担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像

作成日：October 11, 2010　Updated：October 13, 2010　Version：1.2

写像

集合 X から集合 Y への対応 f が写像であるとは、X の勝手な元 (もしくは要素)x に対して Y の元が**ただ一つ定まる**対応のことである.[1] 集合 X から集合 Y の対応 f があることを,

$$f : X \to Y$$

と書く.

問題 1. 次の対応は写像であるかどうか吟味せよ. ((2) 以降の Hint:単位円を考えてみよう.)

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f は次を満たす: $f(x) = x^2$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 規則は次を満たす: $f(x)$ は $y^2 = 1 - x^2$ の y について解.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 規則は次を満たす: $f(x)$ は $y^2 = 1 - x^2$ の y について非負数の解.

(4) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, 規則は次を満たす: $f(x)$ は $y^2 = 1 - x^2$ の y についての解.

(5) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, 規則は次を満たす: $f(x)$ は $y^2 = 1 - x^2$ の y について非負数の解.

線形写像

xy 平面を $\mathbb{R}^2$ とあらわすことにする. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき, 写像

$$T_A : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

は「$\mathbb{R}^2$上の**線形写像**である」と言われる. 他の線形写像も様々あり、$\mathbb{R}^n$ 上の線形写像も同じように, $n \times n$ 行列で与えられる. “線形写像” と呼ばれる由縁を、そぞろ見てみよう.

[1] 集合とは、“範囲のはっきりしたものの集まり” のことをいう. 例えば、「十分大きな自然数全体の集まり」は、範囲が明確でないので集合ではない. 一方「自然数全体」は、範囲がはっきりしているので、集合である. A が一つの集合であるとき、A の中に入っている個々の” もの” を A の**元** (または元素, 要素) という. ある” もの”a が A の元であることを $a \in A$ と書く. 集合 A から集合 B への対応 f とは、f はある規則であって A の各元 a に対して B の部分集合 $f(a)$ が定められるときをいう. ($f(a)$ が空集合 $\emptyset$ であってもよい.) $f(a) = \{b\}$ であるとき、単に $f(a) = b$ と書く.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. (線形性) T_A は以下の性質を持つことを示せ：

(L1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$ に対し，$T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{x}')$

(L2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_A(\boldsymbol{x})$

定義 1. V, W を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする (つまり V と W には各々和とスカラー倍が定義されているとする．例えば、V, W の例として $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ などが考えられる.). V から W への写像 $f : V \to W$ が線形写像であるとは, 次の 2 つの条件を満たしているときをいう：

(L1)和を保つ : 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$,
(L2)スカラー倍を保つ : 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a})$.

$W = V$ のとき, すなわち, f が V から V 自身への線形写像であるとき, f を V の線形変換 (一次変換) ともいう.

問題 3. 以下の写像が線形性を満たすか否かを調べよ．もし一次変換ならば，それを与える行列を求めよ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問題 4. f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とする．$\mathbb{R}^n$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ を考える．$f(\mathbf{0})$ を求めよ．

問題 5. 一次変換 f によってベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ はともにベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に写るとする．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の f による像を求めよ．

(2) 直線 $x + 2y = 1$ をパラメーター表示し，f による像を求めよ．

この問題で見たように，2 つの一次独立なベクトルの行き先によって，一次変換は完全に決まる．このため一次変換は一般の写像よりも極めて扱いやすい．なお $\mathbb{R}^n$ では n 個の一次独立なベクトルの行き先を調べる事によって同様のことが成り立つ．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 集合 $\{s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2 : 0 \leq s, t \leq 1\}$ を図示せよ.

(2) (1) で求めた集合の一次変換 T_A による像を求め，図示せよ.

問題 7. 以下の行列が定める一次変換の幾何学的意味を調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

今週の宿題

宿題 6-1. 2×2 行列 A によって定まる一次変換 $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える

(1) $T_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $T_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ となるような A を定めよ.

(2) 直線 $\ell : y = 0$ が T_A により直線 $\ell' : y = -x$ に写るような A をすべて求めよ.

