担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

2変数関数の極大と極小（略解）

作成日：November 04, 2010　Version：1.1

問題 1. $\sin x$ の $x=0$ での (無限) テイラー展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

と書ける．(これは、各自導けると仮定して話をします.) なので $\sin^2 x = x^2 + (4\text{ 次以上の項})$——$(*)$ となる．勝手な $t \in \mathbb{R}$ において

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$$

と書けるから $(*)$ を代入して $x=0$ での $e^{\sin^2 x}$ の 2 次のテイラー展開は

$$e^{\sin^2 x} = 1 + (x^2 + (4\text{ 次以上の項})) + \frac{1}{2!}(x^2 + (4\text{ 次以上の項}))^2 + \cdots \frac{1}{n!}(x^2 + (4\text{ 次以上の項}))^n + \cdots$$

$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + (\text{上の式の右辺の全ての 4 次以上の項})$$

の形をしている．$(\star)$ 従って $f(x) - f(0) = x^2 + (4\text{ 次以上の項})$ は (最低次数の項 x^2 をみて), $x=0$ の近傍の (非常に近くの) 原点以外の全ての点において正であるから $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる．

別解は $(\star)$ 以下をやめて: テイラー展開の公式と係数を比較して，$f'(0)=0, f''(0)=2>0$ を得る．従って (前回の定理 2 より) 原点で下に凸であるから極小である．

技術的な問題だが, この解答を見て「(4 次以上の項) を何度も解答に書くのは面倒だ」と思う人もいるかも知れない．それを省略して解答は以下のように書き換えることもできる.(但しこの演習では必修とはしない.)

$f(x) = e^{\sin^2 x} = e^{(x+O(x^3))^2} = e^{x^2+O(x^4)} = 1 + x^2 + O(x^4)$．従って $f(x) - f(0) = x^2 + (4\text{ 次以上の項})$ は $x=0$ の近傍の原点以外の全ての点において正であるから $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる．(ここで重要なのは、式変形 $e^{\sin^2 x} = e^{(x+O(x^3))^2}$... 等をしていく際に、冒頭の解答と同様の過程を頭に浮かべながら式変形することである.)

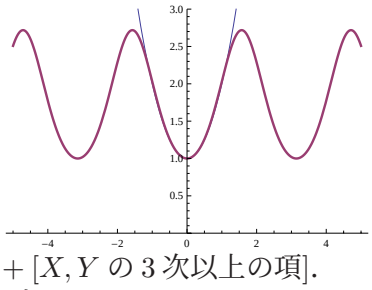
ここで、O の定義は次である:

ランダウ（Landau）の O：　関数 $f(x)$ が $x=a$ の十分近くで

$$|f(x)| \le M\,|(x-a)^p|$$

となる定数 $p \ge 0$, $M > 0$ をもつとき，$f(x) = O((x-a)^p)$ $(x \to a)$ と表す．すなわち $f(x)$ は $(x-a)^p$ と**同程度以上の速さで 0 に近づく．**

$x \to 0$ のとき $f(x)$ のグラフの形は放物線 $1+x^2$ に近づく．これは 1+(正の数) という形をしているから，関数は原点で極小値をもつ．右図は f (**太線**) と $1+x^2$ (細線) のグラフ．



問題 2.　(1) $Z = F(X,Y) = \frac{1}{2}\left(aX^2 + 2bXY + cY^2\right) + [X, Y\text{ の 3 次以上の項}]$.
(2) まず必要条件を見つけよう．$X=Y=0$ でないと仮定する．$Y = 0 \neq X$ のとき，$G(X,Y) = aX^2 > 0 \iff a > 0$. よって $a > 0$ が必要．次に $Y \neq 0$ のとき，$t = X/Y$ とおくと $G(X,Y) = Y^2(at^2 + 2bt + c)$ $(t \in \mathbb{R})$. $a > 0$ および 2 次関数の判別式から，$G(X,Y) > 0 \implies b^2 - ac < 0$. 逆

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

に「$a>0$ かつ $ac-b^2>0$」のとき，$G(X,Y)=a(X+bY/a)^2+(ac-b^2)Y^2/a$ より，$X=Y=0$ でなければ $G(x,y)>0$.

問題 3.

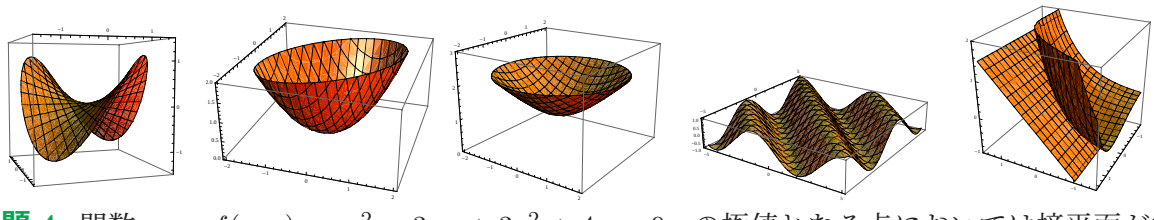
(1) $z=f(x,y)=-xy$ はすでに 2 次テイラー多項式になっている．$a=c=0,\ b=-1$ より $ac-b^2=-1<0$. 「判定法」(3) より，関数 f は原点で**極値をとらない**（鞍点）.

