

$\mathcal{O}_X$：X の構造層。

Ω_X^i：X の正則 i 形式の成す層。

K_X：X の標準因子。

$h^{p,q} = h_X^{p,q} = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^q(M, \Omega_X^p)$：$X$の (p,q)-Hodge 数。

1. Calabi-Yau 多様体

代数幾何についての一般的なことに関しては、[Hartshorne77, GH78]、分類理論・極小モデルについては [KMM,Kawamata88,CKM88] が標準的なテキストである。この章では全て複素数体上定義されていると仮定する。

1-1. Calabi-Yau 多様体の定義

Definition. X を d 次元 normal compact analytic variety とする。X が Calabi-Yau 多様体であるとは、ここでは次の５つの条件を満たすときをいう。

(1) 非特異

(2) 射影的

(3) 単連結

(4) 標準束が trivial

(5) $h^0(M, \Omega_M^i) = 0 \ (0 < i < d)$

これは微分幾何学で言うところのspecial unitary manifold（ホロノミー群が$SU(n)$にreductできるRicci flat Kähler manifold）と同じである。従って、あえて違う名で呼ばなくてもいいようなものであるが、Calabi-Yau 多様体といった時には、人により場合により、やや広い意味で使うことがある。

以下、主に$d = 3$とする。この場合、XをCalabi-Yau threefoldという。

特異点に関して言えば、超弦理論の側からは、商特異点を許してもよい。代数幾何の側から言えば、特異点としてterminal singularityあるいはcanonical singularityを許しても困らない場合が多く、極小モデル理論からみればむしろ自然である。（定義については例えば[KMM]を参照）なお、3次元のterminal singularityは孤立特異点であり、解析的には$\mathbf{C}^4$の超曲面として書ける二重点、あるいはその有限巡回群による商、という形をしている。

射影的という条件は、$d = 3$、非特異単連結の仮定の元では、Kählerと同値である。超弦理論では是非とも必要な条件である。

単連結の条件は不正則数 $q = h^1(\mathcal{O}_X)$ が 0 と弱めることもある。同様に標準束の条件も、ある正の整数倍がtrivialでよいとすることもあるが、mirror symmetry の観点からは現時点では適当ではないと思われる。

1-2. Hodge diamond

Calabi-Yau threefold X の Hodge数 $h^{p,q}$ を並べると次の様になる：

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h^{1,2} & h^{2,2} & 0 \\ 0 & h^{1,1} & h^{2,1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

（この表を斜めにしたものをその形からHodge diamondと呼ぶ。）ここで、$h^{2,2} = h^{1,1}$、$h^{1,2} = h^{2,1}$である。$H^1(\mathcal{O}_X^*) \cong H^2(\mathbf{Z}_X)$ より前者はXのPicard数 ρ に等しく、$H^1(\Theta_X) \cong H^1(\Omega_X^2)$ より後者はXの複素構造の変形の次元に等しい。

Euler数$e = 2(h^{1,1} - h^{2,1})$の絶対値の 1/2 が世代数に等しく、観測によればそれは 3 であって欲しいので、当初は $e = \pm 6$ の Calabi-Yau threefoldを構成する努力がな

された。[AGKM, Yau-Tian85, Shoen88]

1-3. Calabi-Yau threefold の例

(1) Fano 多様体の中の非特異完全交叉

Fano 多様体とは、その標準因子が ample であるような代数多様体のことである。特に、（重）射影空間の中の完全交叉がよく出てくるが、小木曽による次の定理がある。

Theorem [Oguiso91]**.** *L を Calabi-Yau threefold X（ただし、単連結の仮定は $q=0$ でよい）の ample line bundle とする。$h^0(L) \geq 2$ のもとでは、重射影空間の中の一般の完全交叉となる X は次のとおり。*

(1) $\mathbf{P}^4$の中の非特異 5 次超曲面（これを $\mathbf{P}^4 \supset (5)$ と書くことにする）,

(2) $\mathbf{P}^5 \supset (2) \cap (4)$,

(3) $\mathbf{P}^5 \supset (3) \cap (3)$,

(4) $\mathbf{P}^6 \supset (2) \cap (2) \cap (3)$,

(5) $\mathbf{P}^7 \supset (2) \cap (2) \cap (2) \cap (2)$,

(6) $\mathbf{P}(1,1,1,1,2) \supset (6)$,

(7) $\mathbf{P}(1,1,1,1,4) \supset (8)$,

(8) $\mathbf{P}(1,1,1,2,5) \supset (10)$,

(9) $\mathbf{P}(1,1,1,1,1,3) \supset (2) \cap (6)$,

(10) $\mathbf{P}(1,1,1,1,1,2) \supset (3) \cap (4)$,

(11) $\mathbf{P}(1,1,1,1,2,2) \supset (4) \cap (4)$,

(12) $\mathbf{P}(1,1,1,2,2,3) \supset (4) \cap (6)$

(13) $\mathbf{P}(1,1,2,2,3,3) \supset (6) \cap (6)$

射影空間の直積の中の完全交叉（CICY）もよく使われる。超曲面となるものは

(1) $\mathbf{P}^4 \supset (5)$,

(2) $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^1 \supset (4,2)$,

(3) $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2 \supset (3,3)$,

(4) $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \supset (3,2,2)$,

(5) $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \supset (2,2,2,2)$

がある。CICY は全て、deformation と small resolution でつながる。[CGH90] ただし、small resolution とは、例外集合の余次元が 2 以上となる特異点解消をいう。

(2) Fano threefold の分岐 2 重被覆

Vを Fano threefold とし、その標準因子の member で特異点として高々node しか持たないもの Bをとる。B で分岐する Vの二重被覆を取り、特異点を解消して Calabi-Yau threefold X を得る。V として $\mathbf{P}^3$, B として様々な configulation を用いることにより、多くの Calabi-Yau threefold の例が得られている。[Hirzebruch85]

(3) Kummer Calabi-Yau threefold[Beauville83-2]

E を $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ を complex multiplication に持つ楕円曲線とする。$E \times E \times E$を $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ の自然な対角作用で割り、27 個の特異点を blow-up してできた多様体を X とする。X は rigid な（i.e. 変形の次元が 0）Calabi-Yau threefold である。

(4) Weierstrass モデル [Nakayama88]

Weierstrass モデルにおいてパラメータをうまくとると、elliptic fibration を持つ Calabi-Yau threefold が構成できる。例えば、$\mathbf{P}^2$上の elliptic Calabi-Yau threefold では、$\mathbf{P}(1,1,1,6,9)$ の 18 次超曲面で実現され、Euler 数は-540 になる。

(5) 楕円曲面のファイバー積 [Shoen88]

