Derivations on K3 surfaces in positive characteristic

松本雄也 *

2020 年 08 月 20 日

概要

（第 65 回代数学シンポジウム講演）

標数 $p > 0$ の K3 曲面 X に対して，その上のベクトル場の空間 $H^0(X, \Theta_X)$ は自明になるが，K3 曲面に有理二重点を許す場合はそうとは限らない．非自明なベクトル場が存在する例や，無限小群スキームの作用などとの関係を紹介する．

k を代数閉体とし，X などは k 上の代数多様体とし，代数多様体とは k 上の有限型スキームで整なものとする．

1 節で正標数でのベクトル場や無限小群スキームに関する一般論を述べ，2 節では RDP K3 曲面の場合を紹介する．例は 3 節にまとめた．

1　正標数におけるベクトル場と無限小群スキーム

1.1　導分とベクトル場

Θ_X を $\mathcal{O}_X$ 上の（$\mathcal{O}_X$ 値の）導分（derivation）のなす層とする．すなわち，$\Theta_X = \{D\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \mid D$ は k 加法的で，$D(ab) = D(a)b + aD(b)\}$ である．

$\Theta_X = \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_X \otimes_k (k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_X))$ なので*1，“無限小自己同型” とみなすこともできる．

$H^0(X, \Theta_X)$ の元を X 上の（大域的な）ベクトル場とよぶ*2．$H^0(X, \Theta_X)$ や Θ_X を考察する正標数特有の理由がいくつかある．

- $(\mathcal{O}_X)^D := \{a \in \mathcal{O}_X \mid D(a) = 0\}$ とおくと，これは（標数によらず）部分 k 代数

* 東京理科大学， matsumoto.yuya.m@gmail.com

*1 対応：$D \mapsto (a_0 + a_1\varepsilon \mapsto a_0 + (D(a_0) + a_1)\varepsilon)$.

*2 タイトルは derivations ではなく vector fields にすべきだった気がしてきました．

になる．標数 0 ではほとんどの場合に無限次拡大である．一方標数 $p>0$ では，これは $(\mathcal{O}_X)^{(p)} := \{a^p \mid a \in \mathcal{O}_X\}$ を含み[*3]，商スキーム X^D は X の底位相空間に環の層 $(\mathcal{O}_X)^D$ を乗せたものになる．包含関係 $(\mathcal{O}_X)^{(p)} \subset (\mathcal{O}_X)^D \subset \mathcal{O}_X$ がどちらも真の包含関係の場合，代数多様体の間の非自明な射の列 $X \to X^D \to X^{(p)}$ が得られる．

- 導分の合成は滅多に導分にならないが，導分 D_1, D_2 に対して $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ は導分になる．標数 $p>0$ の場合，これに加えて p 回合成 $D^p := D \circ \cdots \circ D$ も導分になる[*4]．これにより $H^0(X, \Theta_X)$ は下記の p-Lie 環の構造をもつが，この p 乗写像の挙動が X の（正標数特有の）不変量と関係することがある．
- 標数 0 の群スキームは必ず滑らか（とくに被約）になる．一方標数 $p>0$ では被約でない群スキームが豊富に存在する（基本的な例として μ_p, α_p がある）ため，$H^0(X, \Theta_X)$ は $\mathrm{Aut}(X)$ に現れない情報を含みうる．

このほか $H^1(X, \Theta_X), H^2(X, \Theta_X)$ は変形理論との関わりで重要だが，本稿では扱わない．

定義 1.1 (p-Lie 環，p-closed な元)**.** k ベクトル空間 V と双線形写像 $[-,-]\colon V \times V \to V$ が

- $[x, x] = 0$,
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

を満たすとき Lie 環とよぶ．

V が Lie 環で，さらに写像 $-^{[p]}\colon V \to V$ が

- $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$ $(\lambda \in k)$,
- $\mathrm{ad}(x^{[p]}) = \mathrm{ad}(x)^p$（右辺は写像の合成，$\mathrm{ad}(x) = [x, -]$），
- $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum F_p(\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y))y$

を満たすとき，restricted Lie algebra や p-Lie algebra などとよばれる．本稿では短く p-Lie 環とよぶ．最後の条件の右辺の F_p は標数 p のみに依存するある $p-1$ 次の非可換多項式である[*5]．

p-Lie 環 V の元 $v \in V$ は $v^{[p]} = \lambda v$（$\lambda \in k$）を満たすとき p-closed という．

[*3] 証明 : $D(a^p) = pD(a)a^{p-1} = 0$.

