担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

ヤコビ行列，微分と変数変換 (略解)

作成日：December 20, 2010 Version：1.5

問題 1. 連鎖律によって

$$(g_r, g_\theta) = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

であることに注意.

(1)

$$\begin{aligned} (x-y)\,f_x + (x+y)\,f_y &= (r\cos\theta - r\sin\theta)\,f_x + (r\cos\theta + r\sin\theta)\,f_y \\ &= r\,(\cos\theta\cdot f_x + \sin\theta\cdot f_y) + (-r\sin\theta\cdot f_x + r\cos\theta\cdot f_y) \\ &= r\,g_r + g_\theta. \end{aligned}$$

(2) $r \neq 0$ のとき行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ は逆行列 $\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を持つので,

$$(f_x, f_y) = \frac{1}{r}(g_r, g_\theta)\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \left(\cos\theta\cdot g_r - \frac{\sin\theta}{r}\,g_\theta,\ \sin\theta\cdot g_r + \frac{\cos\theta}{r}\,g_\theta\right).$$

(3) (2) の結果を用いると,

$$\begin{aligned} (f_x, f_y) &= \left(\cos\theta\cdot g_r - \frac{\sin\theta}{r}\,g_\theta,\ \sin\theta\cdot g_r + \frac{\cos\theta}{r}\,g_\theta\right) = \left(-\frac{\cos\theta}{r^2}, -\frac{\sin\theta}{r^2}\right) \\ &= \left(-\frac{r\cos\theta}{r^3}, -\frac{r\sin\theta}{r^3}\right) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

補足 1. 因みに (3) の状況で f を求めると次のようになる. $g_\theta = 0$ なので $g(r,\theta)$ は θ に関しては定数関数である. 従って $g_r = -\dfrac{1}{r^2}$ より $g(r,\theta) = \dfrac{1}{r} + C$ (C は定数) となり,

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C \qquad (C \text{ は定数}).$$

(3) はここから f_x, f_y を求めてもよい.

問題 2.

(1) 定理 2 の枠内の公式どおりにやっても良いが，テイラー展開 $\sin t = t + [3\text{ 次以上の項}]$ に $t = 3x + 2y$ を代入して

$$\sin(3x+2y) = (3x+2y) + [(3x+2y)\text{ の 3 次以上の項}] = 0 + 3(x-0) + 2(y-0) + [2\text{ 次以上の項}]$$

を得る．同様に，$\sin(x+4y) = 0 + (x-0) + 4(y-0) + [2\text{ 次以上の項}]$.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(2) (1) より

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3x+2y\\x+4y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[2\text{ 次以上の項}]\\[2\text{ 次以上の項}]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\underline{\begin{pmatrix}[2\text{ 次以上の項}]\\[2\text{ 次以上の項}]\end{pmatrix}}.$$

$x,y\to 0$ のとき下線部は誤差項とみなせるので，$J=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ とすれば f は $F:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto J\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で近似される．

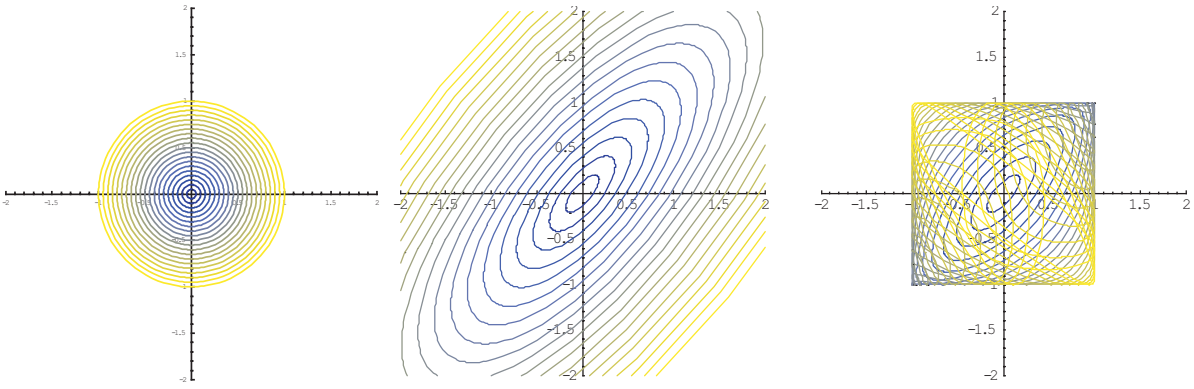

図 1: 左は xy 平面に原点中心の円を半径 0.05 から 1 まで描いたもの．中央はその線形写像 F による像，右は f による像を uv 平面に描いたものである．原点付近での近似の様子がよくわかる．

(3) この粒子の軌跡を $\boldsymbol{p}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ で表すと，$\lim_{t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{p}(0+t)-\boldsymbol{p}(0)}{t}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が成り立つ．言い換えれば，t に関する原点でのテイラー展開は

