担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

ケイリー・ハミルトンの定理

作成日：December 10, 2010　Version：1.2

★ ケイリーハミルトンの定理を学習します.

今後の予定　12/22：ヤコビ行列，微分と変数変換

ケイリー・ハミルトンの定理

問題 1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は異なる実数の固有値 α, β をもつとする.

(1) α と β の満たす 2 次方程式を求めよ.

(2) α と β の固有ベクトルは互いに平行でないことを示せ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ にたいし，$(\alpha E - A)(\beta E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示せ．ただし E は単位行列を表す．（Hint: $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルからなる基底で表現してみよ.）

(4) 関係式 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \;=\; O$ （ゼロ行列）を示せ．（Hint: 解と係数の関係を用いる.）

一般に，次の定理が知られている：

ケイリー・ハミルトンの定理. n 次正方行列 A に対し，多項式 F_A を

$$F_A(x) \;:=\; \det(xE - A) \qquad (E\ :n \text{ 次の単位行列})$$

と定める．このとき，$F_A(A) = O$ が成り立つ．とくに $n = 2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ならば

$$F_A(A) \;=\; A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \;=\; O.$$

この多項式 F_A を A の**固有多項式**と呼ぶ.

問題 2. (固有多項式による n 乗計算) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有多項式 F_A （2 次多項式）および固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ.

(2) $A^4 - 3A^3 - 4A^2$ および A^5 を求めよ.

(3) 多項式 x^n を $F_A(x)$ で割った余りを $ax + b$ とおく．すなわち，ある多項式 $Q(x)$ が存在して，

$$x^n \;=\; F_A(x)Q(x) + ax + b$$

と書けるとする．$F_A(\lambda_1) = F_A(\lambda_2) = 0$ を利用して，係数 a, b を求めよ.

(4) $F_A(A) = O$ を利用して A^n を求めよ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

逆行列

前期線形代数の必修課題として, 逆行列をガウス-ジョルダンの掃き出し法により求めることがあった. ここでは, 別のやり方で逆行列を求めることを学習する.

問題 3. 正則行列 A に対して $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n = O, a_0 \neq 0$$

を満たしているとする.

このとき, 逆行列 A^{-1} について次が成立することを示せ:

$$A^{-1} = -(a_0)^{-1}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + a_{n-2}A^{n-3} + \cdots + a_2 A + a_1 E_n\right)$$

問題 4. A を

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) ケイリー・ハミルトンの定理を用いて $G_A(A) = O$ となる x の 3 次多項式 $G_A(x)$ を求めよ.

(2) $G_A(x)$ は 1 次の x の多項式の 3 つの積に因数分解されることを確認せよ.

(3) $G_A(x)$ の因数分解をみて, x の 1 次以上 2 次以下の多項式 $M_A(x)$ で $G_A(x)$ を割り切り, かつ, $M_A(A) = O$ となるものを求めよ. ($M_A(x)$ は A の**最小多項式**と呼ばれる.)

(4) A^{-1} を求めよ.

今週の宿題

宿題 9-1. 漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$ で定まる数列を考える.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

であることを用いて, a_n $(n \geq 0)$ の一般項を求めよ. ただし, **問題 2** のように固有多項式を使って行列の累乗を計算すること.

宿題 9-2. q を 0 でない勝手な数とする.

$$A_q := \begin{pmatrix} -1 & q^2 - q + 1 & q^2 - q + 1 \\ -q^2 - 1 & 2q^2 - q + 1 & q^2 - q + 1 \\ q^2 + 1 & -q^2 + q - 1 & q - 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A_q の固有多項式を因数分解せよ.

(2) A_q の最小多項式 $M_{A_q}(x)$ を求めよ.

(3) A_q^{-1} を求めよ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

お話

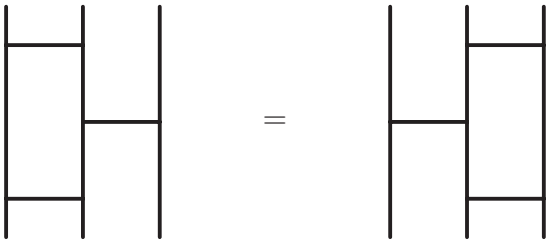
$$T_1 := \begin{pmatrix} -1 & q & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, T_2 := \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ q & -1 & q \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, T_3 := \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q & -1 \end{pmatrix}.$$

とする．これら T_i に対する最小多項式はどれも $(x-q^2)(x+1)$ となっている．

実は，積に関してももっと分かる．

$$T_1T_2T_1 = T_2T_1T_2, T_2T_3T_2 = T_3T_2T_3, T_1T_3 = T_3T_1 \tag{1}$$

を満たしている．T_1, T_2, T_3 は組紐関係式を満たすと言われる．これは，次のあみだくじが同じくじであることに似ている．



定理 1. q^2 は 1 であるか，1 の 3, 4 乗根でないとする．このとき，最小多項式は $(x-q^2)(x+1)$ の因数であり，式 (1) を満たす 3 つの行列の組は基底の変換を除いて (共役を除いて) **本質的に**[1] 5 つしか存在しない．

問題 5. 上に書いた T_1, T_2, T_3 以外の残りの 4 つのうち組を 3 つ以上みつけよ．(2 つは，直ぐに見つかる.)

実は，$q \to 1$ とするときに，T_i は全て 2 乗すると単位行列になる性質をもっていて，式 (1) は極限操作 $q \to 1$ で保たれている．(**Flat q-deformation, 量子化**になっている.)

実は，q^2 が 1 のベキ根でないとき最小多項式が $(x-q^2)(x+1)$ の因子で，**組紐関係式**

$$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} (i = 1, \ldots, k-1), T_iT_j = T_jT_i \text{ if } |i-j| > 1$$

を満たす本質的な行列 $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$ は，基底の変換を除いて今日では全て知られている．q^2 が 1 のベキ根のときは，一般には本質的な行列を全て列挙**できない**ことが知られている．(**不可能性**).

[1] X, Y が共に仮定を満たす行列のとき，$\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix}$ は本質的ではないという意味．