[*4] 証明 : 展開 $D^p(ab) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^k(a) D^{p-k}(b)$ において，両端以外の 2 項係数は p で割れる．

[*5] 具体的には，$\mathrm{ad}(x+y)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y)$，$f_i$ は 2 つの変数について $(i, p-1-i)$ 次，としたとき，$F_p = \sum_{i=1}^{p-1} -i^{-1} f_i$ である．これだけ見ると謎の条件だが，例 1.2 から自然に要請される．

例 1.2. 結合的な（単位的と限らず可換と限らない）k 代数には，$[x,y] := xy - yx$ と $x^{[p]} := x^p$ により p-Lie 環の構造が入る．

例えば行列環 $M_n(k)$ はこれにより p-Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ になる．

また k 線形自己準同型の層 $\mathcal{E}nd_k(\mathcal{O}_X)$ も写像の合成から p-Lie 環構造が定まる．部分ベクトル空間 $\Theta_X \subset \mathcal{E}nd_k(\mathcal{O}_X)$ は前述のように演算 $[-,-], -^{[p]}$ で閉じているので，部分 p-Lie 環の構造が入る．

以下では $-^{[p]}$ を単に $-^p$ と表す．

$H^0(X,\Theta_X)$ をいくつか求めてみよう．

例 1.3 (射影空間の場合)**.** $X = \mathbb{P}^n$ で $x_0 : \cdots : x_n$ が $\mathbb{P}^n$ の座標であるとき，k 代数 R に対して関手的な同型 $\mathrm{Aut}(X \otimes R) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(R)$ がとれるので，$H^0(X,\Theta_X) \cong \mathfrak{pgl}_{n+1} = \mathfrak{gl}_{n+1}/kI_{n+1}$ である（行列単位 E_{ij} を $x_i\partial/\partial x_j$ にうつす[*6]）．

例 1.4 (アーベル多様体の場合)**.** A を g 次元アーベル多様体とする．A の（原点を保つと限らない）自己同型群の単位連結成分は A 自身（による平行移動）なので，$H^0(A,\Theta_A) \cong T_0A$（原点での接空間）になる．標数 $p > 0$ のとき，この p-Lie 環の p 乗写像が半単純に作用する部分の次元が A の p-rank に一致する [Mum70, Sections 14–15][*7]．

1.2 無限小群スキームと p-Lie 環

本稿では以下 $\mathrm{char}(k) = p > 0$ を仮定する．

群スキーム G の単位元での接空間 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) := T_0G$ には自然に p-Lie 環の構造が入る．この対応は，高さ 1（底位相空間が 1 点かつ極大イデアルの任意の元が p 乗すると 0）の有限群スキーム G の圏から有限次元 p-Lie 環の圏への圏同値を与え，さらに G の k スキーム X への作用は射 $\mathfrak{g} \to H^0(X,\Theta_X)$ と対応する [DG70, Section II.7]．

そのような群スキームの基本的な例として，$\mu_p := \mathrm{Ker}(F\colon \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{G}_\mathrm{m})$ と $\alpha_p := \mathrm{Ker}(F\colon \mathbb{G}_\mathrm{a} \to \mathbb{G}_\mathrm{a})$ がある（F はフロベニウス射）．これらの Lie 環は次のようになる[*8]．

[*6] $x_i\frac{\partial}{\partial x_j}$ は次数つき環 $B = k[x_0,\ldots,x_n]$ の次数を保つ導分なので，$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\,B$ の導分を誘導し，$\sum x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ は m 次部分に m 倍で作用するので斉次局所化の 0 次部分には 0 で作用する，すなわち $\mathrm{Proj}\,B$ の導分としては 0 である．

[*7] A の p 倍写像の核 $A[p]$ は（被約でない）部分群スキームになり，$A[p]_\mathrm{red}$ の位数はある $0 \le i \le g$ に対する p^i になることが知られている．この i を A の p-rank とよぶ．

[*8] 記号は標準的なものがあるか分からないのでとりあえず $\mathfrak{m}_p$, $\mathfrak{a}_p$ としました．

- μ_p の Lie 環 $\mathfrak{m}_p$ は，$[x,x]=0$, $x^p=x$ を満たす基底 x をもつ．
- α_p の Lie 環 $\mathfrak{a}_p$ は，$[x,x]=0$, $x^p=0$ を満たす基底 x をもつ．

これらの群スキームの作用とベクトル場の対応を具体的に述べる．p-Lie 環の元 v で $v^p=v$（resp. $v^p=0$）を満たすものを multiplicative type（resp. additive type）な元とよぶ．

補題 1.5. k スキーム X への群スキーム μ_p (resp. α_p) の作用は $H^0(X,\Theta_X)$ の multiplicative type (resp. additive type) な元と一対一に対応する．

証明．ベクトル場から作用への対応だけ述べる．なお，μ_p,α_p は位相空間としては 1 点なので，X に関して局所的に考えられる．

群スキーム μ_p は $\operatorname{Spec} k[t]/(t^p-1)$ と群演算 $t\mapsto t\otimes t$ で定義される．multiplicative type な元 $D\in H^0(X,\Theta_X)$ に対し，因数分解 $Z^p-Z=\prod_{i\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(Z-i)$ に注意すると，$\mathcal{O}_X$ は（k ベクトル空間として）固有空間 $(\mathcal{O}_X)_i:=\{a\in\mathcal{O}_X\mid D(a)=ia\}$ $(i\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の直和に分解する．各因子への射影を pr_i と書く．作用は $\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X\otimes k[t]/(t^p-1)\colon a\mapsto\sum_{i=0}^{p-1}\mathrm{pr}_i(a)\otimes t^i$ で与えられる．