$\mathbf{P}^2$ 上に 9 点 $P_1, \cdots, P_9$ で transversal に交わる 2 つの 3 次曲線 C_1, C_2をとる。C_i の定義方程式を $F_i(X,Y,Z) = 0$ とする。$\mathbf{P}^2$ から $\mathbf{P}^1$ への有理写像 f を

$$f(X:Y:Z) = (F_1(X,Y,Z) : F_2(X,Y,Z))$$

で定めると、f は $P_1, \cdots, P_9$ 以外の点では well-defined である。$P_1, \cdots, P_9$ で $\mathbf{P}^2$ を blow-up してできた曲面を S とする。f の引き戻しは S から $\mathbf{P}^1$ への morphism になり、一般 fiber は楕円曲線になる。しかも、blow-up の例外曲線はこの elliptic fibration

の section になっている。S は section を持った相対的に極小な有理楕円曲面である。$f_i : S_i \to \mathbf{P}^1$ $(i = 1, 2)$ をそのような楕円曲面とし、$\bar{X}$ を $\mathbf{P}^1$ 上の fiber 積とする。特異点の条件を適当に仮定すると、$\bar{X}$の特異点解消として Calabi-Yau threefold X を得る。X の $\mathbf{P}^1$ 上の一般ファイバーは 2 つの楕円直線の直積として表される Abel 曲面である。このようにして得られた X で、$e(X) = 6$ となるものが得られている。

(6) $\mathbf{P}^1$上の射影空間束の中の完全交叉 [Kobayashi91]

Calabi-Yau threefold が曲面の fibration を持つ場合、base は$\mathbf{P}^1$になる。fiber は K3 曲面か Abel 曲面であるが、逆にこれらの曲面が Calabi-Yau threefold に含まれていた場合、自動的に fibration ができる。次数の小さい偏極 K3 曲面の fibration の場合は射影空間束を与えるベクトル束などが決定できる。

1-4. 代数幾何学における Calabi-Yau threefold の位置付け

代数幾何学、特に複素数体上の代数多様体の分類理論では、Calabi-Yau threefold はどういう意味で重要なのだろうか。

代数多様体を分類するに当たり、同型で分類したのではとりあえず細かすぎて手に負えない。そこで、それより弱い双有理同値でまず分類し、双有理同値類の中では例えば blowing-up などの標準的な操作でつなげることを考える。ここで、2 つの多様体が双有理同値であるとは、互いの稠密な Zariski 開集合の間に同型写像ができることであり、互いの有理関数体が同型ということと同値である。

normal algebraic variety X の重要な双有理不変量として、次元 d、小平次元 κ、不正則数 $q = h^1(\mathcal{O}_X)$ がある。

まず、次元で分ける。次に、もし X が何らかのうまい fibration を持てば、次元の低い多様体の組み合わせとして、帰納的に理解する事を目指す。

そこでまず、$K_X^{\otimes m}$ $(m \gg 0)$ で作った多重標準写像 $\Phi_{mK} : X \to \mathbf{P}^{h^0(mK)-1}$ が fibration をなすかどうか調べてみる。Φ_{mK} は必ずしも普通の意味での写像になるとは限らず、稠密開集合で定義される有理写像であるが、X を適当に blow up した多様体からはちゃんとした写像になる。しかも、その像は、m を十分大きくとれば一

定になる。

Φ_{mK} の像の次元が κ である。ただし、存在しない時は $\kappa = -\infty$ とみなす。従って、κ は $-\infty, 0, \cdots, d$ のいずれかの値をとる。

$0 \le \kappa \le d$ のときは X は飯高 fiber space と呼ばれる良い fibration の構造を持つ。その一般ファイバーは $\kappa = 0$ の非特異多様体である。

$\kappa = d$ のときは X は一般型と呼ばれる。つまり、「その他」として、とりあえず十把一絡げにくくられる。

$\kappa \le 0$ のところは Φ_{mK} では fibration ができないので、次に Albanese 写像を考える。X に対して Albanese 多様体と呼ばれる q次元 Abel 多様体 $\mathrm{Alb}X = \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X)^*/\mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z})$ と、Albanese 写像 $\alpha_X : X \to \mathrm{Alb}X$ が、（写像に関しては平行移動の差を除き）標準的に定まる。

次の定理が基本的である。

Theorem [Kawamata81]**.** X を $\kappa = 0$ の d 次元非特異射影的多様体とすると、次が成り立つ。

(1) α_X は代数的 *fiber* 空間になる。

(2) $q = d$ ならば、α_X は双有理写像になる。

ただし、代数的 fiber 空間とは、全射で fiber が連結コンパクト集合ということである。この定理の意味するところによると、$\kappa = 0, q > 0$ の時は Abel 多様体の上の fibration の構造を持つか、またはそれ自身が Abel 多様体と双有理同値である。

したがって、$\kappa = 0$ で残るのは、$q = 0$ の時である。$\kappa = 0$ は言い替えると、標準束のある自然数倍が trivial ということである。ここに対応するのは、曲面の場合では K3 曲面と Enriques 曲面（これは基本群が $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$）であり、非常に豊かな幾何学を持っている。

以上から、Calabi-Yau threefold は分類理論のいわば基本単位の重要なひとつである。曲線論の楕円曲線、曲面論の K3 曲面に対応するものであって、それ自身の幾何

が大変興味深い研究対象である。

微分幾何的に見ても、次の Bogomolov 分解の構成要素となる重要な多様体である。

Theorem [例えば Bogomolov74, Beauville83-1]**.** X を非特異コンパクト *Kähler* 多様体で $c_1^{\mathbf{R}}(X) = 0$ を満たすものとする。このとき、Xの有限*étale* 被覆 Yで、$Y \cong T \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$, となるものが存在する。ここで、$T$ は複素トーラス、V_i は第 1 章の意味での *Calabi-Yau* 多様体 *(special unitary manifold)* で、次元が 3 以上、X_j はシンプレクティック多様体である。

すなわち、Calabi-Yau threefold は、special unitary manifold のなかで次元が最小のものであり、たいへん興味深い研究対象である。

Calabi-Yau threefold のモジュライは局所的には非特異な複素多様体になることがわかっている。[Tian81, Todorov88, Ran92, Kawamata92] 大域的な構造についてはわかっているとは言い難いが、例えば、有理曲線の存在がわかると双有理な意味でのモジュライのネットワークができる [Reid87]。これについては Friedman、並河、小木曽による結果がある。

2. 歴史の概観

2-1. CFT と σ**-model**

素粒子物理学は常に発散の困難と戦ってきた。素粒子が点だと仮定すると積分が発散する。そこで、超弦理論においては、素粒子は S^1 であって、時間発展により曲面Σを描くとする。素粒子の状態は S^1 上の振動である。

宇宙が人間の感じるような 4 次元時空だとするとまたもや発散する。次元は特定の数、例えば 26 次元でなければならない。

では余分の次元は何か？

16 次元は lattice $E_8 \times E_8$ だという。残った 6 次元はコンパクト多様体になる。今、それを X と呼ぼう。人が知覚できないのは、それがとんでもなく小さく縮こまっているからだという。

