担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

2変数関数の接平面とテイラー展開（略解）

作成日：October 15, 2010　Version：1.2

問題 1. (復習：平面の方程式)

(1) $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ が求める平面上の点 $\iff$ $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$ $\iff$ $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$

$$\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

(2) 球面の性質から，求める平面の法線ベクトルは $(1,1,1)$ である．よって上の方程式に当てはめて，$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0 \iff z=3-x-y.$

問題 2. (接平面の方程式)

(1) グラフの平面 $y=b$ による切り口に現れる曲線は $z=f(x,b), y=b$ で与えられる．接線 ℓ_x は平面 $y=b$ を xz 平面と思ったときの，曲線 $z=f(x,b)$ の $x=a$ における接線であるから，方程式として

$$\ell_x:\ z\ =\ f_x(a,b)(x-a)+f(a,b),\quad y=b$$

を得る．方向ベクトルとして $(1,0,f_x(a,b))$ が取れるから，$(a,b,f(a,b))$ を通ることより

パラメーター表示は $\ell_x:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ =\ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix}.\qquad (t\in\mathbb{R})$

(2) (1) で x と y, a と b の役割を入れ替えればよい．

方程式は　$\ell_y:\ z\ =\ f_y(a,b)(y-b)+f(a,b),\quad x=a.$

パラメーター表示は　$\ell_y:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ =\ t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix}.\qquad (t\in\mathbb{R})$

(3) ℓ_x と ℓ_y を同時に含む平面は，これらの直線の方向ベクトルに垂直な法線ベクトルをもつ．そのようなベクトルとして（たとえば外積をもちいて）$(f_x(a,b),f_y(a,b),-1)$ を得る．よって求める平面は

$$\begin{aligned} & f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+(-1)\cdot(z-f(a,b))\ =\ 0 \\ \iff\ & z\ =\ f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b). \end{aligned}$$

問題 3.　(1) $x-2=X$, $y-1=Y$ とおく．$x=X+2$, $y=Y+1$ より，

$$\begin{aligned} f(x,y)\ &=\ (X+2)^2+(Y+1)^2\ =\ 5+4X+2Y+X^2+Y^2 \\ &=\ 5+4(x-2)+2(y-1)+\frac{1}{2!}\{2(x-2)^2+0\cdot(x-2)(y-1)+2(y-1)^2\}. \end{aligned}$$

(2) $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=2y$, $f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=0=f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)=2$ より，簡単に確認できる．

(3) $5+4(x-2)+2(y-1)=f(2,1)+f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)$ が成立しているので，$z=5+4(x-2)+2(y-1)$ が接平面の方程式である．

問題 4.　(1)$e^t=1+t+t^2/2+o(t^2)$ より，$t=x+y$ とすれば $e^{x+y}=1+(x+y)+(x+y)^2/2+$[3 次以上の項]．よって接平面の方程式は（1 次式の部分をとって）$z=1+x+y$，2 次のテイラー多項式は $1+x+y+x^2/2+xy+y^2/2$.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $x-1=X$, $y-1=Y$ と置いて計算すると,
$f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2} = \sqrt{3-(X+1)^2-(Y+1)^2} = \sqrt{1-(2X+2Y+X^2+Y^2)}$.
$\sqrt{1+t}=1+t/2-t^2/8+o(t^2)$ に $t=-(2X+2Y+X^2+Y^2)$ を代入すれば,
$f(x,y)=1-(2X+2Y+X^2+Y^2)/2-(2X+2Y+X^2+Y^2)^2/8+$[3 次以上の項].
これを整理して，接平面の方程式は $z = 1-X-Y=1-(x-1)-(y-1) = 3-x-y$.
2 次のテイラー多項式は $z = 1-X-Y-X^2-XY-Y^2$

$$= 1-(x-1)-(y-1)-(x-1)^2-(x-1)(y-1)-(y-1)^2.$$

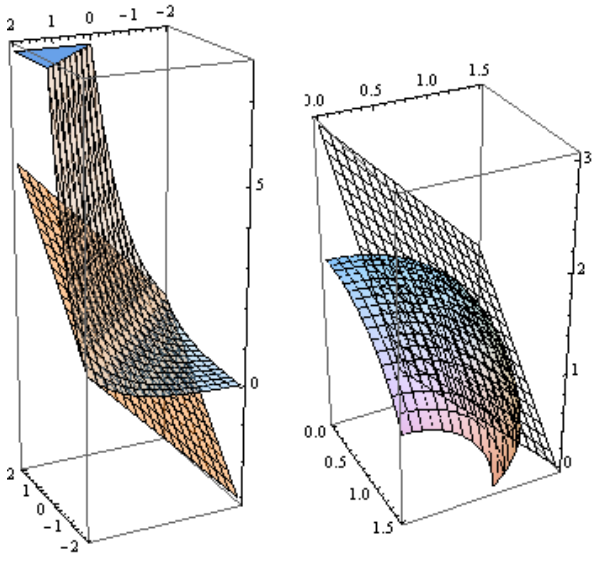

図 1: 問題 4 のグラフの様子.

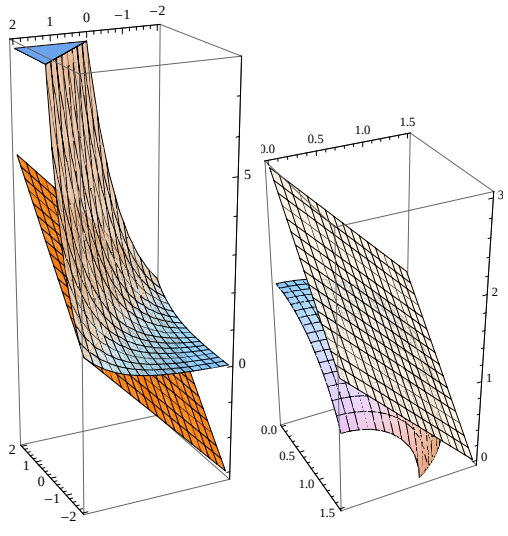

図 2: 問題 4 のグラフ (高画質) の様子.

[1]

[1]図 1,2 において高さの目盛は、図での定義域における上側の曲面の最小値が 0 となるようにとっている.