群スキーム α_p は $\operatorname{Spec} k[u]/(u^p)$ と群演算 $u\mapsto u\otimes 1+1\otimes u$ で定義される．additive type な元 $D\in H^0(X,\Theta_X)$ に対し，作用は $\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X\otimes k[u]/(u^p)\colon a\mapsto\sum_{i=0}^{p-1}\frac{D^i(a)}{i!}\otimes u^i$ で与えられる． □

補題 1.6. 0 でない有限次元 p-Lie 環は $\mathfrak{m}_p$ または $\mathfrak{a}_p$ を部分 p-Lie 環にもつ．言い換えると，$v^p=v$ または $v^p=0$ を満たす 0 でない元 $v\in V$ が存在する．

証明．（[RS76, Lemma 1 in Section 1] による．）0 でない元 $w\in V$ をとり，$w,w^p,w^{p^2},\ldots$ が生成する k 部分ベクトル空間 W を考えると，W 上では bracket は自明であり，また W は p 乗写像で閉じている．bracket が自明なことから，$W\xrightarrow{[p]}W\to W\otimes_{k,\sigma^{-1}}k$ （σ はフロベニウス写像）は線形写像である．$W\neq 0$ なので固有ベクトル $v\neq 0$ が存在し，$v^p=\lambda v$ を満たす．$\lambda\neq 0$ ならば，c を λ^{-1} の $p-1$ 乗根とすると $(cv)^p=c^pv^p=cv$ となる． □

系 1.7. proper な代数多様体 X に対して，$H^0(X,\Theta_X)\neq 0$ ならば，X は μ_p または α_p の非自明な作用をもつ．

証明．proper なので $H^0(X,\Theta_X)$ は有限次元である． □

本節の最後に，2 次元 p-Lie 環の分類を紹介しておく．

命題 1.8 ([Wan13, Proposition A.3]+ε)**.** 標数 p の代数閉体 k 上の 2 次元 p-Lie 環 V は同型を除き次の 5 種類ある．

- 直和 $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p$.
- 直和 $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p$.
- 直和 $\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_p$.
- 半直積 $\mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p$ （これは作用 $\mathfrak{m}_p \to \mathrm{Der}(\mathfrak{a}_p)\colon x \mapsto \mathrm{id}$（$x$ は補題 1.5 の直前に与えた元）から定まる半直積 p-Lie 環であり，作用 $\mu_p \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \cong \mathrm{Aut}(\alpha_p)$ から定まる半直積群スキーム $\alpha_p \rtimes \mu_p$ の Lie 環でもある）.
- $\mathrm{Lie}((\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}}) : [x, y] = 0, x^p = y, y^p = 0$ なる基底 x, y をもつ．

それぞれ，$\mathfrak{m}_p$（resp. $\mathfrak{a}_p$）に同型な 1 次元部分 p-Lie 環を $p + 1, 1, 0, \infty, 0$ 個（resp. $0, 1, \infty, 1, 1$）個もつ．

ここで $(\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}}$（肩の $^{\mathrm{D}}$ は導分ではなく，可換群スキームの Cartier 双対 $\mathcal{H}om(\alpha_{p^2}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ を表す）は長さ p^2 の群スキームで，その作用は $D^{p^2} = 0$ を満たす導分 D と一対一対応する．

1.3 曲面上のベクトル場

K3 曲面の話に入る前に，曲面上のベクトル場に関する事実（Rudakov–Shafarevich の公式と Katsura–Takeda の公式）を紹介しておく．

滑らかな多様体 X 上のベクトル場 D に対して，$D\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ の像で生成するイデアルの層に対応する閉部分スキームとして D の固定点集合が定義される（D が $G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ に対応する場合は対応する作用の固定点集合に一致する）．これの因子部分を (D) とおき，それ以外の部分を $\langle D \rangle$ とおく．有理型ベクトル場（局所的に有理型関数と導分の積で書けるもの）に自然に拡張される．

有理型ベクトル場 D は $D^p = hD$ を満たす有理型関数 $h \in k(X)$ が存在するとき p-closed という[*9]．このとき（$D \neq 0$ ならば）商写像 $X \to X^D$ は非分離 p 次有限射になる．逆に正規多様体間の非分離 p 次有限射はある p-closed な有理型ベクトル場による商として書ける．

命題 1.9 ([RS76, Corollary 1 to Proposition 3])**.** X が滑らかな多様体で，$D \neq 0$

[*9] p-Lie 環における p-closed の定義とはずれる．ただし X が proper で D が正則なら同値になる．

が p-closed な有理型ベクトル場ならば，その商写像 $\pi\colon X \to X^D$ に対して，$K_X \sim \pi^* K_{X^D} + (p-1)(D)$ が成り立つ（$\sim$ は線形同値）．

これは通常の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 作用と分岐因子に関する等式の類似である．

命題 1.10 ([KT89, Proposition 2.1])**.** X が滑らかな曲面で，$D \neq 0$ が p-closed な有理型ベクトル場ならば，$\deg c_2(X) = \deg\langle D\rangle - K_X \cdot (D) - (D)^2$ が成り立つ．（2 次元なので $\langle D\rangle$ は 0-cycle である．）