ある種の対称性の仮定を置くと、X はCalabi-Yau threefoldと呼ばれる3次元複素多様体になる。

物事が起こる確率を経路積分の技法で計算しようとすると、写像 $\Sigma \to X$ を考えることになる。そして、観測に掛かるもの（＝現実）は、無限次元(Clifford-)Lie代数の表現論、即ち（超）共形場の理論（(S)CFT）で決まってしまう。X を(S)CFTの σ-model と呼ぶ。

2-2. mirror manifold

宇宙の形を決定する観点から言うと、Xをユニークに決定したいのだが、実はそうならない。すなわち、同一のCFTを与える2つのCalabi-Yau threefoldで、互いの $h^{1,1}$と $h^{2,1}$が入れ換わるものがある。これらのHodge数の図（1-2）は互いに鏡で折り返したようになることから、mirror pairとか（狭い意味で）mirror manifoldと呼ぶ。広義には、同じCFTを与えるMをmirror manifoldと呼ぶ。

実験. [CLS90] 4次元重射影空間 $\mathbf{P}(a_0,\cdots,a_4)$ の超曲面で、定義方程式がFermat型 $\sum_i x_i^{b_i}=0$ であるか、またはそれに近いものでその特異点解消がCalabi-Yau threefoldになるもののうち約6000個をとる。$h^{1,1}$と $h^{2,1}$をVafaの公式[Vafa89]を用いて計算機で計算し、グラフにプロットしたところ、$h^{1,1}$と $h^{2,1}$の入れ替えに関して非常に対称的になった。

このグラフは非常に印象的である。このことから、任意のCalabi-Yau threefoldに対して、そのmirror manifoldが存在するのではないかとの強い示唆を得る。一般にはrigidなCalabi-Yau threefoldのように、普通の意味では明らかにmirror manifoldが存在し得ないものがある。

mirrorの存在が具体的にわかっている多様体は少なく、ほとんどが次のような形をしたものである。

Gepner modelのmirror. [AL91-1] 重射影空間$\mathbf{P}(a_0,\cdots,a_n)$を考える。変数を Z_i で表す。$d=\sum a_i$, $b_i=d/a_i$とする。b_iは正の整数と仮定する。X を $F=\sum_i Z_i^{b_i}=0$ で定義される d 次Fermat型超曲面とする。このとき、K_X はtrivialであり、X は

SCFT、とくに Gepner model と呼ばれるもの（後述）からくる。群 $\mathbf{Z}/b_0\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}/b_n\mathbf{Z}$ は各変数 Z_i を 1 の b_i 乗根倍する作用で自然に $\mathbf{P}(a_0,\cdots,a_n)$ に作用し、F を保つことから X にも作用する。Xの d-form を保つ部分群を G とする。G の部分群 G_1に対し、G の中での dual group を G_2とする。（定義は [Roan91] を見よ）

このとき M/G_i $(i=1,2)$（またはその特異点解消）は mirror pair である。

$n=3$ のとき、Hodge 数に関しては純粋に数学的な証明が Roan により得られている。

Theorem [Roan91]**.** $n=3$とする。上で M/G_iの特異点解消で *Calabi-Yau threefold* になるもの M_iをとると、$e(M_1)=-e(M_2)$ が成立する。

証明は、toric method で次の公式を示すことによる。

Proposition （一般化された **Vafa** の公式）[Roan91]**.**

$q_i=a_i/d$ とおく。e_iを $\mathbf{C}^5$の標準的な基底とし、群 G_1の自然な対角作用をとると次の式が成り立つ。

$$e(M_1)=\frac{1}{|G_1|}\sum_{g,h\in G_1}\prod_{g(e_i)=h(e_i)=e_i}(1-\frac{1}{q_i})$$

ただし、積は範囲が空の時は 1 と思う。

現在ではさらに広く、次のことがわかっている。（第５章）

Theorem [Batyrev92-1,2]**.** $(n+1)$ 次元 *Toric Fano variety* の *toric Calabi-Yau* 超曲面の族に対して、$h^{1,1}$と $h^{n-1,1}$が入れ換わるという意味での *mirror pair* が構成できる。

これによると、ρ が 1 より大きい Calabi-Yau 多様体に対する mirror pair の示唆が得られる。

2-3. 有理曲線の本数の計算

代数幾何学に大きな衝撃を与えたのは次の結果である。

146

Yukawa coupling の計算. [COGP91] [Morrison91] [AM91] $\mathbf{P}^4$の同次座標を $X_0, \cdots, X_4$とする。$\psi \in \mathbf{P}^1$をパラメータとし、M_ψを $F_\psi = \sum_{i=0}^4 X_i^5 - 5\psi \prod_{i=0}^4 X_i = 0$ を定義方程式とする超曲面とする。

$PSL(5, \mathbf{C})$ の部分群で 1 の 5 乗根を対角成分とする対角行列からなる群を G とする。

M_ψを G で割って、特異点を解消して Calabi-Yau threefolds の族 W_ψを作ることができる（ψが特別な値では特異点が残る）。うまいパラメータ t を取り直すと倉西族 W_tができる。

mirror pair (M, Ω_t) と (W_t, Ω) から 1 つの Yukawa coupling が 2 通りに計算できる。W_tの方は Hodge 構造の変形（VHS）から定まる Picard-Fuchs 型微分方程式のモノドロミーを用いて、exact に計算できる。Mの方は、有理曲線による instanton 補正を用いた形で展開される。両式を比較することによって、展開の係数が決定できるが、この数が小さいほうから順に、$\mathbf{P}^4$の一般の 5 次超曲面に含まれる line の本数 (2875)、conic の本数 (609250)、twisted cubic の本数 (317206375)、$\cdots$ となることが物理的に導かれた。

実際、係数を見てみると、line の本数は古典的に知られているものと、conic の本数は Katz により計算されていたもの [Katz86] とそれぞれ一致した。twisted cubic については、Ellingsrud と Strømme が計算機を用いて計算し、紆余曲折の果てついに一致した [ES92]。なお 4 次以上の有理曲線はモジュライが複雑になり、本数の計算は現状ではお手あげである。別の多様体の複素構造の変形から、有理曲線の本数などという微妙な数が出てくるということは想像を越えたことであり、mirror symmetry の神秘性と信憑性を大いに高めた。

その後、同様の計算が行われており、[Katz92] に詳しい。重射影空間の非特異超曲面については [Morrison91][Font92][KT92]、射影空間の非特異完全交叉については [LT92]。また、3 次元に限らない範囲での mirror symmetry の予想もあり、有理曲線の本数については [Katz92] に計算されている。

今後は何らかの数学的な一般論が待たれる。

3. 表現論レベルでの mirror symmetry

この節では、$N = 2$ superconformal algebra の表現での mirror symmetry を主に [AL91] および [LVW89] に従って述べる。

3-1. SCA

Definition. c を定数とする。conformal constant が c の $N = 2$ superconformal algebra（SCA）とは、次の関係式を満たす L_n, J_n, $G_r^{\pm}$ $(n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Z} - \frac{1}{2})$ 及び、1（中心に入る）とで生成される $\mathbf{C}$-代数のことを言う。

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n}, 0 \\
[J_m, J_n] &= \frac{cm}{3}\delta_{m+n,0} \\
[L_m, J_n] &= -nJ_{m+n} \\
[L_n, G_r^{\pm}] &= (\frac{n}{2} - r)G_{n+r}^{\pm} \\
[J_n, G_r^{\pm}] &= \pm G_{n+r}^{\pm} \\
\{G_r^-, G_s^+\} &= 2L_{r+s} - (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r+s,0} \\
\{G_r^+, G_s^+\} &= \{G_r^-, G_s^-\} = 0
\end{aligned}
$$

但し、$\delta_{i,j}$は Kronecker の delta であり、$[A, B] = AB - BA, \{A, B\} = AB + BA$ とする。

Remark.

