担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

表現行列と対角化（略解）

作成日：November 27, 2010 Updated：December 02, 2010 Version：1.3

問題 1.（表現行列の復習） (1) F を標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ を用いて表現すると

$$F : (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．よって $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より，$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
（前回の**問題** 4(3) を参考にせよ．行列の掛け算や逆行列を求めなくても右辺が分かる.）

問題 2. (1) $F : (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 s \\ \lambda_2 t \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を代入すれば $A\boldsymbol{u}_1 = F(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_1$ を得る．$A\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2\boldsymbol{u}_2$ も同様.
(2) $C\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \iff (\lambda E - C)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. もし $(\lambda E - C)^{-1}$ が存在すれば，$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾する．よって $\det(\lambda E - C) = 0$.

問題 3.（対角化の手順） (1) $\det(\lambda E - A) = 0 \iff \det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = 0$
$\iff \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. よって $\lambda = 2,\ 5$.
(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．$\lambda = 2$ のとき，$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x = -2y$. よって $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすればよい．同様にして，$\lambda = 5$ のとき $x = y$ となるから，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすればよい.（もちろん $\boldsymbol{u}$ の取り方は無数にある.） (3) 基底を $\left\{\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ と選べば，$A\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{u}_1$ かつ $A\boldsymbol{u}_2 = 5\boldsymbol{u}_2$ より，任意の $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ について $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = s(2\boldsymbol{u}_1) + t(5\boldsymbol{u}_2)$. よって

$$F : (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 2s \\ 5t \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

（$\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ を入れ替えると，2 と 5 が入れ替わる．(入れ替わった場合でも正答.)）

● $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底でなくてはならず，固有ベクトルであれば何でもよい，というわけではない．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ の形で表せないと，上の式は一般性を失ってしまうからである．(**宿題 8-2**(4) でこのことを確認する.)
● **行列の対角化**．$(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)P$ となる行列 $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ をとれば，A の対角化 $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ が得られる．これは基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ に関する F の表現行列そのものである．ここでは『$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ は基底』という条件が『P^{-1} が存在する』という形で活かされている．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. (F の意味，n 乗計算)

(1) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ と置くと，$s = t = 1/3$. よって $\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{3}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{u}_2$.

(2) **その 1：** $n \geq 1$ のとき $\boldsymbol{x}_n = F(\boldsymbol{x}_{n-1}) = A\boldsymbol{x}_{n-1}$ より，$\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ が成り立つ．$A^n\boldsymbol{u}_1 = 2^n\boldsymbol{u}_1$ および $A^n\boldsymbol{u}_2 = 5^n\boldsymbol{u}_2$ に注意すれば，線形性より

$$\boldsymbol{x}_n = A^n\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{u}_2\right) = \frac{1}{3}(2^n\boldsymbol{u}_1 + 5^n\boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1}+5^n\\-2^n+5^n\end{pmatrix}.$$

その 2：

$$A^n = \begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1}+5^n & -2^{n+1}+2\cdot 5^n\\-2^n+5^n & -2^n+2\cdot 5^n\end{pmatrix}$$

から $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ を計算すればよい．[1]

問題 5. $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ の選び方は無数にあるが，たとえば $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ を使うと，このとき $F : (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}-s\\2t\end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$.

この場合**問題** 4(2) の答えは $\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+2^{n+1}\\(-1)^n-2^n\end{pmatrix}$ となる．

先週の宿題

宿題 7-1. (1) $(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}as+bt\\cs+dt\end{pmatrix}$.

(2) **その 1**: $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ のとき

$$\boldsymbol{x} \in \ell \iff x - 3y = 1 \iff (as+bt) - 3(sc+td) = 1 \iff (a-3c)s + (b-3d)t = 1$$

これが $s = 2$ (t に特別な条件はない, 勝手な実数) と同値なので，$b - 3d = 0$ かつ $a - 3c = 1/2$. すなわち $b = 3d, a = 3c + 1/2$ を得る．さらにベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の直交性から，$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ (内積) $\iff ab + cd = 0 \iff (3c + 1/2)\cdot(3d) + cd = 0$. この式から，$d = 0$ もしくは $c = -3/20$ を得る．$d = 0$ のときは $\boldsymbol{u}_2$ がゼロベクトルとなってしまい基底にはなれない．よって $c = -3/20$ であり，このとき基底として考えられる候補は $\left\{\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = d\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$. ただし $d \neq 0$ である．