(2) $z=f(x,y)=x^2-xy+y^2$ も 2 次テイラー多項式．$a=c=2,\ b=-1$ より $ac-b^2=3>0$. 「判定法」(1) より，原点で**極小値**をとる.

(3) $z=f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}=1+(x^2+y^2)/2+[4$ 次以上の項$]$．よって 2 次テイラー多項式は $1+(x^2+y^2)/2$，$a=c=1$，$b=0$. $ac-b^2=1>0$ より，原点で**極小値**をとる.

(4) $z=f(x,y)=\cos(x+y)=1-(x+y)^2/2+[4$ 次以上の項$]$．よって 2 次テイラー多項式は $1-(x+y)^2/2$，$a=b=c=-1$．この場合 $ac-b^2=0$ となり「判定法」(4) に相当する．さらに調べてみると，じつは原点で**極値をとらない**ことがわかる．なぜなら，$(x,y)=(t,-t)$ $(t\to 0)$ とすると常に $f(x,y)=\cos 0=1$ (一定) となってしまい，極値の条件「近くで唯一の最大値，最小値」を満たさないのである.

(5) $z=f(x,y)=(x+y^2)e^{x+y}=(x+y^2)(1+(x+y)+[2$ 次以上$])=x+x^2+xy+y^2+[3$ 次以上$]$．よって 2 次テイラー多項式は $x+x^2+xy+y^2$, $a=c=2$，$b=1$. この場合 $ac-b^2>0$ より極小…と言いたくなるが，じつは接平面が $z=x$ となることから**極値ではない**.



問題 4. 関数 $z=f(x,y)=x^2-3xy+3y^2+4x-9y$ の極値となる点においては接平面が定数関数なので，$f_x(x,y)=2x-3y+4=0$ かつ $f_y(x,y)=-3x+6y-9=0$. この連立方程式を解いて $(x,y)=(1,2)$. 次に $f_{xx}(x,y)=2$，$f_{xy}(x,y)=-3, f_{yy}(x,y)=6$ より，「判定法」に $a=2, b=-3, c=6$ を代入して $ac-b^2=3>0$ を得る．すなわち $(1,2)$ において極小値 $f(1,2)=-7$ をとる.（極大値はなし．ちなみにグラフの形は問題 3(2) に似たものとなる．）

問題 5.

$$g_x(a,b):=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h,b)-g(a,b)}{h}, g_y(a,b):=\lim_{k\to 0}\frac{g(a,b+k)-g(a,b)}{k}$$

の定義を思いだす. 関数の定義が原点で場合分けされているので、詳しい吟味が必要である.

(1)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2-6\times 0h^2h^{-2})/h=\lim_{h\to 0}h=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}k=0$$

$g=f_x$ なのだから

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,0+k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-0}{k}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(x,y) が原点でないときの $f_x(x,y)$ を求めることは、$x^2+y^2-6x^2y^2(x^2+y^2)^{-1}$ を見れば分かる．まず原点以外でこの関数の偏導関数を見る．$F(x,y):=x^2+y^2-6x^2y^2(x^2+y^2)^{-1}$ とおく．

$$\frac{\partial}{\partial x}F = 2x - 6y^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{x^2+y^2} \tag{1}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{x^2+y^2} = 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{2x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) - x^2\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2x^3+2xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

なので式 (1) の左辺は $2x-12xy^4(x^2+y^2)^{-2}$ に等しい．同様に y で偏微分したものも考慮に入れると (もしくは $F(x,y)=F(y,x)$ から)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 12\frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 12\frac{x^4y}{(x^2+y^2)^2} \tag{2}$$

を得る．

したがって $k,h\neq 0$ での $f_x(0,k)=2\times 0-12\times 0/k=0$ $f_x(h,0)=2h-0=2h$ となり、同様に他のものも計算し，まとめると $k,h\neq 0$ では

$$f_x(0,k)=0, f_x(h,0)=2h, f_y(0,k)=2k, f_y(h,0)=0$$

となり、これと最初に計算した $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ を使って

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)}{k} = 0,$$

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2$$

を得る．同様に (もしくは対称性から)

$$f_{yx}(0,0)=0, f_{yy}(0,0)=2.$$

(2) この反例は、ペロンという数学者による．以下は Hint: 原点でないときの f, つまり F の 2 階の偏導関数をひとつ計算してみる．

$$F_{xx}(x,y) = 2 - 12\frac{(y^2-3x^2)y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

となる．このとき、たとえば極限 $\lim_{a\to 0}F_{xx}(a,a)$ は何になるか計算してみよ．つまり、f_{xx} の原点での連続性を確かめてみよ．

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} F_{xx}(a,b) = f_{xx}(0,0)?$$