(1) 添え字 r については $r \in \mathbf{Z}$ とする流儀もある。定義中の流儀を Neveu-Schwarz sector（NS-sector）、後の流儀を Ramond-sector（R-sector）という。本質的な違いはない。以下、特に断らない限り NS-sector で考える。

(2) L_nの部分（と 1）はいわゆる Virasoro 代数であり、J_nの部分は$U(1)$-Kac-Moody 代数である。L_n、J_nを合わせたものは Lie 代数になる。全体としては、$G_r^{\pm}$を奇数次、他を偶数次の元として、一種の Clifford 代数と思える。

3-2. SCA の表現

L, Rを同一の N=2 SCA のコピーとする。L の元は $L_n, J_n, \cdots$, Rの元は$\bar{L}_n, \bar{J}_n, \cdots$ のように表わすことにする。$\mathcal{H}$を Hilbert 空間とする。

Definition. 2 次元 SCFT とは、$L \otimes_{\mathbf{C}} R$の $\mathcal{H}$へのユニタリ表現で、以下の条件を満たすものを言う。

(1) L の作用と Rの作用は、$G_r^{\pm}$どうしは反可換。その他は可換。

(2) †でユニタリ随伴を表わす時、$(L_n)^\dagger = L_{-n}$、$(J_n)^\dagger = J_{-n}$、$(G_r^{\pm})^\dagger = G_{-r}^{\mp}$がなりたつ。$R$についても同様。

しばしば、$\mathcal{H}$の元を field あるいはstate と呼ぶ。主に left のみについて記すが、right についても同様である。

Definiton. $\mathcal{H} \ni |\phi\rangle$ が

(1) left chiral state である $\Leftrightarrow G^{+}_{-\frac{1}{2}}|\phi\rangle = 0$

(2) left antichiral state である $\Leftrightarrow G^{-}_{-\frac{1}{2}}|\phi\rangle = 0.$

以後、$\mathcal{H} \ni |\phi\rangle$ を L_0, J_0 の固有ベクトルとし、固有値をそれぞれ h, q とする。left と right を区別したいときは、q_L, q_Rのように書く。h を mass、q を（$U(1)$-）charge と呼ぶことがある。SCA の交換関係から

$$\begin{array}{llllll} [L_0, L_n] & = -nL_n, & [L_0, J_n] & = -nJ_n, & [L_0, G_r^{\pm}] & = -rG_r^{\pm} \\ [J_0, L_n] & = 0, & [J_0, J_n] & = 0, & [J_0, G_r^{\pm}] & = \pm G_r^{\pm} \end{array}$$

となるので、$L_n|\phi\rangle$、$J_n|\phi\rangle$、$G_r^{\pm}|\phi\rangle$ は再び L_0, J_0 の固有空間に入る。charge は高々整数値しか変わらない。

Definition. $\mathcal{H} \ni |\phi\rangle$ が left primary state であるとは、次の時を言う。$n > 0$ ならば $L_n|\phi\rangle = J_n|\phi\rangle = G^{\pm}_{n-\frac{1}{2}}|\phi\rangle = 0$

right primary state についても同様に定義し、物理的理由から $q_L - q_R \in \mathbf{Z}$ となっていると仮定する。これは Lie 環の highest weight 表現の基底にあたる。

次の２つの補題の証明は [LVW89] にある。証明には $\{G_r^-, G_{-r}^+\}$ の非負定値性を用いる。

Lemma.

(1) $2h \geq |q|$

(2) $2h = q \Leftrightarrow |\phi\rangle$ は *primary chiral*

(3) $2h = -q \Leftrightarrow |\phi\rangle$ は *primary antichiral*

Lemma. $|\phi\rangle$ が *primary chiral* $\Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{c}{3}$

特に primary chiral state に対応する (h, q) は有限個しかない。

3-3. minimal series と Gepner model

level と呼ばれる $k \in \mathbf{N}$ に対し、minimal series あるいは minimal model と呼ばれる $c = 3k/(k+2)$ となる SCFT が構成されている。それをここでは $\mathcal{H}_k$ と書くことにする。$0 < c < 3$ であり、有限個の (anti)chiral primary field で生成される。

SCFT が対応するσ-model を持つ場合、次元を d とすると $d = c/3$ を満たすという物理の予想があり、minimal series ではうまくいかない。そこで、そのいくつかのテンソル積をとる。$\mathcal{H}_0$ は単位表現とする。

$k_i \in \mathbf{N}$ $(i = 0, \cdots, n)$, $c \in \mathbf{Q}$ は $c/3 = \sum_i k_i/(k_i+2) \in \mathbf{Z}$ を満たすとする。このとき、$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{k_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{k_n}$ は conformal weight c の SCFT になる。$\mathcal{H}$ の部分表現で、$\sum q_i \in \mathbf{Z}$ となる primary state のみで張られるものがあり、それを Gepner model という。

3-4. mirror operator

$\theta \in \mathbf{Z}$ に対し、SCA には次のような自己同型 u_θがある。これを spectral flow と呼ぶ。

$$\begin{cases} L_n \mapsto L_n + \theta J_n + \dfrac{c}{6}\delta_{n,0} \\ J_n \mapsto J_n + \dfrac{c}{3}\theta\delta_{n,0} \\ G_r^{\pm} \mapsto G_{r\pm\theta}^{\pm} \end{cases}$$

$\theta \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ のときは、NS-sector と R-sector が入れ替わった SCA に移る。

もう一つ、やや trivial な自己同型として、charge の反転がある。

$$\begin{cases} L_n \mapsto L_n \\ J_n \mapsto -J_n \\ G_r^{\pm} \mapsto G_r^{\mp} \end{cases}$$

u_1と charge の反転の合成を考える。すなわち、次のような SCA の自己同型 σ をとる。

$$\begin{cases} L_n \mapsto L_n - J_n + \dfrac{c}{6}\delta_{n,0} \\ J_n \mapsto -J_n + \dfrac{c}{3}\delta_{n,0} \\ G_r^{\pm} \mapsto G_{r\pm 1}^{\mp} \end{cases}$$

