担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

# 表現行列と対角化

作成日：November 26, 2010 Updated：November 29, 2010 Version：1.3

★今日は対角化の手順をより深いレベルで理解しましょう.

**今後の予定**　12/8：中間試験
12/15：ケイリー・ハミルトンの定理

## 行列の対角化（うまい基底ときれいな表現）

**問題 1.（表現行列の復習）** 線形写像 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $F:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x+2y\\x+4y\end{pmatrix}$ で定める.

(1) 標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ に関する $F$ の表現行列 $A$ は何か？

(2) 基底 $\left\{\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する $F$ の表現行列 $B$ を求めよ.

以下では，基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ をうまく選び，任意の $\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2$ に対し上の $F:\boldsymbol{x}\mapsto F(\boldsymbol{x})$ が

$$F:(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\longmapsto(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 s\\\lambda_2 t\end{pmatrix}\ =\ (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\qquad\cdots(*)$$

と表現されるようにしたい．このとき，基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ に関する座標値の変化は大変分かり易い.

**問題 2.** 次の (1)(2) を示せ：

(1) $A$ を $(*)$ の $F$ の表現行列とする．基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ が $(*)$ を満たすとき，$A\boldsymbol{u}_1=\lambda_1\boldsymbol{u}_1$，$A\boldsymbol{u}_2=\lambda_2\boldsymbol{u}_2$ が成り立つ.

(2) 一般に，正方行列 $C$ に対し $C\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ および定数 $\lambda$ が存在したと仮定する．このとき，$\det(\lambda E-C)=0$ （$E$ は単位行列）となる.

**問題 3.（対角化の手順）**

(1) 問題 1 の $A$ に対し，$\lambda$ の方程式 $\det(\lambda E-A)=0$ を解け.

(2) 上の方程式のそれぞれの解 $\lambda$ に対し，$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{u}$ を 1 つずつ求めよ.

(3) 基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ および定数 $\lambda_1$，$\lambda_2$ を適当に定め，$F$ を $(*)$ の形で表せ.

一般に，$n$ 次正方行列 $A$ に対し，

- 方程式 $\det(\lambda E-A)=0$ を $A$ の**固有方程式**と呼び，その解 $\lambda$ を $A$ の**固有値**と呼ぶ.
- $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ を固有値 $\lambda$ の**固有ベクトル**と呼ぶ.

問題 3 の手順は，与えられた行列 $A$ に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 $P$ を見つける操作とも解釈できる.（解答プリント参照.）これがいわゆる**行列の対角化**である．行列の中には，対角化できないものも存在する．固有ベクトルから基底を選べない場合があり，そのときは上の手順も途中で行き詰ってしまうからである.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

どのようなときに, 正方行列が対角化できるか答だけでも見ておこう. 簡単のためこれ以降の行列の固有値は, 全てたまたま実数値になっている場合のみを考える.[1]　まず, 次が簡単に証明できる[2]:

**定理 1.** $n \times n$ 行列 $A$ を考える. $\boldsymbol{v}_\lambda$, $\boldsymbol{u}_\mu$ をそれぞれ $A$ の固有値 $\lambda, \mu$ の固有ベクトルとする. このとき, 次が成立する:

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \boldsymbol{v}_\lambda \text{ と } \boldsymbol{u}_\mu \text{ は 1 次独立である.}$$

もっと一般に $A$ に対して $n$ 個の互いに異なる固有値の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は, 1 次独立である.

さて, 次に

$n \times n$ 行列 $A$ に対して $n$ 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が存在する $\cdots$ (**条件 1**)

と仮定する. 各 $i$ に対して $x_i$ の固有値を文字で置いておこう:

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$$

を満たすとする. 正方行列 $P := (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ を考える.

$$AP = (A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n)$$

ここで, 右辺は,

$$= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となっていて, 両辺に**左から** $P^{-1}$ をかければ $P^{-1}AP$ が対角行列となることが分かる.