2 RDP K3 曲面の場合

K3 曲面とは，proper で滑らかな代数曲面 X で，標準因子 K_X が自明であり，$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たすものである．

K3 曲面上のベクトル場については次の結果が基本的である．なお標数 0 では Hodge 対称性があるので定義から直ちに従うが，正標数では非自明である．

定理 2.1 (Rudakov–Shafarevich [RS76, Theorem 7], Nygaard [Nyg79, Corollary 3.5], Lang–Nygaard [LN80])**.** X が K3 曲面ならば $H^0(X, \Theta_X) = 0$ である．

しかし，“特異点として有理二重点（rational double point, RDP）だけ許した K3 曲面” を考えるとこの限りではない．というわけでまず RDP について簡単に復習する．

2.1 RDP（有理二重点）

RDP についていくつか事実を述べる．

- 2 次元標準特異点でありかつ滑らかでないことと同値である．
- 孤立特異点であり，特異点をブローアップした後の特異点は（有限個の）RDP のみであり，これを有限回行うことで滑らかになり最小特異点解消が得られる．
- 最小特異点解消の例外因子の既約成分はすべて自己交点数 -2 の滑らかな有理曲線であり，双対グラフは A_n, D_n, E_n 型の Dynkin 図形になる．特異点のことも A_n, D_n, E_n 型とよぶ．
- 標数 0 または ≥ 7 の場合，双対グラフから特異点（の完備化）の同型類が一意に定まる．標数 $2, 3, 5$ ではこれが成り立たないことがあるが，同型類は Artin [Art77] により分類されており，標数と Dynkin 図形ごとに有限個である．第 2 の添字 r を

用いた記法 D_n^r, E_n^r が用いられている．

- 標数 0 では，SL_2 の有限部分群の作用による $\operatorname{Spec} k[[x,y]]$ の商として書くことができ，逆にそのような商特異点は有理二重点である．標数 ≥ 7 では,「有限部分群」を「線形簡約な有限部分群スキーム」と言い換えれば同じことが成り立つ．標数 $2,3,5$ ではこれは成り立たない．

定義 2.2 (RDP K3 曲面)**.** 曲面 X が RDP K3 曲面であるとは，特異点がすべて RDP であり，最小特異点解消 $\tilde{X}$ が K3 曲面であることをいう．（したがって，滑らかな K3 曲面も RDP K3 曲面である．）

RDP K3 曲面およびその上のベクトル場を考える一つの理由として，標数 0 の K3 曲面が標数 p で良い還元をもち，かつ標数 0 側で $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用をもつとき，標数 p 側に RDP K3 曲面上の $G \in \{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mu_p, \alpha_p\}$ の作用が誘導されるという事実がある．このことについては 2019 年 9 月の日本数学会での講演*10で述べたので，本稿ではこれ以上触れないことにする．

2.2 RDP K3 曲面上のベクトル場

さて，$H^0(X, \Theta_X) \neq 0$ なる RDP K3 曲面 X を考える．系 1.7 より X は μ_p または α_p の作用をもつので，まずこれらの作用について考えよう．

どの標数 p で μ_p, α_p 作用をもつ RDP K3 曲面が存在するかについては，次の結果がある．

命題 2.3 ([Mat20a, Theorems 7.1 and 8.2], [Mat20b, Theorem 4.6])**.**

(1) X が標数 p の RDP K3 曲面で，非自明な μ_p（resp. α_p）作用をもつならば，$p \leq 19$ である．逆に（resp. 逆ではないが），k が標数 $p \leq 19$（resp. $p \leq 11$）の代数閉体ならば，k 上の RDP K3 曲面で非自明な μ_p（resp. α_p）作用をもつものが存在する．

(2) X が標数 p の RDP K3 曲面で，非自明な μ_p（resp. α_p）作用で商も RDP K3 曲面であるものをもつならば，$p \leq 7$（resp. $p \leq 5$）である．逆に，k が標数 $p \leq 7$（resp. $p \leq 5$）の代数閉体ならば，k 上の RDP K3 曲面で非自明な μ_p（resp. α_p）作用をもち商も K3 曲面であるものが存在する．

注 2.4. α_p 作用が $p = 13, 17, 19$ の場合に存在するかどうかは未解決である（私は否定的

*10 `http://yuyamatsumoto.com/k3kanazawa.pdf`

にみている)．どなたか解けたら教えてください．

証明. 存在する方の主張については例を 1 つずつ挙げれば足りる．3 節にいくつか載せた．逆を示す．

(1) X が $G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ の作用をもつならば，定理 2.1 より RDP が 1 つ以上存在する．さらに，RDP x が G 作用の固定点である場合[*11]はブローアップ $\mathrm{Bl}_x X$ に G 作用が伸びるので，これを繰り返して，G 作用で固定されていない RDP が存在するとしてよい．そのような RDP は $k[[x,y,z]]/(F(x,y,z^p))$ の形をしていることが示せる．この形の RDP は，$p \neq 2,3,5$ ならば A_{mp-1} 型しかないことが分かる．もし $p \geq 23$ だと，この RDP の解消の例外因子が $\mathrm{Pic}(\tilde{X})$ の階数 22 以上の負定値部分格子を生成するが，K3 曲面の Picard 格子は階数 22 以下かつ不定値であることに矛盾する．したがって $p \leq 19$ である．