元の charge が q の chiral primary state は、新しい表現では charge が $d-q$ の chiral primary state になる。$m = \sigma \otimes 1$ を mirror operator という。

3-5. quantum Hodge cohomology

一般に SCFT $\mathcal{H}$ が与えられているとき、次のようにして cohomology 群を作ることができる。

$C^{p,q}$ を L に関して charge p の chiral state であり R に関して charge $(-q)$ の antichiral state である元の生成する $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする。符号は歴史的理由からこうなっている。

$\partial = G^{+}_{-\frac{1}{2}}, \bar{\partial} = \bar{G}^{+}_{-\frac{1}{2}}$ とすると、

$$\partial : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$$

$$\bar{\partial} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$$

$$\partial \circ \partial = \bar{\partial} \circ \bar{\partial} = \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0$$

が成り立つ。これによってコホモロジー群 $\mathrm{H}^{p,q}$ ができる。その次元を $h^{p,q}$ で表わす。mirror operator$m$ により $\mathrm{H}^{p,q}$ は $\mathrm{H}^{d-p,q}$ に移される（しかも、operator product により入れた環構造を保つ)。

これが表現論レベルでの（元々の）mirror symmetry である。

対応するσ-model が存在する場合、$h^{p,q}$はその Hodge 数と一致することが期待される（環構造は異なる）。

4. 幾何としての mirror symmetry

Candelas 達の結果については、原論文 [COGP91] の他に、Morrison による数学者むけの優れた解説があるのでそれを参照されたい。[Morrison91-1,2]

4-1. Gepner model に対応するσ-model

$k_i \in \mathbf{N}$ $(i = 0, \cdots, n)$, $c \in \mathbf{Q}$ は $n - 1 \geq c/3 = \sum_i \frac{k_i}{k_i+2} \in \mathbf{Z}$ を満たすとする。m を $n + m - 1 = c/3$ を満たす 0 以上の整数として、$k_{n+1} = \cdots = k_{n+m} = 0$ とおく。

$$F(X_0, \cdots, X_{n+m}) = \sum_{i=0}^{n+m} X_i^{k_i+2}$$

とおき、これを（A 型の）superpotential と呼ぶ。さて、$F = 0$ を 適当な重射影空間 $\mathbf{P}(a_0, \cdots, a_{n+m})$ の超曲面 X の定義方程式と思うと、$a_i(k_i + 2)$ は 斉次式の次数だから i によらない。これを l とおく。すると、上の条件から $l = \sum_{i=0}^{n+m} a_i$ がでるが、これは X の標準因子が trivial ということである。（ただし一般には商特異点が生じる）

X （あるいはそのよい特異点解消）が、level $(k_0, \cdots, k_n)$ の Gepner model に対応する（A 型の）σ-model である。多様体の次元 d はもちろん $c/3$ に等しい。

k_iの値によっては、別の superpotential をとることができる場合もある。また、superpotential を途中で分けて式をつくることもできるが、ここでは省略する。（例えば [AL91-1]）superpotential と方程式の関係については、経路積分を経由するので、数学的に定式化されたとはいえない。

(1) $d = 1$

(k_0, k_1, k_2) の組は、$(1, 1, 1), (2, 2, 0), (4, 1, 0)$ の 3 種類で、全て、非特異楕円曲線に対応する。特に、最初のものは $\mathbf{P}^2$ の Fermat 3 次曲線であり、$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ を

自己同型群に持つ楕円曲線である。これはself mirrorである。楕円曲線、あるいはより広く、Abel多様体の場合は、mirror pairはdualなAbel多様体に対応する。

(2) $d=2$

(k_i) の組は $(2,2,2,2)$（$\mathbf{P}^3$ のFermat 4次K3曲面）など14個があり、幾つかは特異点を持つ。K3曲面は、$\mathrm{H}^{1,1}$ と $\mathrm{H}^{d-1,1}$ が同じなので、Hodge数だけではmirrorはtrivialである。しかし、具体的に個々のmirror manifoldを求めることは別問題である。

K3曲面については、特異点に関するArnoldのstrange dualityとの関係が示唆されている。

なお、$d=3$ の時に上と同様の計算を行うと、1000個以上に亙る膨大なリストを得る。

4-2. mirror symmetry

X をCalabi-Yau threefoldとする。$L \in \mathrm{H}^{1,1}_{\mathbf{R}} = \mathrm{H}^{1,1} \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbf{R})$ を XのKähler類とし、$B \in i\mathrm{H}^{1,1}_{\mathbf{R}}$として、$\Omega = L + B \in \mathrm{H}^{1,1}$ とする。Ω を X の上の「複素化したKähler類」といい、そのモジュライを$\mathcal{W}$とおく。Ω における接空間は$\mathrm{H}^{1,1}$である。X の複素構造のモジュライ空間を $\mathcal{M}$ とする。そのXにおける接空間は$\mathrm{H}^{2,1}$である。

ではmirror symmetryと呼ばれている作業仮説を大胆に述べよう。

infinitesimal mirror symmetry. (X,Ω) に対して、ある $(\tilde{X},\tilde{\Omega})$ で

$$\mathrm{H}^{1,1}(X) = \mathrm{H}^{2,1}(\tilde{X})$$

$$\mathrm{H}^{2,1}(X) = \mathrm{H}^{1,1}(\tilde{X})$$

を満たすものが存在するであろう。

さらに、cup積についても、Yukawa couplingと言われるSCFTのいわゆる3点関数にあたるものがそれぞれ対応するはずである。それは$t_i \in \mathrm{H}^{2,1}$については、埋め込

みからくる標準的な正則3-形式 ω をとると、

$$\kappa_{t_1 t_2 t_3} = \int_X \omega \wedge \partial_{t_1}\partial_{t_2}\partial_{t_3}\omega$$

である。ただし、∂_{t_i} は t_i方向への Gauss-Manin connection による微分である（うまく正規化する必要がある）。$t_i \in \mathrm{H}^{1,1}$については、Xに含まれる有理曲線に関する無限和の形に展開される。

有名な Candelas 達の計算 [COGP]（Xが $\mathbf{P}^4$の 5 次超曲面の場合）では $h^{2,1}(\tilde{X}) = h^{1,1}(X) = 1$ であり、$\tilde{X}$に対して

$$\kappa_{ttt} = 5 + 2875e^{2\pi it} + 4876875e^{4\pi it} + \cdots$$

となった。

他方、$h^{1,1}(X)$ からは、n_kを十分一般の 5 次超曲面に含まれる次数 kの有理曲線の本数として（本当は X自身の言葉で言えることが望ましいのだが）、

$$\kappa_{ttt} = 5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k k^3 e^{2\pi ikt}}{1 - e^{2\pi ikt}}$$

