担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

重積分の計算 (1)

Version：2.1

★ 重積分の順序変更を学習する.

今後の予定

- 1/19：重積分の計算 (2)
- 1/26：期末試験

演習の目標

重積分の計算に習熟しましょう. 重積分の計算では次の 2 つの手法が大事です：

(1) 積分の順序変更 (今回やる)　　(2) 積分の変数変換 (次回やる)

積分の順序変更

積分の順序変更とは累次積分の積分の順序を入れ替える操作である. まずは例題 1 で最も簡単な場合を扱ってみよう.

例題 1. 次の積分の順序を変更せよ. 但し a は正の定数とし, f は積分可能であるとする.

(1) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)\,dr$

(ヒント：積分領域を図示しながら考えよ.)

【解答】

(1) 積分領域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4,\ x\le y\le 2\sqrt{x}\}$ は

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le y\le 4,\ \frac{y^2}{4}\le x\le y\right\}$$

に等しい. 従って,

$$\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\,dx.$$

(2) 積分領域 $\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le a\cos\theta\right\}$ は

$$\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\arccos\frac{r}{a}\right\}$$

に等しい. 従って,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)\,dr = \int_0^a dr \int_0^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\,d\theta.$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. 次の積分の順序を変更せよ．但し a, b は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{ax-x^2} f(x,y)\,dy$　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$

次の例題 2 ではもう少し複雑なケースを扱ってみよう．

例題 2. 次の積分の順序を変更せよ．但し a は正の定数とする．

$$\int_0^{2a} dx \int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} f(x,y)\,dy$$

【解答】 積分領域 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 2a,\ \dfrac{x^2}{4a}\le y\le 3a-x\right\}$ は

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le a,\ 0\le x\le 2\sqrt{ay}\right\}$$

と

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le y\le 3a,\ 0\le x\le 3a-y\right\}$$

を合わせたものに等しい．従って，

$$\int_0^{2a} dx \int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_0^{2\sqrt{ay}} f(x,y)\,dx + \int_a^{3a} dy \int_0^{3a-y} f(x,y)\,dx.$$

問題 2. 次の積分の順序を変更せよ．但し a, b は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{x+b}} f(x,y)\,dy$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

今週の宿題

宿題を解くにあたっての用語等を下記のようにまとめておく．

(1) $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ を**縦線集合**という．$a\le b, \varphi_1\le\varphi_2$.

(2) $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \psi_1(c)\le x\le\psi_2(d), c\le y\le d\}$ を**横線集合**という．$c\le d, \psi_1\le\psi_2$.

(3) φ_i, f の連続性や f の可積分性を仮定するとき，次が成立:

$$\int\int_T f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

(4) ψ_j, f の連続性や f の可積分性を仮定するとき，次が成立:

$$\int\int_Y f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 11-1. 次の累次積分の順序を交換せよ．また, 積分領域を縦線及び横線集合 (の和集合) で表し, 積分領域のグラフの概形を書くこと．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dy \int_{y-1}^{y+1} f(x,y)dx$

次の宿題 11-2 は (そのままでは計算しづらいが) 順序変更を用いると計算しやすくなるような積分の例である．

宿題 11-2.

次の積分を計算せよ．但し a は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} r\,d\theta$　(2) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{2} y\,e^{xy}\,dy$

お話

前回のお話の続きの問題．

問題 3. 1 次元波動方程式 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ $(c>0)$ を満たす $\mathbb{R}^2$ において C^2-級の関数 $\varphi(x,t)$ を求める．

(1) $\begin{cases} u = x+ct \\ v = x-ct \end{cases}$ という変数変換を行い, それによって定義される新関数を $\psi(u,v)$ とする:

$$\psi(x+ct, x-ct) = \varphi(x,t).$$

ψ の満たす方程式を求め, 偏導関数 ψ_v は u に関して定値となることを示せ．

(2) この u に関して定値である性質をつかって $\psi(u,v)$, ひいては $\varphi(x,t)$ の具体形 (波動方程式の一般解) を求めよ．

時刻 t に関する 3 次元**熱方程式**とは, 次の偏微分方程式のことである:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

ここで u は, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ と t の関数である．

問題 4.

$$u(x,y,z,t) := \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^3 \mathrm{Exp}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right),\ (t>0)$$

と置くとき, u は 3 次元**熱方程式**を満足することを示せ．

問題 5. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が C^2-級のとき,

$$u(x,y,z,t) := \frac{f(r-ct)}{r} + \frac{g(r+ct)}{r}, r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

とおけば, u は 3 次元波動方程式

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t^2},\ (c > 0)$$

を満足することを示せ.

問題 6. $\mathbb{R}^2$ おいて C^2-級の関数 f に対して

$$u = f(r,t),\ \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

とおく.

(1) u が 3 次元波動方程式を満足するならば, その方程式は

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

と置き換えられることを示せ.

(2) $u = v/r$ とおく. v の満足する方程式を立てよ.

(3) (2) で立てた方程式を解け.

定義 1. 連続関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ の閉包を f の**台 (support)** といい, $\mathrm{supp}(f)$ と記す.

問題 7. $u(x,y,z,t)$ は $\mathbb{R}^4$ 上の C^2-級関数で 3 次元波動方程式を満たすと仮定する. また $t = t_0$ を固定したとき, $\{(x,y,z) \mid (x,y,z,t_0) \in \mathrm{supp}(u)\}$ は**有界**であるとする. このとき, **エネルギー積分**

$$E(t) := \frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dxdydz$$

は t に無関係であることを示せ.