その 2: $s = 2$ の条件から

$$\ell = \{2\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

[1] ここは, 2×2 行列を扱っているからまだよいが, 高次の正方行列 P の逆行列 P^{-1} を求めるのは至難で, 特に試験のときなどには時間がなくなり適していない．例年, 学生は対角化の問題で, なぜか逆行列を求めたがる傾向にあると思う．また, 余因子は理論的に推し進めるには良いが計算機をつかって逆行列を余因子から求めるのは非常に筋の悪いの方法である．ガウス-ジョルダンの掃き出し法を使ったとしても高次ではかなり難しい．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

はℓのパラメータ表示に他ならず, $\boldsymbol{u}_2$はℓの方向ベクトルである. 一方ℓの方程式は$x-3y=1$で与えられているので, 特に傾きは$1/3$であり全ての方向ベクトルは$t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, (t\neq 0)$の形をしている. 次に$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$の直交性から内積の値をみて$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=3a+c=0$, つまり$c=-3a$を得る. また, ℓのパラメータ表示で$2\boldsymbol{u}_1$は通る点の情報を与える. ℓの方程式$x-3y=1$から他の通る点を考えると例えば$(x,y)=(1,0)$ (もしくは$(0,-1/3)$)はℓ上の点であるのでこの点と$2\boldsymbol{u}_1$との差ベクトル

$$\begin{pmatrix}1-2a\\6a\end{pmatrix}\ \left(\text{もしくは}\ \begin{pmatrix}-2a\\-1/3+6a\end{pmatrix}\right)$$

は$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$のスカラー倍である. $a=0$であると$\boldsymbol{u}_1$は零ベクトルになり題意を満たさないことに注意して, 傾きを考えて, $6a/(1-2a)=1/3$ (もしくは$(-1/3+6a)/(-2a)=1/3$)を得る. これを解いて$a=1/20$を得る. 従って, 以上の考察をまとめると$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2=t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, t\neq 0, t\in\mathbb{R}$が$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$が満たさないといけない条件である. また, 一方でこれらが問題の仮定を満足することも明らかなので, これらが題意の基底である.

(3) $|\boldsymbol{u}_1|=|\boldsymbol{u}_2| \iff \dfrac{1}{20}=|d| \iff d=\pm\dfrac{1}{20}$. よって基底の候補$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$は 括弧内の順番を保って

$$\left\{\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \frac{1}{20}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}\ \text{および}\ \left\{\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, -\frac{1}{20}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

宿題7-2 (1) $A=\begin{pmatrix}2&98\\0&100\end{pmatrix}$.　(2) 条件をまとめると$(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$. よって

$$(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)=(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

右端の行列を P とすれば，$B=P^{-1}AP$ (207の問題4(3)を参照, 基底を取り換えたときの表現行列は共役). これを計算して，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&100\end{pmatrix}$.　(3) $A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$.

これを計算して，　$A^n=\begin{pmatrix}2^n&-2^n+100^n\\0&100^n\end{pmatrix}$.

(4) ℓ_0 をパラメータ表示すると，　$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$. よって ℓ_n のパラメータ表示は

$A^n\boldsymbol{x}=tA^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2^n+100^n\\100^n\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$.

(5) (ℓ_n の傾き) $=\dfrac{100^n}{-2^n+100^n}\to 1\ (n\to\infty)$.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

前回の宿題レポート

前回の宿題レポートの解答にちょくちょく見かけた誤った (数学) 文法の例を書き出しておく.
端的には,

集合 = その１つの要素 (もしくは元)

という書き方をしている.
例えば

$$\{1,2,3\} = 3$$

と書いていることとどこで文法を間違えてしまったかの場所は同じである.
直線 ℓ は, 例えば通る点 $\boldsymbol{u}$, 方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ を使ってパラメータ表示されているとすると, 宿題の問題では ℓ は点の集合

$$\ell = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

ととらえていた. [2] そこで,「$\mathbb{R}^3$ 上の一次変換 f による ℓ の像を求めなさい」という設問があるときに,「求める像は, $f(\ell) = f(\boldsymbol{u}) + tf(\boldsymbol{v})$ 」と書く誤答が大半であった. 文法がおかしいのは, 左辺 $f(\ell)$ は実は直線 (集合) になっている場合で, 右辺は $f(\ell)$ の元であることだ.
たぶん $f(\ell)$ の意味やいくつか他の記法を知らずに使っていた人もいると思うので次の 2 つも書いておく:

定義 1. 集合は 基本的に

$$\{a \mid a \text{ の範囲の指定をする命題 }\}$$

という記法で書かれる. 数学の世界の方言で何か大きな全体の集合 A があるときに

$$\{a \in A \mid a \text{ の範囲の指定をする命題 }\}$$

という風に書くこともある. $a \in A$ は「a は A の要素である」という命題なので厳密には若干変な気もするが例外的に多くの人がこのように書いている. (これは使っても良いという意味.) また紛らわしいことがないとき仕切り"|" を":" で書くときもある.