(2) (1) と同様に，G の固定点はすべて滑らかな点としてよい．滑らかな点の G 商として書ける RDP を分類することができ，$G = \alpha_p$ ならば $p \geq 7$ では存在しないことが分かる．$G = \mu_p$ ならば A_{p-1} のみである．$\tilde{X} \to X$ を最小特異点解消とし，有理型（すなわち，極を許した）ベクトル場 $\tilde{D}$ を D の延長とすると，Katsura–Takeda の公式（1.10）から $\deg c_2(\tilde{X}) = \deg\langle \tilde{D} \rangle - K_{\tilde{X}} \cdot (\tilde{D}) - (\tilde{D})^2$ が分かる．固定点に由来する部分と固定点でない RDP に由来する部分を計算することで，商特異点の個数が $24/(p+1)$ 個であることが分かる．これが整数で，かつその $p-1$ 倍が（(1) と同様の議論で）22 未満であることから，$p \in \{2,3,5,7,11\}$ が従う．もう少し議論すると $p \neq 11$ が示せる[*12]． $\square$

μ_p, α_p 作用による商がどのような曲面になるかは，ある程度分類・判定できる．

命題 2.5 ([Mat20a, Theorem 1.1], [Mat20b, Proposition 4.1])**.** X は標数 p の RDP K3 曲面で，$G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ が非自明に作用しているとする．

(1) X/G は RDP K3 曲面，RDP Enriques 曲面，（特異かもしれない）有理曲面のいずれかである．
(2) X/G が RDP Enriques 曲面であることは G 作用が固定点をもたないことと同値である．また，X/G が RDP K3 曲面ならば G 作用の固定点は有限個だが，逆は成り立たない．
(3) X/G が RDP Enriques 曲面ならば $p = 2$ である．

[*11] $G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ に対し，x が G 作用の固定点であることは，対応するベクトル場 D が $D(\mathcal{O}_{X,x}) \subset \mathfrak{m}_x$ を満たすことと同値である．

[*12] 原稿を書いていて別証明に気づきました．命題 2.6 を用いると X は高さ有限なので，「22 未満」は「20 未満」に強めることができ，すると $24(p-1)/(p+1) < 20$ から $p < 11$ を得る．

(4) $G = \mu_p$ の場合には，次の判定法が存在する．作用に対応する（multiplicative type な）ベクトル場 D は Ω^2_X にも作用し，1 次元空間 $H^0(X^{\mathrm{sm}}, \Omega^2_X)$ にも作用する．（$D^p = D$ よりこの作用はある $i \in \mathbb{F}_p$ に対する i 倍であるが，）この作用が 0 であることと X/G が RDP K3 曲面であることと同値である．

(4) の条件（$H^0(\Omega^2_X)$ に自明に作用する）を満たす μ_p 作用を symplectic であるという．(4) の主張は，位数が標数と素な有限群の K3 曲面への作用について，商が RDP K3 曲面であることと群の作用が symplectic であることが同値である，という Nikulin の結果 [Nik79, Sections 4–5] の類似である．

証明．(1) D は正則で $K_X = 0$ なので，Rudakov–Shafarevich の公式（命題 1.9）より $K_{\widetilde{X/G}}$ の正整数倍が anti-effective であることが分かり，また，$K_{\widetilde{X/G}} \equiv 0$ と，$(D) = 0$ かつ $\mathrm{Sing}(X/G)$ が高々 RDP であることが同値になる．Betti 数や Hodge 数の議論を用いていくつかの可能性（アーベル曲面，超楕円曲面，有理でない線織曲面）を排除できる．

(2) 商が RDP K3 曲面の場合については既に示した．前半の同値については，Katsura–Takeda の公式を用いた計算から示せる．

(4) 作用が symplectic ならば $(D) = 0$ かつ $\mathrm{Sing}(X/G)$ が RDP のみからなることが示せる．$\mathrm{Sing}(X) \cup \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X/G))$ の補集合を X' とおくと，自然な同型 $H^0(X', \Omega^2_X)^D \cong H^0(X'/G, \Omega^2_{X/G})$ が存在し，とくに右辺が非 0 なことと symplectic なことが同値である．

(3) (4) の証明で用いたものと同様の同型 $H^0(X', (\Omega^2_X)^{\otimes p})^D \cong H^0(X'/G, (\Omega^2_{X/G})^{\otimes p})$ があり，左辺の D の作用は自明なので，$K_{X/G}$ の位数は p を割り切ることが分かる．$p \geq 3$ ならば Enriques 曲面の標準因子の位数は 2 なので矛盾する． □

次に高さとの関係について述べる．正標数の K3 曲面 X に対し高さとよばれる不変量 $\mathrm{ht}(X) \in \{1, 2, \ldots, 10\} \cup \{\infty\}$ が定義される[*13]．いくつか同値な特徴づけがある：