実は次が知られている:

**定理 2.** (**条件 1**) が成立する $\Leftrightarrow$ $A$ は対角化できる.

なので定理 1 のとき, 換言すると, 固有値が全て異なるときは正方行列は必ず対角化できる.

**問題 4. ($F$ の意味, $n$ 乗計算)** $\mathbb{R}^2$ 上には「$\boldsymbol{x}$ に置かれた素粒子 $\pi$ は, 1 秒後に $F(\boldsymbol{x})$ に移動する」という運動法則が与えられている. ($F$ は問題 1 で与えられるもの.) 時刻 0 において, 素粒子 $\pi$ を $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に置いた.

[1] ちょっと考えると分かることだが, $\mathbb{R}^n$ なるベクトル空間をやめてしまって $\mathbb{C}^n$ なるベクトル空間を考えると, 固有多項式は $\mathbb{C}$ に解をもつからこのような仮定を置かなくて済む.

[2] 自分で頑張って証明してみよう. 教員が言っていることが真か偽か自分で確かめる!

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(1) **問題 3** で求めた基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ を用いて，$\boldsymbol{x}_0$ を $s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ の形で表せ．

(2) $n$ 秒後の素粒子 $\pi$ の位置 $\boldsymbol{x}_n$ をもとめよ．$(n \in \mathbb{N})$.

**問題 5.** $F$ が $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -x \end{pmatrix}$ の場合，$(*)$ のような表現を与える基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ．また，この場合**問題 4**(2) の答えは何か？

**今週の宿題：締め切りは，例外的に 2010/12/15**

**宿題 8-1** $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A$ の固有値 $\lambda$ を全て求め，それぞれに対し固有ベクトルをひとつずつ与えよ．

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 $P$ を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が漸化式

$$x_{n+1} = -3x_n + 4y_n,\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n,\ x_1 = y_1 = 1$$

で与えられている．このとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一般項を求めよ．

**宿題 8-2** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．この行列を対角化してみよう．

(1) 方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ の解は $\lambda = 1$(重解), 2 となることを示せ．

(2) 固有値 $\lambda = 1$ に対し，その固有ベクトル全体と零ベクトルの和集合

$$W_1 = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\right\}$$

は原点を通る平面となることを示せ．

(3) 固有値 $\lambda = 2$ に対し，その固有ベクトル全体と零ベクトルの和集合

$$W_2 = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}\right\}$$

は原点を通る直線となることを示せ．

(4) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となるように，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in W_1$，$\boldsymbol{u}_3 \in W_2$ を選べ．

(5) $(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3)P = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3)$（ただし $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底）とする．$\det P \neq 0$ となる理由を述べよ．

(6) $B$ を $(1,1)$ 及び $(2,2)$-成分が 1 で，$(3,3)$-成分が 2 の対角行列とする．また，$P^{-1}$ は求めずに，$B = P^{-1}AP$ は対角行列となることを確かめよ．(つまり $PB = AP$ を示せ.)

(7) $A^n$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

**数学演習 II の試験には出ないかもしれないけど, 次のステップとして知っておくと良いこと:**

この節では**宿題 8-2** の記号, 仮定をそのまま継続する.

**問題 6.** $i \in \{1, 2\}$ とする. 次を示せ:

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_i \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_i$.

(2) $\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in W_i \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in W_i$.

この例で $W_1, W_2$ は, **和とスカラー倍で閉じていて**各々固有値 1, 固有値 2 の**固有空間**と呼ばれる.
一般に $n \times n$ 行列 $C$ に対して

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid C\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

は $C$ に対する固有値 $\lambda$ の**固有空間**と呼ばれる. 問題 6 のように**和とスカラー倍で閉じていてる**ことも証明できる. [3]

このような**和とスカラー倍で閉じていてる**部分の空間を一般に $\mathbb{R}^n$ の**部分 (ベクトル) 空間**と呼ぶ. もっと正確に言ってみると,

**定義 1.** $V$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. $V$ の部分集合 $W$ (つまり $W \subset V$) が**部分 (ベクトル) 空間**であるとは, 次の 2 条件を満たすときである:

(S1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$.

(S2) $\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in W \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in W$.

