本講演では、複素射影空間 $\mathbf{P}^{N-1}$ 内の k 次超曲面 M_N^k の量子コホモロジー環を例にとり、超幾何微分方程式から出発して量子コホモロジー環の構造定数を決定するミラー予想に基づく計算の一般化について述べる。

主結果としては、Givental の一般超幾何微分方程式

$$\Big((\partial_x)^{N-1} - k \cdot e^x \cdot (k\partial_x + k - 1) \cdots (k\partial_x + 1)\Big) w(x) = 0,$$

に付随する Gauss-Manin 系を用いて、量子コホモロジー環を特徴付ける Gromov-Witten 不変量を決定するアルゴリズムを紹介する。特徴としては、上に挙げた微分方程式を解くのではなく、量子コホモロジー環の関係式を非可換化したものだと見なし、微分オペレータのなす代数を用いた考察をすることが挙げられる。本講演では、この考察に基づく具体的な計算例もできるだけ紹介するつもりである。

この結果の応用としては、数え上げ代数幾何学における有理曲線の数え上げという問題に対する非常に簡明な解答が得られるのであるが、その側面についての話も取り上げる。

なお、上に述べたアルゴリズムは超曲面がファノ多様体であるか、カラビ-ヤウ多様体であるか、一般型の多様体であるかによって違いがあるのであるが、前半においてファノ多様体の場合を扱い、後半で残りの場合を扱う。

講演で話す内容の予定

(i) 量子コホモロジー環の定義

(ii) 構造定数の代数幾何学的な導出方法

(iii) Gauss-Manin 系を用いた構造定数の決定

(iv) カラビ-ヤウ超曲面とミラー変換

(v) 一般型の超曲面の場合への拡張

(vi) 有理曲線の数え上げ問題と Gromov-Witten 不変量