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[2\text{ 次以上の項}]\\[2\text{ 次以上の項}]\end{pmatrix}$$

の形で書ける．これを f に代入すると，

$$f\left(\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\left(t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[2\text{ 次以上の項}]\\[2\text{ 次以上の項}]\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}[2\text{ 次以上の項}]\\[2\text{ 次以上の項}]\end{pmatrix}$$

$$=t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[2\text{ 次以上の項}]\\[2\text{ 次以上の項}]\end{pmatrix}.$$

したがって粒子の像を uv 平面で観測したとき，時刻 $t=0$ における速度ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(4) 上と同様の議論から，速度ベクトルは $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3c_1+2c_2\\ c_1+4c_2\end{pmatrix}$.

(5) 像の速度ベクトルは，もとの速度ベクトル $\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ にヤコビ行列 $J=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ を掛けた $J\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ である.

復習

合成関数の微分・偏微分（その１） $f=f(x,y)=f(x(t),y(t))$ のとき,

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

問題 3. 上の (その 1) にある式を定理 1 のように行列の積の形に表せ. 特にこの時右からかける行列は, 何行何列行列か？

合成関数の微分・偏微分（その２） $f=f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

問題 4. 上の (その 2) にある式は定理 1 のように行列の積の形と同じことを意味していることを確認せよ.

前回宿題の略解

宿題 9-1

$A:=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とおく. A の固有方程式 $F_A(x)$ は

$$F_A(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

で与えられる. よって A の固有値は 1 と 2. A^n を求めるために

$$x^n=F_A(x)Q(x)+\alpha x+\beta,\ (\text{但し}\alpha x+\beta\ \text{は 整式として}\ F_A\text{による余り.})$$

とおく. $F_A(1)=0, F_A(2)=0$ より $1=\alpha+\beta, 2^n=2\alpha+\beta$ を得る. これを解いて $\alpha=2^n-1, \beta=2-2^n$ となる. $A^n=F_A(A)Q(A)+\alpha A+\beta E$ より

$$A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)E \tag{1}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

を得る.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

より式 (1) を使って

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = (2^{n-1}-1) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2-2^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, この $(1,1)$-成分だけみて

$$a_n = 3(2^{n-1}-1) + (2-2^{n-1}) = 2^n - 1$$

となる.

宿題 9-2

(1) $F_{A_q}(x) = \det|xE - A_q|$ を頑張って計算して, 求める固有多項式は $(x-q^2)^2(x+1)$ と因数分解される.

(2) $(A_q - q^2E), (A_q + E)$ はともにゼロ行列 O ではないので, $(x-q^2)^2$ か $(x-q^2)(x+1)$ が最小多項式になりそうな候補である. 具体的な計算により $(A_q - q^2E)(A_q + E)$ が O になり, $(A_q - q^2E)^2$ は O でないので, $M_A(x) = (x-q^2)(x+1)$ を得る.

(3) (2) の結果から $A_q^2 - (q^2-1)A_q - q^2E = O$ であるから $X := q^{-2}(A_q - (q^2-1)E)$ とおくと $A_qX - E = q^{-2}\left(A_q^2 - (q^2-1)A_q - q^2E\right) = O$ となり, $A_qX = E$ を得る. したがって, X は A_q の逆行列であり, これが求めるものであった. したがって定義 $X = q^{-2}(A_q - (q^2-1)E)$ から X の成分を計算すれば答案となる.

お話:問題 5 の解答

T_1, T_2, T_3 の満たす組ですぐに分かるものは,

$$T_1 = ((q^2)), T_2 = ((q^2)), T_3 = ((q^2)) \text{ と } T_1 = ((-1)), T_2 = ((-1)), T_3 = ((-1))$$

である. 他に 3 つの本質的な組の代表を列挙すると,

$$T_1 = \begin{pmatrix} -1 & q & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ q & -1 & q \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q & -1 \end{pmatrix}.$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} -1 & q & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q & -1 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -1 & q \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} -1 & q \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

となる. えっ? どうやって共役でないことが分かるかだって? それは, 行列 $A = (a_{ij})$ に対してその**トレース** を $\mathrm{Trace}A := \sum_i a_{ii}$ として定義すると行列から q の入った数の集合への関数ができます. $q = 1$ として共役でなかったら, 上の組たちは全て共役でないことが分かり, $q = 1$ としての関数値 $\mathrm{Trace}(T_{i_1}T_{i_2}T_{i_3}\cdots)$ を比べると全て非共役なことがわかります. 他の最小多項式が $(x-q^2)(x+1)$ の因数になる行列の組により定まる関数 $\mathrm{Trace}(T_{i_1}T_{i_2}T_{i_3}\cdots)$ は、上の 5 つの代表により定まるトレース関数の線形結合になっています.