**問題 7.** $V = \mathbb{R}^3$ とする. $V$ において次の部分集合 $W$ は, 部分ベクトル空間であることを示せ:

(1) $W$ は原点を通る直線.

(2) $W$ は原点を通る平面.

部分空間にも基底の概念を拡張しよう. $W$ は, $V = \mathbb{R}^n$ の部分空間であると仮定する.

**定義 2.** $m$ 個の組 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ (各 $i$ について $\boldsymbol{x}_i \in W$) が $W$ の基底であるとは, 次の 2 条件が成立するときを言う:

(B1) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ は 1 次独立である.

(B2) $W$ の勝手な元は $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ の 1 次結合で書ける.

**問題 8.** $W_1, W_2$ の基底はそれぞれ何か？

[3] 教員が言っていることは, 真か偽か各自確認する. 鵜呑みにしてはいけない.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

今までは $V = \mathbb{R}^n$ を $n$ 次元ベクトル空間と呼んでいたが, ここまでで, 見たように $V$ の部分空間 $W$ もベクトル空間の仲間に入れて, 両方ともベクトル空間とも呼ぶ. $W$ に基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ が取れるときに, $W$ は $m$ **次元**部分ベクトル空間とも呼ばれる.

代数の醍醐味の一つは, ある種の仮定 (公理系) を満たす集合について成り立つ事柄 (定理や性質) を整備して, 汎用性を高くすることである. 実は, 後に**部分**空間以外に**商空間**というのも習う. また, $\mathbb{R}^n$ の部分空間の他にももっとたくさん様々な $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間があって, それはとある $\mathbb{R}^m$ と非常に似ていて (**同型**で) 今まで皆さんが手を動かして列ベクトルやら行列の計算をしていた事柄が**全て応用**される.

## お話

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 上の 1 次変換の集まりで次のものを考える:

$$SO(3) := \left\{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \text{ は原点 } O \text{ を固定する回転を表す 1 次変換} \right\}.$$

つまり $SO(3)$ は勝手な半径の球面をそれ自身に写す 1 次変換全体である.

$G$ を $SO(3)$ の部分集合 (特に特別な 1 次変換の集まり) で, 次を満たすものとする:

(1) $f, g \in G \Rightarrow g \circ f \in G$.

(2) 恒等写像 $e \in G$.

(3) $f, g, h \in G \Rightarrow (h \circ (g \circ f)) = ((h \circ g) \circ f)$.

(4) $g \in G \Rightarrow \exists h \in G\,;\, g \circ h = e$.

次のことが知られている:

**定理 3.** 部分集合 $G$ は, その元の個数 $|G|$ が有限であるものと仮定する. このとき, $G$ は次のどれかになる:

($A_k$ 型) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 $k$ 角形**をそれ自身に変換する回転全体. (このとき,$|G| = k$.)

($D_k$ 型) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 $k$ 角形**をそれ自身に変換する回転と反転 (折り返し) 全体. (このとき, $|G| = 2k$.)

($E_6$ 型) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 4 面体**をそれ自身に変換する回転全体. (このとき, $|G| = 4!/2$.)

($E_7$ 型) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 6 面体**をそれ自身に変換する回転全体. (このとき, $|G| = 4!$.)

($E_8$ 型) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 12 面体**をそれ自身に変換する回転全体. (このとき, $|G| = 5!/2$.)

Opps! おっと, プラトンの正多面体は他にも 2 種あった!

## 問題 9.

(1) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 8 面体**をそれ自身に変換する回転全体は, 定理 3 のどの型になるか？

(2) 原点 $O$ を中心とする勝手な辺の長さの**正 20 面体**をそれ自身に変換する回転全体は, 定理 3 のどの型になるか？

**問題 10.** 定理 3 を満たす $G$ を考えたときに, 各 $f \in G$ の固有値はどんなものになるか考える. $G$ ごとに固有値の集合 $EV(G) := \{\lambda \mid \lambda \text{はある } f(\in G) \text{ の固有値}\}$ を全て求めよ.