- X の形式 Brauer 群の（形式群としての）高さ．（参考：楕円曲線 E の定める形式群の高さは，ordinary ならば 1，supersingular ならば 2 である．）
- Witt ベクトル値コホモロジー $H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X))$ へのフロベニウス作用が非 0 になる最小の自然数 n（存在しなければ $\mathrm{ht}(X) = \infty$）.
- クリスタリンコホモロジー $H^2_{\mathrm{crys}}(X/W(k))$ の slope は，ある正整数 h を用いて $1 - 1/h$（重複度 h），1（重複度 $22 - 2h$），$1 + 1/h$（重複度 h）と表されるか，または 1（重複度 22）であり，前者のとき $\mathrm{ht}(X) = h$ で後者のとき $\mathrm{ht}(X) = \infty$.（参

*13 この高さは無限小群スキームの高さとはとりあえず関係ない．

考：アーベル多様体 A の p-rank は，$H^1_{\mathrm{crys}}(A/W(k))$ の slope 0 の重複度に一致する．）

μ_p, α_p 作用と高さとの関係については次が分かる．

命題 2.6 ([Mat19b, Theorem 6.6, Corollary 6.9])**.** X は標数 p の RDP K3 曲面で，$G \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ が非自明に作用しているとする．このとき，X/G が RDP K3 曲面であることと，X が高さ有限であることは同値である．さらに高さ有限のときは，$X/G \to X^{(p)}$ も $G' \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ の（非自明な）作用による商であることが証明でき，

$$\mathrm{ht}(X) = \mathrm{ht}(X/G) = 1 + \left(\begin{cases} 0 & (G = \mu_p), \\ 1+\beta & (G = \alpha_p) \end{cases}\right) + \left(\begin{cases} 0 & (G' = \mu_p), \\ 1+\beta' & (G' = \alpha_p) \end{cases}\right)$$

が成り立つ．ただし β (resp. β') $\in \{0,1,2\}$ は X/G の（resp. $(X/G)/G'$ の，すなわち X の）“本質的な” 特異点によって決まり，generic な場合には 0 であり，$p > 2$ なら常に 0 である．

この命題は例 1.4 の最後の主張の類似といえなくもないが，適用範囲は限られる（ほとんどの RDP K3 曲面はそもそも非自明な μ_p, α_p 作用を一切もたない）．

証明．X/G が有理曲面または RDP Enriques 曲面の場合，$H^2_{\text{ét}}(X/G, \mathbb{Q}_l)$（$l$ は p と異なる素数）は代数的サイクル（因子）で生成され，$X \to X/G$ が純非分離なので $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l)$ もそうで，したがって $H^2_{\text{ét}}(\tilde{X}, \mathbb{Q}_l)$ もそうである．このことから高さ無限が導かれる．

以下 X/G が RDP K3 曲面だとする．$X/G \to X^{(p)}$ はある有理型ベクトル場 D' による商として書けるが，$(D') \sim 0$ が示せる．したがって有理関数倍で置き換えて D' は正則かつ $(D') = 0$ としてよく，定数倍で置き換えて $D'^p = D'$ または $D'^p = 0$ としてよい．すなわち $G' \in \{\mu_p, \alpha_p\}$ による商である．

K3 曲面の高さの一般化として，RDP K3 曲面間の射 $f\colon X \to Y$ に対しその高さ $\mathrm{ht}(f)$ を，$f^*\colon H^2(Y, W_n(\mathcal{O}_Y)) \to H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X))$ が非 0 になる最小の自然数 n（存在しなければ $\mathrm{ht}(f) = \infty$）と定める．すると双有理射の高さは 1 であり，$\mathrm{ht}(f' \circ f) = \mathrm{ht}(f') + \mathrm{ht}(f) - 1$ であり，また K3 曲面の高さはフロベニウス写像の高さに他ならない．したがって $\mathrm{ht}(X), \mathrm{ht}(X/G)$ の計算は $\mathrm{ht}(\pi), \mathrm{ht}(\pi')$ の計算に帰着された．

さらに，（今までと同様に）$\mathrm{Sing}(X) \cap \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X/G)) = \emptyset$ と仮定してよい．命題の主張で “本質的な” 特異点といったのはこの仮定下の特異点 $y = \pi(x) \in \mathrm{Sing}(X/G)$ であり，局所環の拡大 $\mathcal{O}_{X,x} \supset \mathcal{O}_{Y,y}$ から $\mathrm{ht}(\pi)$ が（なぜか）決定できる．計算は省略する． □

2.3　標数 2 の Enriques 曲面とその K3-like 被覆

RDP K3 曲面およびその上のベクトル場についての研究は多くなかったが，標数 2 の Enriques 曲面とその K3-like 被覆については例外である．

定義 2.7 (Enriques 曲面)**.** proper で滑らかな曲面 Y で $b_2(Y) = 10$, $K_Y \equiv 0$（数値的同値）を満たすものを Enriques 曲面という．

命題 2.8 ([BM76, Section 3])**.** Y を標数 $p \geq 0$ の Enriques 曲面とする．次のうちちょうど 1 つが成り立つ．標数 2 の場合については以下のように名前がついている．