宿題 6-2. 次の方向ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ をもつ**原点を通る直線**をそれぞれ $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{x}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\boldsymbol{x}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $\boldsymbol{x}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

問題 7 の 1 つ目の行列を A とし、2 つ目の行列を B とする. A, B によって定まる $\mathbb{R}^3$ 上の一次変換をそれぞれ T_A, T_B とする.

(1) このとき、原点を通る直線 $\ell_i (i = 1, 2, 3, 4)$ の T_A, T_B による像を求めよ.

(2) 直線 ℓ は方向ベクトルが $\boldsymbol{x}_1$ で点 $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, 0)$ を通るとする. このとき、ℓ は原点を通るかどうか吟味せよ. また、T_A, T_B による像を求めよ.

(3) 平面 π_{12}

$$\pi_{12} := \{\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

の T_A, T_B による像を求めよ.

(4) 平面 π

$$\pi := \{\boldsymbol{e}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

の T_A, T_B による像を求めよ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

お話

以下は、必修課題ではないお話である．次の 6 つの平面の一部

$$\pi_{x,\pm} : x = \pm 1, y, z \in [-1, 1]$$
$$\pi_{y,\pm} : y = \pm 1, z, x \in [-1, 1]$$
$$\pi_{z,\pm} : z = \pm 1, x, y \in [-1, 1]$$

(複合同順) を考える．これら 6 つを合わせると (和集合 (線形部分空間ではない)) 原点 O を中心とする 1 辺の長さが 2 の正 6 面体 $\mathcal{C}(2)$ になる．

問題 8. 像 $T_A(\mathcal{C}(2))$, $T_B(\mathcal{C}(2))$ を求めよ．

２つの一次変換 T, S の合成 $T \circ S$ は再び一次変換である．また、AB によって定まる一次変換 T_{AB} は、一次変換 T_B(先) と T_A(後) との合成 $T_A \circ T_B$ である．そこで、一次変換 T_A, T_B をたくさん合成したもの $T_{A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}B^{j_2}\cdots A^{i_r}B^{j_r}}$ ($i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r$ は非負の整数) を考える．

問題 9. 像 $T_{A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}B^{j_2}\cdots A^{i_r}B^{j_r}}(\mathcal{C}(2))$ を求めよ．また、$\mathcal{C}(2)$ と同様に原点 O を中心とし、原点 O を通る対角線が $\ell_1, \ldots, \ell_4$ の一部になる 1 辺の長さが $k \in \mathbb{R}$ の正 6 面体を $\mathcal{C}(k)$ とするとき像 $T_{A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}B^{j_2}\cdots A^{i_r}B^{j_r}}(\mathcal{C}(k))$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
&G_{(1,1,1,1)} := \{I(3\text{ 次単位行列})\},\\
&G_{(2,1,1)} := \{B, A^2BA^2, A^3BA, ABA^3, BA^2BA, ABA^2B\},\\
&G_{(2,2)} := \{A^2BA^2B(= BA^2BA^2), A^2, BA^2B\},\\
&G_{(3,1)} := \{AB, BA, BA^3, A^3B, A^2BA^3, A^3BA^2, ABA^2, A^2BA\},\\
&G_{(4)} := \{A, ABA, BAB, A^2B, A^3, BA^2\}.
\end{aligned}$$

G を次の和集合とする:

$$G := G_{(1,1,1,1)} \cup G_{(2,1,1)} \cup G_{(2,2)} \cup G_{(3,1)} \cup G_{(4)}. \tag{1}$$

問題 10. 実は勝手な $r, i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r$ に対して $A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}B^{j_2}\cdots A^{i_r}B^{j_r} \in G$ となる．$\{X \in G\}$ よって定まる線形写像 (一次変換) の幾何学的な特性を述べよ．なぜ, G の 24 コだけなのか幾何的な特性からの説明を試みよ．

問題 11. $G_{(2,1,1)}$ の元 X によって定まる 1 次変換 T_X による ℓ_i の像を求めよ．

問題 12. 式 (1) は G は G_λ への共通部分がないように和集合に分けているが, 各々の G_λ にはどのような意味があるか？