担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

実力テスト

作成日：September 14, 2010 Updated：September 14, 2010 Version：1.0　実施日：September 14, 2010

注意

(1) この試験の結果自体をそのまま成績に反映はさせません. こういう言いまわしになったのは、採点の結果誤答が認められた箇所は後日解答を作成し、それを**レポート提出**して頂くからです. 試験の結果とこのレポート提出での正答を成績に反映させます. 例をあげると: 全体を 100 点満点としたとき A さんは 4 問中問題 1, 問題 2 を試験で正答を書きあげた (60 点). 残りのうち問題 3 のみをレポートにて正答を提出した (20 点). A さんの合計の得点は 80 点. 配点は、基本的に問題 1 から 4 の順にそれぞれ 35,25,20,20 点.

(2) 各問につき, 解答用紙を片面 1 ページ分用いて下さい. (全部で 4 問なので, 解答用紙は 2 枚 4 ページ分あります.)

(3) 解答用紙 1 ページ目右上および 3 ページ目右上に自分の名前と学籍番号を書いて下さい.

問題 1. 次の各問いに答えよ。（この問題の解答は答えのみでよい.）

(1) 以下の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 行列

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則かどうかを判定し, 正則ならば, A の逆行列 A^{-1} を求めよ. (解答用紙には, 正則でない場合は「正則でない」と書き, 正則である場合は逆行列 A^{-1} を具体的に書け.)

(3) 2 次元空間において, 行列 $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換による, 直線 $\ell_1 : y = x$ 及び直線 $\ell_2 : y = -x$ の像の方程式をそれぞれ求めよ.

(4) 3 次元空間において, 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ で表される一次変換による, 球面 : $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ の原像の方程式を求めよ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(5) h を正の定数とする. 次の極限値を求めよ (**量子群の挙動**)：

$$\lim_{q\to 1}\frac{q^h-q^{-h}}{q-q^{-1}}.$$

(6) 次の不定積分を計算せよ. (積分定数も明記せよ.)

$$\int(\sin^n x)(\cos x)dx.$$

(7) 次の微分方程式の $y=0$ 以外の解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx}=-y^2(\sin^2 x)(\cos x).$$

問題 2.

(1) 次の連立一次方程式を拡大係数行列の基本変形を用いて解け.

$$\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ x+3y+4z=2 \\ 2x+3y+8z=1 \end{cases}$$

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&a\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ. (a は実定数)

(a) A の逆行列が**存在しない**ための a に対する条件を求めよ.

(b) A の逆行列が存在しないとき, 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ の解をすべて求めよ. (解が 3 次元空間内のある図形上の点全体となるような場合はパラメータを含む形で書き表せ. 解が存在しない場合は「解なし」と答えよ.)

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 複素平面 $\mathbb{C}$ と xy 平面 $\mathbb{R}^2$ を次のように同一視する:

$$\mathbb{C} \ni \ z = x + iy \ \overset{\text{同一視}}{\longleftrightarrow} \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(1) $\alpha = 1 + 2i$, $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とし複素数の掛け算 $w = \alpha z$ を考える. $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ と書いたとき, この掛け算を, z に対する α の作用とみなし, ベクトル (x, y) が (u, v) に写されると考えると, この作用は xy 平面での, ある一次変換を与える. この一次変換を表す行列 A を求めよ.

(2) $z = x + yi$ をその複素共役 $w = \overline{z} = x - yi$ に写す変換は, xy 平面での, ある一次変換を与える. この一次変換を表す行列 B を求めよ.

(3) 円板: $|z - 3| \leq 2$ を変換 $z \longmapsto w = (1 + 2i)\overline{z}$ で写した像の面積を求めよ.

問題 4.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$ を $x = 0$ のまわりで x の 3 次まで有限テーラー展開し, $\dfrac{1}{2 + x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + R_4(x)$ と表す. 展開係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) e が無理数であることを示せ. (以下はヒント: e が有理数だと仮定すると, 互いに素な (正の) 整数 m, n を用いて, $e = \dfrac{m}{n}$ と書ける. 一方, e^x の $x = 0$ における n 次までのテーラー展開は以下のようになる:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

(a) 剰余項 $R_{n+1}(x)$ を, ある $0 < \theta < 1$ を用いて表せ.

(b) 上のテーラー展開において $x = 1$ を代入したものを考える:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1).$$

$n! R_{n+1}(1)$ は正の整数であることを示せ.

(c) $e < 3$ を用いて $n! R_{n+1}(1)$ の上限を評価し, $1 \leq n! R_{n+1}(1)$ と合わせて可能な n の範囲を求めよ. またこれと $2 < e < 3$ を見比べ, 矛盾を導け.)

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

実力テスト

作成日：September 14, 2010　Updated：September 14, 2010　Version：1.0　実施日：September 14, 2010

学生番号 _____ 名前 _____

問題 1.

小問番号	答え
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	
(7)	

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447 E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

実力テスト

作成日：September 14, 2010 Updated：September 14, 2010 Version：1.0 実施日：September 14, 2010

問題 2.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

実力テスト

作成日：September 14, 2010 Updated：September 14, 2010 Version：1.0　実施日：September 14, 2010

学生番号 _____ 名前 _____

問題 3.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447 E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

実力テスト

作成日：September 14, 2010 Updated：September 14, 2010 Version：1.0 実施日：September 14, 2010

問題 4.