($p \neq 2$)　$p \neq 2$, $K_Y \not\sim 0$, $2K_Y \sim 0$, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 0$ であり，K_Y の定める $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 被覆 X は K3 曲面である．

(classical)　$p = 2$, $K_Y \not\sim 0$, $2K_Y \sim 0$, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 0$ であり，K_Y の定める μ_2 被覆 X は K3-like 曲面である．

(singular)　$p = 2$, $K_Y \sim 0$, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 1$ であり，$H^1(\mathcal{O}_Y)$ へのフロベニウス作用は非 0 であり，非自明な拡大 $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$（$k^*$ を除き一意に定まる）が定める $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 被覆 X は K3 曲面である．

(supersingular)　$p = 2$, $K_Y \sim 0$, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 1$ であり，$H^1(\mathcal{O}_Y)$ へのフロベニウス作用は 0 であり，非自明な拡大 $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$（$k^*$ を除き一意に定まる）が定める α_2 被覆 X は K3-like 曲面である．

この X を Y の K3-like 被覆とよぶことにする．

定義 2.9 (K3-like 曲面)**.** proper で Gorenstein な曲面 X で，dualizing sheaf ω_X が $\mathcal{O}_X$ に同型かつ，$h^i(\mathcal{O}_X) := \dim H^i(X, \mathcal{O}_X) = 1, 0, 1$（$i = 0, 1, 2$）が成り立つものを K3-like 曲面という．

典型例として，RDP K3 曲面は K3-like 曲面だが，単連結な（すなわち classical または supersingular な）Enriques 曲面の K3-like 被覆は RDP K3 曲面になるとは限らない（例えば正規にならない場合がある）．それはさておき，RDP K3 曲面になる場合の特異点配置の候補は [EHSB12, Corollary 6.16] で 8 通りに絞られており，いくつかは例が知られていた（例えば $8A_1 + D_4^0$ の例が [Kon18] で挙げられており，またいくつかは [Sch19] の方法で構成できるはず）．これを精密化し，p-Lie 環 $H^0(X, \Theta_X)$ との関連も与えた：

命題 2.10 ([Mat19a, Theorem 1.2])**.** 標数 2 の RDP K3 曲面 X がある単連結な Enriques 曲面 Y の K3-like 被覆だとする．このとき，Θ_X は階数 2 の自由層であり，$\mathfrak{g}_X = H^0(X, \Theta_X)$ の任意の元は p-closed であり，それらは有限個（k^* 倍を除いて数える）を除き固定点をもたず，したがって商は Enriques 曲面になる．さらに，次のうちちょうど 1 つが成り立つ．

(1) $\mathrm{Sing}(X) = 12A_1$，$\mathfrak{g}_X \cong \mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p$ であり，Enriques 商のうちちょうど 1 つが supersingular で残りはすべて classical である．
(2) $\mathrm{Sing}(X)$ は $8A_1 + D_4^0, 6A_1 + D_6^0, 5A_1 + E_7^0$ のいずれかであり，$\mathfrak{g}_X \cong \mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p$ であり，Enriques 商はすべて classical である．
(3) $\mathrm{Sing}(X)$ は $3D_4^0, D_4^0 + D_8^0, D_4^0 + E_8^0, D_{12}^0$ のいずれかであり，$\mathfrak{g}_X \cong \mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_p$ であり，Enriques 商はすべて supersingular である．

逆に，この 8 通りの $\mathrm{Sing}(X)$ はすべて実現される．

証明.（[EHSB12, Sections 3 and 7], [Sch19, Sections 2–6] も参考にした．）まず仮定より固定点をもたない $D_1 \in \mathfrak{g}_X$ が存在する．このことから Θ_X が RDP も含めて局所自由層であることが従う．$\Theta_X/\mathcal{O}_X D =: L$ は可逆層であり，$\det(\Theta_X)$ が X^{sm} 上では $\mathcal{O}_X(-K_X) \cong \mathcal{O}_X$ に同型なことから $L \cong \mathcal{O}_X$ である．$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ より Θ_X は自由である．とくに，大域切断で生成される．あとは 8 通りの $\mathrm{Sing}(X)$ ごとに p-Lie 環 $\mathfrak{g}_X$ の構造を決定すればよい．

(3) の場合，X の α_2 被覆の 1 次元族 $(Z_e)_{e \in \mathbb{P}^1}$ を構成し，ほとんどすべての $e \in \mathbb{P}^1$ に対して Z_e が Enriques 曲面であることを示す．するとそれらは supersingular な Enriques 曲面であることが分かり，$Z_e^{(2)}$ は X の α_2 商であることも分かる．すなわち $\mathfrak{g}_X$ のほとんどすべての元は additive type であることが分かり，2 次元 p-Lie 環の分類（命題 1.8）から $\mathfrak{g}_X \cong \mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_p$ である．

