担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の接平面とテイラー展開

作成日：October 13, 2010　Version：1.4

2 変数関数と接平面の関係を「1 次近似」という観点から理解しましょう．また，2 変数関数で近似したものがテイラー展開（多項式）になることを確認します．**以下であつかう関数はすべて，必要なだけ偏微分できるものとします．**

今後の予定

- 10/27：1 変数関数の凹凸とテイラー展開
- 11/03：文化の日
- 11/10：2 変数関数の極大・極小

平面・接平面の方程式

問題 1.（復習：平面の方程式）

(1) xyz 空間において，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式 $F(x, y, z) = 0$ を求めよ．

(2) 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 上の点 $(1, 1, 1)$ で S に接する平面の方程式を求めよ．

問題 2.（接平面の方程式） 関数 $z = f(x, y)$ のグラフ（曲面）を考える．

(1) グラフの平面 $y = b$ による切り口に現れる曲線の，$x = a$ における接線 ℓ_x の方程式およびパラメーター表示を求めよ．

(2) 同様に，平面 $x = a$ による切り口に現れる曲線の，$y = b$ における接線 ℓ_y の方程式およびパラメーター表示を求めよ．

(3) ℓ_x と ℓ_y を同時に含む平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられることを示せ．また，これが $(x, y) = (a, b)$ における $z = f(x, y)$ の接平面になっていることを納得せよ．

2 変数テイラー多項式

問題 3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y) = C + A(x - 2) + B(y - 1) + \dfrac{1}{2!}\{a(x - 2)^2 + 2b(x - 2)(y - 1) + c(y - 1)^2\}$ となるような定数 A, B, C, a, b, c を求めよ．（Hint: $x - 2 = X$, $y - 1 = Y$ とおく．）

(2) $C = f(2, 1)$，$A = f_x(2, 1)$, $B = f_y(2, 1)$, $a = f_{xx}(2, 1)$，$b = f_{xy}(2, 1)$, $c = f_{yy}(2, 1)$ となることを確かめよ．

(3) $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (2, 1)$ における接平面の方程式は何か？

2 変数テイラー多項式：関数 $z = f(x, y)$ にたいし，

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad \text{（ここまでで 1 次近似：接平面）} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\{f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2\} \end{aligned}$$

を $(x, y) = (a, b)$ における **2 次のテイラー多項式**と呼ぶ．
（**注．**誤差について $f(x, y) - F_2(x, y) = o((x - a)^2 + (y - b)^2)$　$((x, y) \to (a, b))$ が成り立つ．）

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー多項式の計算例. $f(x,y)=1/(1-2x-y)$ の原点における接平面を求めよう．$1/(1-t)=1+t+t^2+o(t^2)$ $(t\to 0)$ に $t=2x+y$ を代入すると，

$$\frac{1}{1-2x-y} = 1+(2x+y)+(2x+y)^2+[3\text{ 次以上の項}] \qquad (x,y\to 0).$$

1 次式の部分 $z=1+2x+y$ が $(x,y)=(0,0)$ における接平面の方程式（1 次テイラー多項式），2 次までの部分が 2 次テイラー多項式を与える．

問題 4. 同様の方法で，次の関数の (a,b) における接平面の方程式および 2 次のテイラー多項式を求めよ．

(1) $z=f(x,y)=e^{x+y}, \quad (a,b)=(0,0)$

(2) $z=f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}, \quad (a,b)=(1,1)$

問題 5. **問題 4** でもとめた 2 次多項式が，枠内のテイラー多項式の公式に合致していることを（偏微分を計算して）確認せよ．

来週予定?