となる [AM91]。この 2 つを比較すると、$n_1 = 2875, n_2 = 609250, n_3 = 317206375, n_4 = 242467530000, \cdots$ となり、全て整数ででて来るばかりか、最初の 3 つ（すなわち現段階で数学で計算できる全て）について、正しい本数を与えていた。（ちなみに最初の 5 は、Xの次数である。）

primitive form を用いた定式化の希望はある。なお、$\mathrm{H}^{2,1}$の Yukawa-coupling が VHS の理論から計算されることから、$\mathrm{H}^{0,0} \oplus \mathrm{H}^{1,1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}^{d,d}$ に mirror symmetry から VHS を入れる試みが成されている。[CO91, Morrison]

global mirror symmetry. (X, Ω) に対して、ある $(\tilde{X}, \tilde{\Omega})$ で

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{W}(\tilde{\Omega})$$

$$\mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{M}(\tilde{X})$$

を満たすものが存在する。ただし上の等号で、Xと$\tilde{\Omega}$, Ωと$\tilde{X}$が互いに対応しているとする。

すなわち、Calabi-Yau threefold に対して、その偏極+α の情報を加えたモジュライ空間に大域的な対称性があるかも知れないというものである。この+αの部分には今のところ幾何的な意味がつかない。また、flop との関係や、Kähler cone が jump する点 [Wilson92] での mirror など、考えるべき点は多い。

5. toric mirror symmetry

この章を通じて、以下の様に記号を定める。

$M \cong \mathbf{Z}^d$: rank $d \in \mathbf{N}$ の自由 Abel 群

$N = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$: Mの双対 Abel 群

$<,>: M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$: 自然な内積

5.1 toric 多様体

toric 多様体の一般論については、[KKMS73, Oda85, Markushevich87(Appendix)] を参照されたい。

X を代数多様体とする。

Definition. X が toric 多様体であるとは、$\mathbf{T}$ を開部分多様体として含み、$\mathbf{T}$ の自然な作用が X 全体に延びる時をいう。

特に X は有理多様体である。

toric 多様体の一般的な構成法は次のようなものである。

まず、$N_{\mathbf{R}}$ の中にいくつかの原点を頂点とする有理多面錐σ_iをとる。ただし、錐どうしの共通部分は、原点で無ければ、互いの面や辺などになっているとする。それぞれのσ_i に対して アフィン多様体 $X_i = \mathrm{Spec}\mathbf{C}[M \cap \hat{\sigma}_i]$ をとる。ここで、

$$\hat{\sigma} = \{x \in M_{\mathbf{R}} | \langle x, y\rangle \geq 0 \text{ for } \forall y \in \sigma\}$$

$\hat{\sigma}$ を σ の双対錐という。そして、X_i たちを、共通部分錐に対応する多様体をのりしろとして張り合わせる。各 X_i は 原点に対応する T を含んでいることに注意する。

X に現れる特異点は商特異点のみである。

5.2 polytope による記述

この節では、polytope による偏極コンパクト toric 多様体の記述について概説する。

以下では、Δを $M_{\mathbf{R}}$の中の convex integral polytope とする。即ち、Δは Mに属する有限個の頂点で張られる凸苞である。$\dim \delta = d$ と仮定する。

Definition.

$$S_\Delta = \oplus_{k=0}^{\infty}(X^m; m \in k\Delta)T^k$$

$\mathbf{P}_\Delta = \mathrm{Proj} S_\Delta$, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\Delta(1)}}$ は Δ に対応する ample invertible sheaf。

T は次数付けのパラメータである。上のように定義すると、$\mathbf{P}_\Delta$ はコンパクトな Toric 多様体になる。これは、通常の N を用いた Toric 多様体の記述に加えて、偏極多様体としての構造を指定したものと思える。polytope で記述された toric variety から通常の錐による記述を得るのは易しい。

Example.

(1) （射影空間）$\{e_1, \cdots, e_d\}$ を $M_{\mathbf{R}}$の標準基底とする。$d \in \mathbf{N}$ に対し、Δ を $\{0, de_1, \cdots, de_d\}$ で張られる polytope とすると、$(\mathbf{P}_\Delta, \mathcal{O}(1))$ は $(\mathbf{P}^d, \mathcal{O}(d))$ になる。

(2) （直積）Δ の直積をとると、S_Δ も 偏極多様体としての直積になる。

もちろん、一般には特異点が生じる。

5.3 Batyrev による toric mirror symmetry

Definition. K を $M_{\mathbf{R}}$ のコンパクト凸集合で、0 を内部に含むとする。このとき、

$$K^* = \{y \in N_{\mathbf{R}} | \langle x, y\rangle \geq -1 \text{ for } \forall x \in K\}$$

を K の双対集合という。$N_{\mathbf{R}}$ に対しても同様に定める。

Remark.

(1) K^* も 0 を内部に含むコンパクト凸集合になる。

(2) $(K^*)^* = K$

(3) 一つ変数を増やして（e_0 としよう）、Kが 超平面 $e_0 = 1$ の上にあるとする。原点と K で張られる錐を考えると、$*$ は錐に関する通常の双対（内積が非負）に対応している。

Definition. Δ は 0 を内部に含むとする。このとき、(Δ, M) が反射的（reflexive）とは、Δ^* が $N_{\mathbf{R}}$ 内の convex integral polytope になることをいう。

Definition. Laurent 多項式 $f(x) = \sum c_m X^m$（有限和）, $(m \in M)$ をとる。

$$\Delta(f) = \{m | c_m \neq 0\} \text{ の } M_{\mathbf{R}} \text{ での凸苞}$$

とし、f の Newton polygon という。

$Z_{f,\Delta} = \{x \in (\mathbf{C}^*)^d | f(x) = 0\}$ とし、$\mathbf{P}_\Delta$ 内での閉苞を $\bar{Z}_{f,\Delta}$ で表わす。

f が Δ-regular とは、Δ の任意の辺 δ に対し、$Z_{f,\delta}$ が $(\mathbf{C}^*)^{\dim \delta}$ の中で、空集合であるか、または特異点の余次元が 2 以上であるときをいう。

Δ に含まれる M の点の個数を l とする。$\bar{\mathcal{F}}(\Delta) \to \mathbf{C}^l$ を $\Delta(f) = \Delta$ となる $\bar{Z}_{f,\Delta}$ の family とし、$\mathcal{F}(\Delta)$ を f が Δ-regular となる subfamily とする。このとき、次が成立する。

Theorem [Batyrev92-2]**.** 次は同値。

(1) $\mathcal{F}(\Delta)$ は *canonical Gorenstein singularity* を持つ *Calabi-Yau variety* の *family*

(2) $\mathbf{P}_\Delta$ は *toric Gorenstein Fano variety* で、$\mathcal{O}(1) \cong \omega_{\mathbf{P}_\Delta}^{-1}$

