担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

重積分の計算 (1) 略解

Version：1.2

問題 1. 答えのみ記す．詳しい解答は例題を参照しながら各自で作成すること．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{a^2}{4}} dy \int_{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4y})}^{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4y})} f(x,y)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{b} dy \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)\,dx$

問題 2. 答えのみ記す．詳しい解答は例題を参照しながら各自で作成すること．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{b}{a+b}} dy \int_0^{a} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{b}{a+b}}^{1} dy \int_0^{b\left(\frac{1}{y}-1\right)} f(x,y)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

宿題 10-1　求めるヤコビアンは, 各小問ごとに

(1)
$$\begin{vmatrix} e^x & e^y \\ -e^{-x} & -e^{-y} \end{vmatrix} = -(e^{x-y} - e^{-x+y}).$$

(2) e^{2x}.

(3) 変数 (u,v,w) を変数 (x,y,z) で表した変数変換についてのヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

以下は、基本的に**連鎖律**を使わないと解けない．

宿題 10-2

(1) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおく．$r_x = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r}\cdot 2x = \dfrac{x}{r}$ に注意する．$f_x = \dfrac{1}{r}r_x = \dfrac{x}{r^2}$,
$f_{xx} = \dfrac{1}{r^2} + x\dfrac{\partial}{\partial x}r^{-2} = \dfrac{1}{r^2} - 2x\dfrac{1}{r^3}r_x = \dfrac{1}{r^2} - 2\dfrac{x^2}{r^4}$. f_{yy} についても同様だから, $f_{yy} = \dfrac{1}{r^2} - 2\dfrac{y^2}{r^4}$.

$$\Delta f = 2\frac{1}{r^2} - 2\frac{x^2+y^2}{r^4} = 2\frac{1}{r^2} - 2\frac{r^2}{r^4} = 0.$$

(2) まず 1 変数関数 $\tan^{-1}\alpha$ を α で微分すると

$$(\tan^{-1}\alpha)' = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

これを踏まえると次が分かる:

$$f_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+y^2/x^2}\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}, f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

同様に

$$f_y = \frac{x}{x^2+y^2}, f_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

を得る．従って $\Delta f = 0$.

(3) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく．$f_x = -\frac{r_x}{r^2} = -\frac{x}{r^3}$．$f_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$．$f$ は x, y, z に関して対称なので f_{yy}, f_{zz} も直ちに分かり，

$$\Delta f = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0.$$

宿題 10-3

(1) 2 つの恒等式の仮定を使って次の 2 式を得る:

$$x_{ss} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = y_{ts},$$

$$x_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial y}{\partial s}\right) = -y_{st}.$$

ここで, y_{st} と y_{ts} は一般には等しくないが, 連続性を仮定すれば, 等しくなることに注意する．いま, C^2-級の仮定があるので, $y_{st} = y_{ts}$ となる．(cf プリント 105 の定理 1 とその参考部, 及びペロンの反例．2 変数関数の極大極小のところで述べたことを忘れてしまったひとはいるかな？) よって,

$$\Delta x = y_{ts} - y_{ts} = 0.$$

同様に $\Delta y = 0$ も示せる．

(2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f_{xx}\left(x_s^2 + x_t^2\right) + f_{yy}(y_s^2 + y_t^2) + 2f_{xy}\left(x_s y_s + x_t y_t\right) + f_x\underline{(x_{ss} + x_{tt})} + f_y\underline{(y_{ss} + y_{tt})}$$

となるが, (1) より下線部は, 恒等的に 0 関数となる．また, 設問に与えられた 2 つの恒等式により $x_s y_s + x_t y_t = 0$ も分かっているので,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f_{xx}\left(x_s^2 + x_t^2\right) + f_{yy}(y_s^2 + y_t^2)$$

となる．再び, 設問に与えられた 2 つの項等式を使って

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f_{xx}\left(x_s^2 + x_t^2\right) + f_{yy}(x_t^2 + x_s^2) = (f_{xx} + f_{yy})(x_s^2 + x_t^2)$$

を得て, 証明を終える．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 10-4　解答に移るまえに少し注意を述べる: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ は, 原点 O と点 $P = (x, y)$ との距離 r と半直線 OP と x-軸のなす角度 θ による極座標表示.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

解答を始める: $x_r = \cos\theta, x_\theta = -r\sin\theta, y_r = \sin\theta, y_\theta = r\cos\theta$ だから連鎖律より

$$(z_r, z_\theta) = (f_x, f_y)\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = (f_x, f_y)\begin{pmatrix} \cos\theta & (-r\sin\theta) \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

ここで, f_{xy} と f_{yx} は一般には等しくないが, 連続性を仮定すれば, 等しくなることに注意する. いま, C^2-級の仮定があるので, $f_{xy} = f_{yx}$ となる.

さて, もう一度連鎖律をつかって $z_{rr}, z_{\theta\theta}$ を求める.

$$\begin{aligned} z_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r}z_r = \frac{\partial}{\partial r}f_x\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}f_y\sin\theta \\ &= (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r)\cos\theta + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r)\sin\theta \\ &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\sin^2\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}z_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}f_x(-r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}f_y(r\cos\theta) \\ &= (f_x)_\theta(-r\sin\theta) + f_x(-r\sin\theta)_\theta + (f_y)_\theta(r\cos\theta) + f_y(r\cos\theta)_\theta \\ &= (f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta)(-r\sin\theta) + f_x(-r\cos\theta) + (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)(r\cos\theta) + f_y(-r\sin\theta) \\ &= r^2(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta) - r(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta). \end{aligned}$$

これらの計算結果により,

$$\begin{aligned} z_{rr} + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} &= f_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{yy}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &= f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r}z_r. \end{aligned}$$

従って

$$\Delta f = z_{rr} + z_r/r + z_{\theta\theta}/r^2.$$

問題 3. 各 i について次が成立する:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = u_i f'(\underline{u}\cdot\underline{x} - ct) + u_i g'(\underline{u}\cdot\underline{x} + ct).$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = u_i^2 f''(\underline{u}\cdot\underline{x} - ct) + u_i^2 g''(\underline{u}\cdot\underline{x} + ct).$$

従って $\underline{u}$ が単位ベクトルである仮定を使って, 次を得る:

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = f''(\underline{u}\cdot\underline{x} - ct) + g''(\underline{u}\cdot\underline{x} + ct). \tag{1}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

他方,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -cf'(\underline{u}\cdot\underline{x} - ct) + cg'(\underline{u}\cdot\underline{x} + ct).$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(\underline{u}\cdot\underline{x} - ct) + c^2 g''(\underline{u}\cdot\underline{x} + ct). \tag{2}$$

従って式 (1), (2) により, 結論の方程式が得られる.