担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像

作成日：October 11, 2010　Updated：October 13, 2010　Version：1.1

問題 1.

(1) 写像である.

(2) $|x| > 1$ とすると $y^2 = 1 - x^2$ を満たす解はないので $f(x) = \emptyset$ となり元は定まらない. 従って, 写像ではない.

(3) 同上.

(4) $x = 1/\sqrt{2}$ とすると, $y^2 = 1 - 1/2 = 1/2$ の解は 2 つあるよって $f(1/\sqrt{2}) = \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$ となり、一般に $f(x)$ から一意には元は定まらない. よって、写像ではない.

(5) $x_0 \in [-1, 1]$ に対して $y^2 = 1 - x_0^2$ を満たす 0 以上の解はただ一つで、かつそれは存在する. よって、写像である.

問題 2. 省略.

問題 3.

(1) (L1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ x+x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)+(x'+y') \\ x+x' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x' \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right).$

(L2) $f\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \alpha f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$

またこれは $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる一次変換である.

(2) (L1) も (L2) もみたさない.

(3) (L1) も (L2) もみたさない.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる一次変換である.

問題 4. $f(\mathbf{0})$ は $\mathbb{R}^m$ の零ベクトルである. 実際、(L2) の条件から $f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0})$ となるが、勝手な $\mathbb{R}^m$ のベクトルの 0 スカラー倍は、零ベクトルとなる. (他の方法として加法の逆元の存在を使っても出来る.)

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので, f の線形性より $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(2) 直線 $x + 2y = 1$ のパラメーター表示は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ である.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ に注意すると, f の線形性により $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
よって, 直線 $x + 2y = 1$ の f による像は直線

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

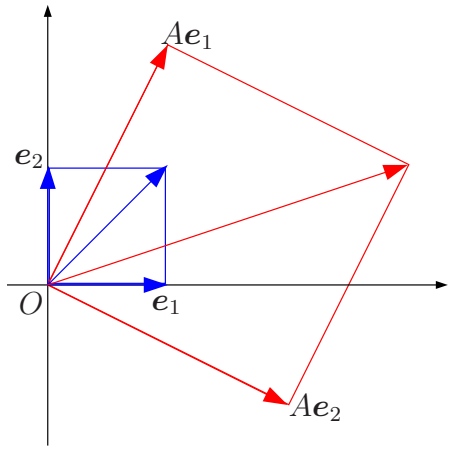
問題 6.

(1) 右図の青で囲まれた領域.

(2) $A(s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2) = sA\boldsymbol{e}_1 + tA\boldsymbol{e}_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
であるから, 一次変換 T_A による像は

$$\left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ : \ 0 \le s, t \le 1 \right\}$$

である. これを図示すると, 右の図の赤で囲まれた領域になる.



問題 7.

(1) z 軸を回転軸とした角度 $\pi/2$ の回転.

(2) ベクトル ${}^t(x, y, z)$ を ${}^t(z, -y, x)$ に写すので, 点 ${}^t(1, 0, 1)$ と原点 O を通る直線を回転軸として角度 π の回転.

(3) ベクトル ${}^t(x, y, z)$ を ${}^t(x, -y, z)$ に写すので, xz 平面に関する鏡映.

(4) z 軸を回転軸とした角度 θ の回転.

問題 8 から**問題 12** の解答は、興味の湧いたひとがたくさんいたときに, つまり, 教員に**各自が考えた解答**を報告にくる学生が多数見受けられたときにある程度の解説文を書きます.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

先週の宿題の略解

宿題 5-1.　原点での 2 次テイラー展開 $\sin x = x + [\,3$ 次以上の項$\,]$, $e^x = 1 + x + [\,2$ 次以上の項$\,]$ を考える．この形から原点での $f(x)$ のテイラー展開は $f(x) = -x^4 + [5$ 次以上の項$\,]$ の形をしている．従ってこの展開において最低次の項が $-x^4$ であるので、$f(x)$ は原点で極大値を持つ．

宿題 5-2.　$f_x = 3x^2 - 6y$, $f_y = -6x + 6y^2$ なので，極値をとり得る可能性のある点は $f_x = 0, f_y = 0$ を解いて $(0,0)$ と $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ のみである．これらが極値を与えるか吟味する．

$$f_{xx}(x,y) = 6x, f_{xy}(x,y) = -6, f_{yy}(x,y) = 12y$$

(1) $(x,y) = (0,0)$ のとき: 判別式の値は -36 となり、 $(0,0)$ は鞍点を与え、極値とならない．

(2) $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ のとき: $f_{xx}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) = 6\sqrt[3]{4} > 0$, $f_{xx}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) f_{yy}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) - f_{xy}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})^2 = 6^2(4-1) > 0$ となり、この点で極小値 $f(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) = -4$ を取る．

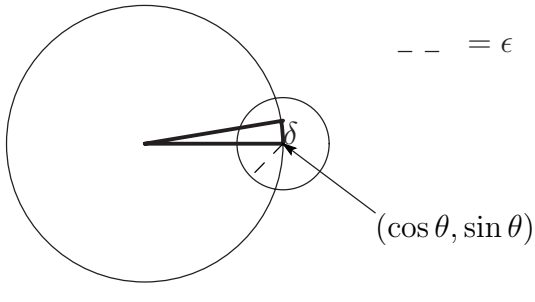
宿題 5-3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

f が微分可能でない点が存在し、それは原点である．値は、$f(0,0) = 1$ となる．

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2$ のとき $f(x,y) - 1 = \sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+y^2} - 2) < 0$ が成立するので、f は原点において極大である．

以下 (x,y) が原点でないときを考える．$f_x = 0, f_y = 0$ となるのは、$x^2 + y^2 = 1$ を満たすときである．このとき $f(x,y) = 0$ となる．$f(x,y) \geq 0$ が常に成立し、(x,y) が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき最小値 0 を取る．**しかし、単位円周上の点** $p_\theta = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in \mathbb{R}$ に対して、どんな小さな $\epsilon > 0$ に対しても $\delta \neq 0$ を非常に微少にとって $p_{\theta+\delta} = (\cos(\theta+\delta), \sin(\theta+\delta))$ が近傍 $B(p_\theta, \epsilon)$ の元となるようにとれる．したがって、$x^2 + y^2 = 1$ を満たす点は、我々の極小値の定義を満たさない．



f のグラフは $g(x) = (x-1)^2, (x \geq 0)$ としたとき, $z = g(x)$ のグラフを z 軸を回転軸として 2π 回転した曲面で与えられる．

(全) 微分可能でない点は、極値の候補!