担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開の復習（略解）

作成日：October 11, 2010　Version：1.1

問題 1.

(1) $X = x - 1$ とおいて $x^3 = (X+1)^3$ を計算すればよい.
答は $f(x) = \underline{1 + 3\cdot(x-1) + 3\cdot(x-1)^2 + 1\cdot(x-1)^3}$. ついでに
$f'(x) = 3 + 6(x-1) + 3(x-1)^2$, $f''(x) = 6 + 6(x-1)$ がわかる.

(2) 接線は一般に $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ の形.
よって $g_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \underline{1 + 3(x-1)}$.

(3) $g_2(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2$ とおくと,
$g_2'(x) = b_1 + 2b_2(x-1)$, $g_2''(x) = 2b_2$. 条件 $g_2(1) = f(1)$, $g_2'(1) = f'(1)$ かつ $g_2''(1) = f''(1)$ より, $g_2(x) = \underline{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2}$.

(4) $(1.02)^3 = f(1.02) = 1 + 3\cdot 0.02 + 3\cdot(0.02)^2 + (0.02)^3$
$= 1 + 0.06 + 0.0012 + 0.000008 = \underline{1.061208}$.
同様にして, $g_1(1.02) = \underline{1.06}$, $g_2(1.02) = \underline{1.0612}$ を得る. 相対誤差は電卓がないと計算が大変だろう. 前者は 0.00113833.. で約 0.1% の誤差. 後者は 7.5×10^{-6} で, わずか 0.00075% 程度の誤差.（これは 1km にたいし 7.5mm 程度の誤差である.）

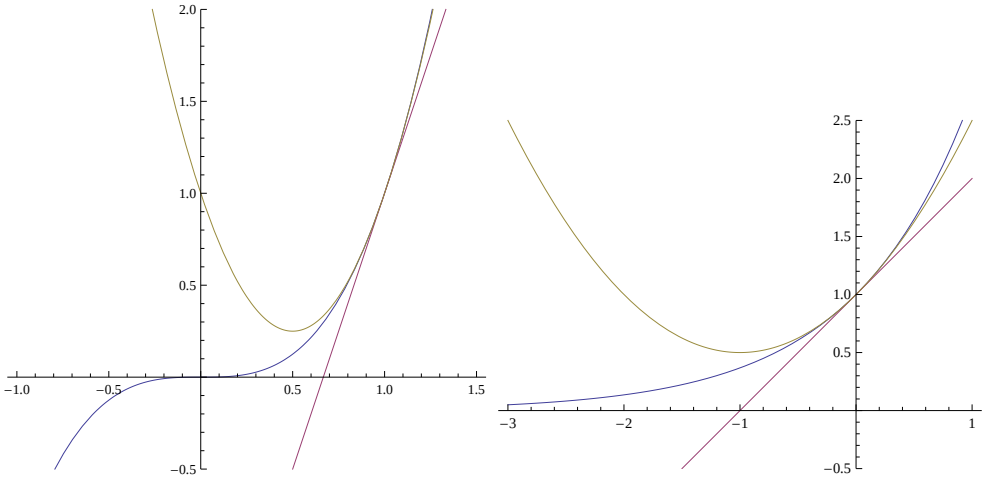

図 1: 問題 1・問題 3 の近似の様子.

問題 2. $F_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$ だから.

問題 3. $f^{(n)}(x) = e^x$ より, $f^{(n)}(0) = 1$. よって, x と 0 の間にある正体不明の数 c（これは x に依存する）が存在して

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

よって $\underline{F_0(x) = 1,\ F_1(x) = 1 + x,\ F_2(x) = 1 + x + x^2/2}$ を得る.
これより $F_0(0.1) = 1$, $F_1(0.1) = 1.1$, $F_2(0.1) = 1.105$. 電卓を用いると, $e^{0.1}$ に関する相

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

対誤差はそれぞれ 0.09516, 0.00468, 0.00015 程度．ただし小数点以下第 6 位を四捨五入してある．

問題 4. $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)$ である．いま c は a と x の間にある数だったから，関数 $f^{(n+1)}(x)$ の連続性より $x \to a$ のとき $f^{(n+1)}(c) \to f^{(n+1)}(a)$．したがって与式は 0 に近づくことがわかる．

コメント：剰余項は，本当に「誤差」として無視できるのか？ということを確認する問題です．$x \to a$ のとき $R_n(x) \to 0$ となることはわかりますが，そのスピードが $F_n(x)$ の項たち $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \to 0$ よりも遅いと，誤差として無視できないことになります．
この問題の結果から，$R_n(x) \to 0$ のスピードは $(x-a)^n \to 0$ よりも早いことがわかり，剰余項は誤差として無視してよい，と結論できるわけです．

問題 5.

(1) $\boldsymbol{p}(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ とすると，その $t = t_0$ における速度ベクトルは

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{p}(t_0+h) - \boldsymbol{p}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} f(t_0+h) - f(t_0) \\ g(t_0+h) - g(t_0) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} f'(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix}}.$$

ただし $f'(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$，$g'(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$ である．

(2) 平均値の定理の設定を曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ $(a \le t \le b)$ に当てはめてみると，ある $t = c \in (a, b)$ が存在して，その瞬間の速度ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(c) = \begin{pmatrix} f'(c) \\ g'(c) \end{pmatrix}$ がベクトル $\boldsymbol{p}(b) - \boldsymbol{p}(a) = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) \end{pmatrix}$ と平行になる，ということを述べている．下の図をみれば，この事実は直感的に理解できるだろう．

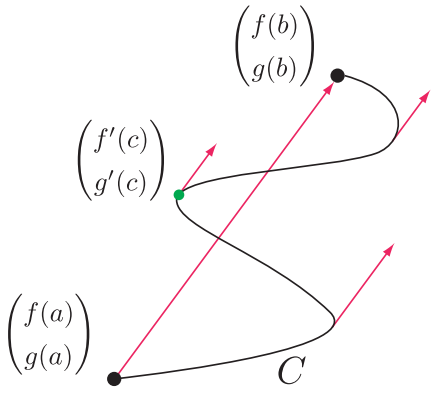

図 2: $g'(t) \neq 0$ より y 座標は単調に変化するが，それは比をとるための便宜的な仮定にすぎない．