定義 2. $f : X \to Y$ を集合 X から集合 Y への写像とする.

- $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$. 同様に $S \subset X$ のとき $f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$.
- $f(S)$ を S の f による**像**という. X を f の定義域全体と見ているときに, X を使わず $\mathrm{Im}(f)$ や $\mathrm{Image}(f)$ と書くこともあり, **値域**とも呼ばれる.
- 矢印「$\to$」は集合の間に用いる.
- 矢印「$\mapsto$」は, f が写像のときに集合の要素の間に $x \mapsto f(x)$ のように用いる.
- 例えば $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}_{>0} := \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ とする. f は指数関数で $f(x) = e^x$ で与えられるときに, このことを表す方法として次の 3 つが普通である:

  (1) $f : X \ni x \mapsto e^x \in Y$

  (2) $f : X \to Y, (x \mapsto e^x)$

  (3)

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \to & Y \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$$

  ここまでは (12 月までの) 数学演習 II では必修とする. 数学的なセンスとは, 無関係で文法の問題である.

- 矢印「$\Rightarrow$」は命題の間に用いる論理記号. 「(命題 P) $\Rightarrow$ (命題 Q) 」は,「P が成立するならば Q が成立する」の意味で使う. $\Rightarrow$, $\to$ と $\mapsto$ が誤った意味で混在した文章が多発していました.

[2] 代数のいいところだが, 宿題 6-2 の略解のコメント箇所や関連する" お話" コーナーでは, 4 本直線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ からなる集合 X を扱ったりして, 直線 ℓ_i は X の元と見ることもあるので, もちろん注意が必要だ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

- 慣れれば便利だが, 間違える学生が非常に多い標準的な記法の**代表格**: $Z \subset Y$ のときに,

$$f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$$

を Z の f による**逆像**という. 逆**写像** f^{-1} があるとは一言も言っていないことに注意. 何も逆写像 f^{-1} が存在するという仮定がないときに $y \in Y$ に対してうっかり**元** $f^{-1}(y)$ と書かないように. この定義から $\{y\}$ は Y の 1 点からなる集合なので $f^{-1}(\{y\})$ なら常に問題ないが, X の部分集合になっていることを忘れずに.

- f が $f(X) = Y$ となるとき, f は**全射**であるという.
- f が異なる 2 元を異なる 2 元へ写しているとき, f は**単射**であるという:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

次は, 数学演習 II では必修としないが, 上の定義に慣れるための演習 (よって解答は自分で考える):

問題 6. 写像 $f : X \to Y$ に対して次の問いに答えよ:

(1) $f(f^{-1}(Y))$ と $f^{-1}(f(X))$ はどこの部分集合か答えよ.

(2) $S \subset X$ に対して $f^{-1}(f(S))$ と S には包含関係があるか？ある場合にはどのような包含関係か？

(3) $Z \subset Y$ に対して $f(f^{-1}(Z))$ と Z には包含関係があるか？ある場合にはどのような包含関係か？

問題 7. 次の写像は, 全射か単射か判定せよ.

(1)

$$f : \mathbb{R}\backslash\{a\} \ni x \mapsto \frac{1}{x-a} + c \in \mathbb{R}\backslash\{c\}$$

(2)

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 + 2 \in [2, \infty)$$

(3)

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in \mathbb{R}$$

問題 8. 全射の定義 (上では $Y = f(X)$) を「任意の $y \in Y$ に対して」で始まる文 (論理式) に書き換えよ.

問題 9. 写像 $f : X \to Y$ について次の 3 つは同値であることを示せ:

(1) f は単射.

(2) $\forall x \in X; f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$.

(3) $A \subset X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$.

問題 10. $f : X \to Y$ において $A, B \subset X$ のとき次を示せ:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

問題 11. 次を満たす f, X, Y を具体的に一組定めよ.

(1) X, Y は集合.

(2) $f : X \to Y$ は写像.

(3) $A, B \subset X$.

(4) $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.