であろうか？このことは、判定法の仮定を満たしているだろうか？興味のある人は、判定法の証明を追ってみるのも良いだろう．

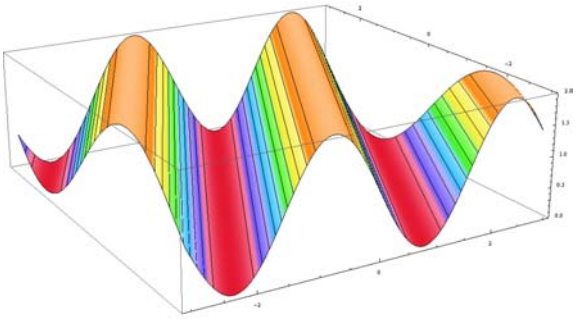
担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

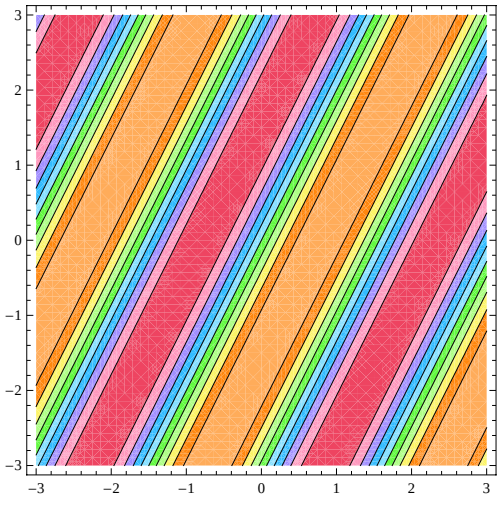
先週の宿題

宿題 4-1. (1) $z = 4x - 9y$. (与えられた f の形がすでに原点おける 2 次テイラー多項式の形をしていることに注意.)
(2)$X = x - 1, Y = y - 1$ とおくと，$f(x,y) = f(X+1, Y+1)$. これを展開して整理すると，$f(x,y) = -4 + 3X - 6Y + X^2 - 3XY + 3Y^2$. 1 次式の部分をとって，接平面の方程式は $z = -4 + 3(x-1) - 6(y-1)$. 2 次のテイラー多項式は $z = -4 + 3(x-1) - 6(y-1) + (x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2$. (実は $f(x,y)$ を変形したもの.)

宿題 4-2. (1) $|t| < 1$ では $1/(1+t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots (-t)^n + \cdots$ より，$t = x^2 + y^2$ とおくと，$x, y \to 0$ のとき $\dfrac{1}{1+(x^2+y^2)} = 1 - (x^2+y^2) + [4$ 次以上の項$]$. よって接平面は $z = 1$ (定数関数)，2 次のテイラー多項式は $1 - x^2 - y^2$.
(2) $f(x,y) = e^2 \cdot e^{(x-1)+(y-1)}$. $X = x - 1, Y = y - 1$ とおき，まずは e^{X+Y} $(X, Y \to 0)$ を計算しよう. $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ $(= 1 + t + t^2/2 + O(t^3))(t \to 0)$ に $t = X + Y$ を代入して $e^{X+Y} = 1 + (X+Y) + (X+Y)^2/2 + [3$ 次以上の項$]$. 1 次式の部分をとって，求める f の接平面は $z = e^2\{1 + (x-1) + (y-1)\}$.
　2 次のテイラー多項式は $z = e^2\big\{1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)^2/2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2/2\big\}$.

宿題 4-3. (1) $t = 2x - y$ とおくと，$t \to 0$ のとき $f(x,y) = 1 + \sin t = 1 + (t + O(t^3)) = 1 + (2x - y) + [3$ 次以上の項$]$. ゆえに求める接平面は $z = 1 + 2x - y$.
(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおき，これらのベクトルのなす角を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ とすると，$F(x,y) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{a}| \cos\theta = \epsilon\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$. 実質変化するのは $-1 \le \cos\theta \le 1$ の部分だけなので，最大値は $\theta = 0$ のとき，最小値は $\theta = \pi$ のときに限って実現される. これは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ が平行なときである.
(3) $f(x,y) \approx 1 + 2x - y = 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. ボールは海抜高度をもっとも「下げる」方向に進む. これは (2) でいうところの最小値を与える向きであるから，ベクトル $(-2, 1)$ の方向に進む.





左は関数 f の 3 次元グラフ. 右は xy 平面を f の等高線で色分けした，まさに地図（地形図）. 中央が原点である. 等高線が密なほど関数が早く変化することから，ボールが転がる方向は直感的に明らかだろう.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

接平面と勾配ベクトル． 一般に，関数 $z = f(x, y)$ の点 (p, q) における接平面は，内積を用いて $z = f(p, q) + \begin{pmatrix} f_x(p, q) \\ f_y(p, q) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - p \\ x - q \end{pmatrix}$ と書ける．このとき，ベクトル $\begin{pmatrix} f_x(p, q) \\ f_y(p, q) \end{pmatrix}$ は (p, q) から見て関数 f の値がもっとも増える方向を向いているので，**勾配ベクトル** (gradient vector) と呼ぶ．

今後の予定

(1) 2010/12/8：中間試験

(2) 2011/1/26：期末試験