(3) Δ の内点である M の点がちょうど 1 個存在し（m_0とする）、$(\Delta - m_0, M)$ は反射的。

しかもこのとき、$h^{1,1}(\mathbf{P}_\Delta) = h^{d-1,1}(\mathbf{P}_{\Delta^*})$, $h^{d-1,1}(\mathbf{P}_\Delta) = h^{1,1}(\mathbf{P}_{\Delta^*})$ が成り立つ。

特に、$\mathbf{P}^4$ の中の 5 次超曲面の族を考えると、dual polytope に対応する族は、Gepner model からくるものと一致する。しかも、polytope の間に頂点を頂点に、M の内点を M の内点に対応させる体積の比が 125 の写像を構成することができる。M の点

は単項式に対応するから、これは Calabi-Yau threefold の間の有限射に対応し、体積比から、ちょうど位数 125 の群で割ることになっている。この結果によると、次元が 3 に限らない場合や、$\rho > 1$ の場合の新しい mirror pair の示唆が得られる。

有理曲線の本数の計算についてはまだ進行中である。

References

[**AGKM**] P.S.Aspinwall, B.R.Green, K.H.Kirklin and P.J.Miron, *searching for three-generation Calabi-Yau Manifolds*, Harvard University Theoretical Physics, preprint.

[**AL91-1**] P.S.Aspinwall and C.A.Lütken, *geometry of mirror manifolds*, Nucl. Phys. **B353** (1991), 427–461.

[**AL91-2**] P.S.Aspinwall and C.A.Lütken, *quantum algebraic geometry of superstring compactifications*, Nucl. Phys. **B355** (1991), 482–510.

[**AM91**] P.S.Aspinwall and D.R.Morrison, *topological field theory and rational curves*, Duke preprint, DUK-M-91-12.

[**Batyrev92-1**] V.V.Batyrev, *dual polyhedra and the mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, preprint.

[**Batyrev92-2**] V.V.Batyrev, *variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori*, preprint.

[**Beauville83-1**] A.Beauville, *Varietés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755–782.

[**Beauville83-2**] A.Beauville, *Some remarks on Kähler manifolds with* $c_1 = 0$, in “Classification of Algebraic and Analytic Manifolds (K.Ueno, ed.),” Progress in Math. **39**, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983, pp. 1–26.

[**Bogomolov74**] F.Bogomolov, *on the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class*, Math. USSR Sbornik **22** (1974), 580–583.

[**Candelas88**] P.Candelas, *Yukawa couplings between (2,1)-forms*, Nucl. Phys. **B298** (1988), 458–492.

[**CDLS88**] P.Candelas, A.M.Dale, C.A.Lütken and R.Schimmrigk, *complete intersection Calabi-Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B298** (1988), 493–525.

[**CGH88**] P.Candelas, P.S.Green, Y.Hübsch, *Connected Calabi-Yau compactifications*, in “Strings ’88.”

[**CGH90**] P.Candelas, P.S.Green and T.Hübsch, *rolling among Calabi-Yau vacua*, Nucl. Phys. **B330** (1990), 49–102.

[**CLS90**] P.Candelas, M.Lynker and R.Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted* $\mathbb{P}_4$, Nucl. Phys. **B341** (1990), 383–402.

[**CO91**] P.Candelas and X.C.de la Ossa, *moduli space of Calabi-Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B355** (1991), 455–481.

[**COGP91**] P.Candelas, X.C.de la Ossa, P.S.Green and L.Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. **B359** (1991), 21–74.

[**CKM88**] H.Clemens,J.Kollár and S.Mori, “higher dimensional complex geometry,” Astérisque **166**, Soc.Math.de France, 1988.

[**DG88**] J.Distler and B.Greene, *some exact results on the superpotential from Calabi-Yau compactifications*, Nucl. Phys. **B309** (1988), 295–316.

[**EOTY89**] T.Eguchi,H.Ooguri,A.Taomina and S.-K.Yang, *superconformal algebras and string compactification on manifolds with $SU(n)$ holonomy*, Nucl.Phys.B **315** (1989), 193–221.

[**ES92**] G.Ellingsrud and S.A.Strømme, *The number of twisted cubic curves on the general quintic threefolds.* Univ. of Bergen preprint 93-7-2-1992

[**Font92**] A.Font, *Periods and duality symmetries in Calabi-Yau compactifications*. Universidad Central de Venezuela preprint UCVFC/DF-1-92

[**Friedman86**] R.Friedman, *simultaneous resolution of threefold double points*, Math.Ann. **275** (1986), 671–689.

[**Friedman89**] R.Friedman, *on threefolds with trivial canonical bundle*, in "Complex Geometry and Lie theory, Sundance," Proc.Sympos.Pure Math. **53**, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 103–134.

[**Fujita90**] T.Fujita, "Classification Theories of Polarized Varieties," London Math.Soc.Lect.Note Ser., University Press, Cambridge, 1990.

[**GW89**] B.van Geemen and J.Werner, *nodal quintics in* $\mathbf{P}^4$, in "Arithmetic of complex manifolds," Erlangen 1988, Lecture Note in Math. **1399**, Springer, Berlin-New york, 1989, pp. 48–59.

[**Gepner88**] D.Gepner, *space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, Nucl. Phys. **B296** (1988), 757–778.

[**Green91**] P.S.Green, *singular degenerations of Calabi-Yau manifolds and the Weil-Petersson metric*, Proc. Amer.Math.Soc. **111** (1991), 599–605.

[**GH88**] P.S.Green and T.Hübsch, *Calabi-Yau hypersurfaces in products of semi-ample surfaces*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), 231–246.

[**GP90**] B.R.Greene and M.R.Plesser, *duality in Calabi-Yau moduli space*, Nucl. Phys. **B338** (1990), 15–37.

[**GP91**] B.R.Greene and M.R.Plesser, *mirror manifolds: a brief review and progress report*, preprint.

[**GRY91**] B.R.Greene, S.-S.Roan and S.-T.Yau, *geometric singularities and spectra of Landau-Ginzburg models*, Comm.Math.Phys. **142** (1991), 245–259.

[**GVW89**] B.R.Greene, C.Vafa and N.P.Warner, *Calabi-Yau manifolds and renormalization group flows*, Nucl. Phys. **B324** (1989), 371–390.

[**Griffiths84**] P.Griffiths (ed.), "Topics in transcendental algebraic geometry," Annals of Mathematics Studies 106, Princeton University Press, 1984.

[**GH78**] P.Griffiths and J.Harris, "Principles of Algebraic Geometry," Wiley-Interscience, New york-Chichester-Brisbane-Tokyo, 1978.

[**Hartshorne77**] R.Hartshorne, "Algebraic Geometry," Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[**Hirzebruch85**] F.Hirzebruch, *some examples of threefolds with trivial canonical bundle*, Notes by J.Werner, Preprint series, Max-Planck-Inst. für Math., Bonn,. no.58

[**Hirzebruch86**] F.Hirzebruch, *threefolds with* $c_1 = 0$, Preprint series, Max-Planck-Inst. für Math., Bonn, in "26 mathematishe Arbeitstagung," 1986. no.26

[**Hübsch87**] T.Hübsch, *Calabi-Yau manifolds — motivations and constructions*, Commun. Math. Phys. **108** (1987), 291–318.

