担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開の復習（略解）

作成日：October 12, 2010　Version：1.2

次は、後で習うことだが、参考のため載せておく:

定理 1. (Issac Newton 1665, 一般二項定理) $|z|<1$, α は数とする. [a] このとき、次が成立する:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} z^1 + \binom{\alpha}{2} z^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} z^k + \cdots$$

ここで、

$$\binom{\beta}{k} := \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-k+1)}{k!} \quad (\textbf{一般二項係数}と呼ばれる.).$$

[a] 実は、あとで習うことだが α は複素数でもよい. これまでに知っている 二項定理の自然な拡張ですし、$|z|<1$ 以外何も暗記することがないので、頭にとめておくのは楽だと思う.

宿題 2-1 は、テイラーの定理の証明を参照してください.

宿題 2-2：$|t|<1$ なので等比数列の和の公式か Newton の二項定理を使うと

$$g(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^k + \cdots$$

となり, 2 次のテイラー展開は

$$g(t) = 1 + t + t^2 + o(t^2)$$

となる.

$$f(x) = 1/(1-3x) = 1/(1-3(x+1)+3) = 1/(4-3(x+1)) = (1/4)(1-3(x+1)/4)^{-1} = g(3u/4)/4.$$

g の $t=0$ でのテイラー展開を用いて、

$$f(x) = \frac{1}{4}(1 + (3u/4) + (3u/4)^2 + (3u/4)^3 + \cdots).$$

テイラー展開の表示は 一意的だったので、求めたかった多項式は次になる:

$$F_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2}(x+1) + \frac{3^2}{4^3}(x+1)^2, F_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2}(x+1), F_0(x) = \frac{1}{4}.$$

宿題 2-3：Newton の二項定理より, 次を得る:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{(1/3)}{1!}x^1 + \frac{(1/3)(1/3-1)}{2!}x^2 + \frac{(1/3)(1/3-1)(1/3-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/3)(1/3-1)\cdots(1/3-k+1)}{k!} x^k.$$

なのでほとんど何も計算しなくて良くて,

$$F_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3^2}x^2.$$

$28 = 3^3 + 1$ を使うと,

$$\sqrt[3]{28} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + (1/3^3)}.$$

確かに $|1/3^3| < 1$ が成立するので、$F_2(1/3^3)$ で $\sqrt[3]{1 + (1/3^3)}$ が近似できる.

$$\sqrt[3]{28} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + (1/3^3)} \fallingdotseq 3\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^2}\frac{1}{3^6}\right) = 3 + (3^4 - 1)/3^7 = 3 + (80/2187)$$

これを電卓で計算すると,

$$3 + (80/2187) = 3.036579789666209419295839048925469.$$

関数 $f(x)$ を $x = a$ でテイラー展開したいとしよう. これはつまり、$X := (x - a)$ とおくと、$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ という形に行き着くことが目的だ. テイラー展開の局所的な条件 (x と a は十分近い) から $|x - a| < 1$ となっていることに注意する.
ねらった関数 f がある定数 α, M, N と正の整数定数 k を用いて

$$f(x) = M \cdot (1 + (NX)^k)^\alpha$$

と書き換えることができるときは、二項定理により瞬時に $x = a$ での無限テイラー展開ができることになる.

三町勝久, マクドナルド多項式入門, 代数学百科 I「群論の進化」朝倉書店, ISBN978-4-254-11099-9 では、p.340 に次のように書かれている: 「あまり強調されることがないようであるが、二項定理は数学の基本的な定理の中でも最も重要な定理であるといってもよいものである.」