問題 6. $z=f(x,y)=x^2-3xy+3y^2+4x-9y$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y)=(0,0)$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式は何か？（答えのみでよい.）

(2) **問題 3** の計算を真似て，$(x,y)=(1,1)$ における接平面の方程式および 2 次のテイラー多項式を求めよ．

問題 7. 次の関数について，(a,b) における接平面の方程式および 2 次テイラー多項式を求めよ．

(1) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}, \quad (a,b)=(0,0)$

(2) $z=f(x,y)=e^{x+y}, \quad (a,b)=(1,1)$ （Hint: $e^{x+y}=e^2\cdot e^{(x-1)+(y-1)}$ ）

問題 8. **(1 次近似と勾配ベクトル)** xy 平面上にある地図を広げたところ，海抜高度を与える関数がちょうど $z=f(x,y)=1+\sin(2x-y)$ であった．

(1) $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における接平面を与える 1 次関数 $z=F_1(x,y)$ を求めよ．

(2) 平面上の動点 $\mathrm{P}(x,y)$ が原点から一定方向に一定距離 $\epsilon>0$ だけ移動するとき，定数でない 1 次関数 $z=F(x,y)=ax+by$ が最大および最小となるのは，ベクトル (x,y) が (a,b) に平行なときであることを示せ．(Hint: $ax+by$ はこれらのベクトルの内積．これらベクトルの成す角度を考えよ.）

(3) 原点 $(x,y)=(0,0)$ に対応する地点にボールをおいた場合，地図（xy 平面）上でいうとどのベクトルの方向に転がり始めるか？

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

古典: ケプラー

ケプラー (Kepler,1571∼1630) は著作 Mysterium cosmographicum(1596) において次のことを (大変な) 計算でつきとめ、神の計画だと感激している.

> 太陽系を考える. 太陽を中心として地球の軌道を通る球面 E を考える. E に外接する正 12 面体, ついでその外接球面 M をとると, その上に火星軌道が乗っている. 同じ様に外接正多面体と外接球面を考える. M に外接する正 4 面体をとり, その外接球面をとると, その上には木星が乗っている. ついで、外接正 6 面体, その外接球面の上には土星軌道が乗っている.
> さて、外接ではなく内接を考える. E に内接する正 20 面体をとり, その内接球面 V をとるとその上には金星軌道がのっている. さらに V に内接する正 8 面体, その内接球面には水星軌道が乗っている.

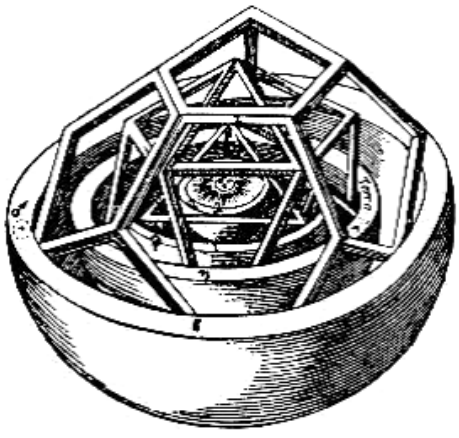

図 1: 太陽近傍

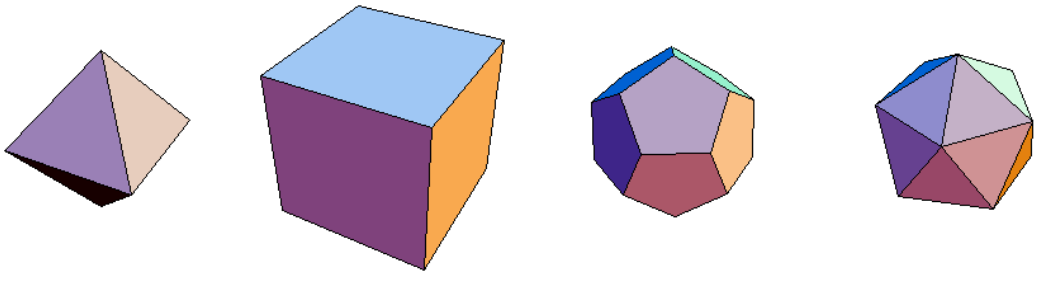

図 2: 正 n 面体, 左から $n = 8, 6, 12, 20$

参考文献： J. Kepler, Mysterium cosmographicum 『宇宙の神秘』　大槻真一郎・岸本良彦共訳, （工作舎　1982 年, 新装版 1986 年, 2009 年）ISBN 978-4-87502-417-0 [1]

[1] 図 2 は Wolfram *Mathematica* ® により作成されたもの. 正 4 面体は易しいので割愛. この 4 面体を合わせ, これら 5 つ をプラトンの正多面体と呼ぶ.