担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

線形空間の基底，線形写像の表現行列（略解）

作成日：November 21, 2010　Version：1.4

問題 1.　略.

問題 2.　(1) 与えられた関係式から $(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ を得る．右辺の行列が P である．$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)P\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に対し座標値はただ一通りに定まるはずだから，$P\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$．$P$ は（たとえば行列式の値より）正則行列なので，関係式 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を得る．

問題 3.　(1)$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ では書き表すことができない．残りは

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} &= 12\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3 && \text{（1通りに定まる）} \\
&= 3\boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_2 + 5\boldsymbol{u}_3 && \text{（1通りに定まる）} \\
&= 3\boldsymbol{w}_1 + 7\boldsymbol{w}_2 + 2\boldsymbol{w}_3 + 0\cdot\boldsymbol{w}_4 \\
&= 4\boldsymbol{w}_1 + 8\boldsymbol{w}_2 + 0\cdot\boldsymbol{w}_3 + 1\cdot\boldsymbol{w}_4 = \cdots && \text{（1通りに定まらない）}
\end{aligned}$$

などとなる．

(2) 基底となるものは $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$．実際，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を任意に取るとき，$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ もしくは $\boldsymbol{x} = (x-y)\boldsymbol{u}_1 + (y-z)\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3$ とそれぞれ1通りに書ける．すなわち，問題プリント枠内の (B1)(B2) を満たしている．一方 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ は，(1) より $\mathbb{R}^3$ 内に座標値をあたえることができないベクトルが存在するわけだから，基底でない．これは (B2) を満たさない例である．$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ は

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2\ \ \boldsymbol{w}_3\ \ \boldsymbol{w}_4)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2\ \ \boldsymbol{w}_3\ \ \boldsymbol{w}_4)\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，座標値が1通りに定まらないので基底ではない．これは (B1) を満たさない例である．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4.　(1) $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき，線形性より，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2) = a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + a_2 f(\boldsymbol{u}_2) = 2a_1\boldsymbol{u}_1 + 3a_2\boldsymbol{u}_2 \\ &= (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

下線の行列が A である．(2) 同様にして，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 基底の変換法則を思い出すと，

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \underline{(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)P} \cdot \underline{\underline{P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}} = \underline{(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)}\underline{\underline{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}}$$

であった.（下線部がそれぞれ一致.）これより，

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \underline{(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)P}P^{-1}AP\underline{\underline{P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}} = \underline{(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)}P^{-1}AP\underline{\underline{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}}.$$

ゆえに $B = P^{-1}AP$ を得る.

問題 5.　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから，$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B （標準基底に関する表現行列）を求めればよい．$(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より，$(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ として**問題** 4(3) を適用すれば，求める行列は $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. より一般に，$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ より $B^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 3^n & 2^n - 3^n \\ 2^n - 3^n & 2^n + 3^n \end{pmatrix}$.

> B よりも A のほうが写像 f の性質を明解に表現していることに注意しよう．その意味で，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ の定める座標系は f の解析に適したものになっている.（→ **対角化**）

先週の宿題 (略解)

宿題 6-1.　(1) その 1（線形性を用いる）：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，

$$T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xT_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + (x-y)T_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

$$= \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\ \text{よって}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) その２（行列の性質を用いる）： $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ を並べて，

$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. よって $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) ℓ をパラメーター表示すると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. よって T_A による像は $tA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形．これが ℓ' と一致するためには，方向ベクトル $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$ の形でなくてはならない．したがって $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，$a = -c \neq 0$ を得る．すなわち，一般に $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & d \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ の形であればよい．

宿題 6-2. 答えのみ：(1) $T_A(\ell_1) = \ell_4$, $T_A(\ell_2) = \ell_1$, $T_A(\ell_3) = \ell_2$, $T_A(\ell_4) = \ell_3$. $T_B(\ell_1) = \ell_1$, $T_B(\ell_2) = \ell_2$, $T_B(\ell_3) = \ell_4$, $T_B(\ell_4) = \ell_3$.

T_A は、$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ を置換する:

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_4 & \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{pmatrix}$$

T_B は、$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ を置換する:

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_4 & \ell_3 \end{pmatrix}$$

(2) ℓ のパラメータ表示は、$t\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{e}_1$, $t \in \mathbb{R}$ で与えられる. $t\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}$ を満たす t はなく、ℓ は原点を通らない. (1) の結果から $T_A(\ell_1) = \ell_4$, $T_B(\ell_1) = \ell_1$ に注意する. また、計算により $T_A(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$, $T_B(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_3$ を得る.

パラメータ表示から ℓ の T_A による像は、$\{\boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{x}_4 | t \in \mathbb{R}\}$ で ℓ の T_B による像は、$\{\boldsymbol{e}_3 + t\boldsymbol{x}_1 | t \in \mathbb{R}\}$ となる.

(3) T_A により ℓ_1 が ℓ_4 に ℓ_2 が ℓ_1 に移ることと T_A の線形性を考えることにより答えは簡単に分かる: T_A により π_{12} は $\{\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ に移る. (1) の考察から T_B は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 各々を止めているので T_B により π_{12} は動かない: π_{12} の T_B のよる像は π_{12}.

(4) (2) での $\boldsymbol{e}_1$ の像の計算と (3) を踏まえて T_A, T_B のよる像は、各々

$$\{\boldsymbol{e}_2 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},\ \{\boldsymbol{e}_3 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

となる. (**ここの解答が、なぜこんなにあっさりしていても良いか分かっていない人は、もう少し自分で考えてみよう.**)