[**Kaku89**] ミチオ カク, "超弦理論," シュプリンガー–フェアラーク, 東京, 1989.

[**KLN91**] S.Kalara, J.L.Lopez and D.V.Nanopoulos, *calculable nonrenormalizable terms in string theory: a guide for the practitioner*, Nucl. Phys. **B353** (1991), 650–682.

[**Kawamata81**] Y.Kawamata, *Characterization of abelian varieties*, Compositio Math. **43** (1981), 253–276.

[**kawamata88**] 川又雄二郎, 高次元代数多様体の分類理論 —極小モデルの理論へ—, 数学 **40** (1988), 97–114.

[**Kawamata92**] Y.Kawamata, *unobstructed deformations – a remark on a paper of Z.Ran*, J.Alg.Geom. **1** (1992), 183–190.

[**KMM**] Y.Kawamata, K.Matsuda and K.Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, in "Algebraic geometry, Sendai 1985," Adv. Stud. in Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 283–360.

[**Katz86**] S.Katz, *on the finiteness of rational curves on quintic threefolds*, Comp.Math. **60** (1986), 151–162.

[**Katz92**] S.Katz, *rational curves on Calabi-Yau manifolds: verifying predictions of mirror symmetry*, Oklahoma state Univ. preprint, OSU-M-92-3.

[**Kobayashi91**] 小林正典, *K3* 曲面の *pencil* を持つ *Calabi-Yau threefold*, in "代数幾何学シンポジューム記録, 城崎," 1991, pp. 74–81.

[**KPY89**] J.K.Kim, C.J.Park and Y.Yoon, *Calabi-Yau manifolds from complete intersections in products of weighted projective spaces*, Phys. Lett. **B224** (1989), 108–114.

[**KKMS73**] G.Kempf, F.Knudsen, D.Mumford and B.Saint-Donat, "Totoidal Embeddings I," Lect. Note in Math. **339**, Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg,New york, 1973.

[**KT92**] A.Klemm and S.Theisen, *considerations of one-modulus Calabi-Yau compactifications: Picard-Fuchs equations, Kähler potentials and mirror maps*, Technische Univ. München preprint, TUM-TH-143-92.

[**LVW89**] W.Lerche, C.Vafa and N.P.Warner, *chiral rings in $N = 2$ superconformal theories*, Nucl. Phys. **B324** (1989), 427–474.

[**LT92**] A.Libgober and J.Teitelbaum, *lines on Calabi Yau complete intersections, mirror symmetry, and Picard Fuchs equations*, preprint.

[**Markushevich87**] D.G.Markushevich, *resolution of singularities (toric method)*, Appendix to : Description of a class of superstring compactifications related to semi-simple Lie algebras, by D.G.Markushevich,M.A.Olshanetsky and A.M.Perelomov, Comm.Math.Phys. **111** (1987), 247–274.

[**Morrison91-1**] D.R.Morrison, *mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians*, Duke preprint, DUK-M-91-01.

[**Morrison91-2**] D.R.Morrison, *Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces*, Duke preprint, DUK-M-91-14 (also in: Essays on Mirror Manifolds).

[**Nakayama88**] N.Nakayama, *on Weierstrass models*, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Masayoshi Nagata," Kinokuniya, Tokyo, 1988, pp. 405–431.

[**Oda85**] 小田忠雄, "凸体と代数幾何学," 紀伊國屋数学叢書 **24**, 紀伊國屋, 東京, 1985.

[**Oguiso91**] K.Oguiso, *On Polarized Calabi-Yau 3-folds*, J.Fac.Sci.Tokyo Sect.IA, Math. **38** (1991), 395–429.

[**Ran92**] Z.Ran, *lifting of cohomology and unobstructedness of certain holomorphic maps*, Bull.Amer.Math.Soc.(N.S.) **26** (1992), 113–117.

[**Reid87**] M.Reid, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible*, Math. Ann. **278** (1987), 329–334.

[**Roan87**] S.-S.Roan, *On Ricci flat 3-fold*, Acta Math.Sinica (N.S.) **3** (1987), 256–288.

[**Roan89**] S.-S.Roan, *on the generalization of Kummer surfaces*, J.Diff.Geom. **30** (1989), 523–537.

[**Roan90**] S.-S.Roan, *On Calabi-Yau orbifolds in weighted projective spaces*, Internat.J.Math. **1** (1990), 211–232.

[**Roan91**] S.-S.Roan, *The mirror of Calabi-Yau orbifold*, Internat.J.Math. **2** (1991), 439–455.

[**Schimmrigk87**] R.Schimmrigk, *a new construction of a three-generation Calabi-Yau manifold*, Phys. Lett. **B193** (1987), 175–180.

[**Schoen88**] C.Schoen, *on fiber products of rational elliptic surfaces with section*, Math.Z. **197** (1988), 177–199.

[**SW85**] A.Strominger and E.Witten, *new manifolds for superstring compactification*, Comm. Math. Phys. **101** (1985), 341–361.

[**Tian81**] G.Tian, *smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric*, in "Mathematical Aspects of String Theory (S.-T.Yau ed.), World Sci., Singapore," 1981, pp. 629–646.

[**Todorov88**] A.N.Todorov, *the Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds*, Preprint IHES, Nov.1988.

[**Ueno75**] K.Ueno, "Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces," Lect.Notes Math. **439**, Springer, Berlin,Heidelberg,New York, 1975.

[**Vafa89**] C.Vafa, *string vacua and orbifoldized LG model*, Modern Phys.Lett.A **4** (1989), 1169–1185.

[**VW89**] C.Vafa and N.Warner, *catastrophes and the classification of conformal theories*, Phys.Lett.B **218** (1989), 51–58.

[**Wilson89**] P.M.H.Wilson, *Calabi-Yau manifolds with large Picard number*, Invent. Math. **98** (1989), 139–155.

[**Wilson92**] P.M.H.Wilson, *the Kähler cone on Calabi-Yau threefolds*, Invent.Math. **107** (1992), 561–583.

[**Witten85**] E.Witten, *symmetry breaking patterns in superstring models*, Nucl. Phys. **B258** (1985), 75–100.
[**Witten91**] E.Witten, *mirror manifolds and topological field theory*, IAS preprint (also in: Essays on Mirror manifolds).
[**Yau85**] S.-T.Yau, *compact three dimensional Kähler manifolds with zero Ricci curvature*, with an appendex by S.-T.Yau and G.Tian, in "Symposium on anomalies, geometry, topology," Chicago, World Sci., Singapore, 1985, pp. 395–406.
[**Yau92**] S.-T.Yau,ed., "Essays on Mirror Manifolds," International Press, Hong Kong, 1992.