(1),(2) の場合，各 $x \in X$ に対し $\mathfrak{l}_x := \{D \in \mathfrak{g}_X \mid x \in \mathrm{Fix}(D)\} \subset V$ は部分 p-Lie 環で，Θ_X が $\mathfrak{g}_X$ で生成されていることに注意すると，$x \in X^{\mathrm{sm}}$ ならば $\mathfrak{l}_x = 0$ である．一方 $x \in \mathrm{Sing}(X)$ ならば $\Theta_{X,x}$ の具体的表示から $\dim \mathfrak{l}_x \geq 1$ が分かり，$D_1 \notin \mathfrak{l}_x$ とあわせて $\dim \mathfrak{l}_x = 1$ である．よって $\mathfrak{l}_x$ の元は p-closed である．$\mathfrak{l}_x \setminus \{0\} \ni D_x$ を 1 つとり $D_x^2 = \lambda_x D_x$ とおくと，x が A_1 ならば $\lambda_x \neq 0$ であることが示せて，定数倍が multiplicative type であり，また x が A_1 以外ならば $\lambda_x = 0$ である（additive type である）ことが示せる．以上より，p-closed な $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_X)$ の元 $\mathfrak{l}_1 := \langle D_1 \rangle$ および $\mathfrak{l}_x$（$x \in \mathrm{Sing}(X)$）を得た（ただし $\mathfrak{l}_x$ が $x \in \mathrm{Sing}(X)$ ごとに異なるとは限らない）．

(2) の場合，multiplicative type かつ固定点をもつ元が少なくとも 1 つ，additive type かつ固定点をもつ元がちょうど 1 つ，p-closed かつ固定点をもたない元が少なくとも 1 つある（k^* 倍を除いて数える）．1 つずつとるとどの 2 つも相異なる．2 次元 p-Lie 環の分類（命題 1.8）から $\mathfrak{g}_X \cong \mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p$ が従う．$\mathfrak{a}_p$ に同型な 1 次元部分 p-Lie 群はちょうど 1 つありそれは上述の固定点をもつ元なので，supersingular な Enriques 商は存在しない．(1) の場合も，p-closed な元をもう少し集めることで同様の議論ができる． □

2.4 RDP K3 曲面上の foliation

一旦 X は任意の代数多様体とする．X 上の（大域）ベクトル場とは $H^0(X, \Theta_X)$ の元 D であり，これは（0 を除き）（$H^0(X, \Theta_X)^*$ 倍を除き）Θ_X の階数 1 自由部分加群 $\mathcal{O}_X D$ と同一視できる．

一方で，X 上の foliation とは，部分 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F} \subset \Theta_X$ であって，saturated（$\Theta_X/\mathcal{F}$ が torsion-free）かつ，$[-,-]$ および $-^p$ で閉じているものをさす[*14]．

$\mathcal{O}_X D$ が foliation になることは D が（導分の意味で）p-closed かつ $(D) = 0$ を満たすことと同値である．$(D) \neq 0$ の場合も $\mathcal{O}_X D$ の saturation を考えれば foliation になる．

X 上の foliation $\mathcal{F}$ に対しても，ベクトル場の場合と同様に商が定義できる：

$$\mathcal{O}_X^{\mathcal{F}} := \{a \in \mathcal{O}_X \mid D(a) = 0 \ (\forall D \in \mathcal{F})\}.$$

このとき $X \to X^{\mathcal{F}} \to X^{(p)}$ という純非分離射の列ができる．逆に $X \to Y \to X^{(p)}$ という列に対して

$$\mathcal{F} := \{D \in \Theta_X \mid D(a) = 0 \ (\forall a \in \mathcal{O}_Y)\}$$

により foliation を対応させることができ，X と Y に正規を課せば一対一対応になる（関数体についての同様の主張 [Jac37, Theorem 12] から従う）．

RDP K3 曲面間の p 次非分離有限射はこの形になり，一応分類できる．

命題 2.11 ([Mat20b, Theorem 5.1])**.** $\pi\colon X \to Y$ を RDP K3 曲面の間の p 次の純非分離な射とし，$\mathcal{F} \subset \Theta_X$ を対応する階数 1 の foliation とする．$\mathcal{F} \otimes k(X)$ の（すなわち，極を許した）任意の大域切断 $D \neq 0$ に対して，$\mathrm{Pic}(X^{\mathrm{sm}})$ で (D) は有限位数であり，位数 r は $p-1$ を割り切り，かつ $r \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ である．この元に対応する X^{sm} の r 次不分岐巡回被覆 $\phi\colon \overline{X^{\mathrm{sm}}} \to X^{\mathrm{sm}}$ をとり X の整閉包を $\overline{X}$ とおく．すると $\pi\colon \overline{X} \to \overline{Y}$ は

[*14] X が滑らかでないときにこれが正しい定義なのか分かりませんが，とりあえずこうしておきます．

1 つのベクトル場 $\overline{D} \in H^0(\overline{X}, \Theta_{\overline{X}})$ で与えられる射であり，$\overline{X}, \overline{Y}$ はともにアーベル曲面であるかともに RDP K3 曲面であるかのいずれかである．

さらに，可能な (p, r) の組を（アーベル・K3（μ_p）・K3（α_p）のそれぞれの場合で）分類した．

証明．$K_X = 0$, $K_Y = 0$ なので，Rudakov–Shafarevich 公式から $(p-1)(D) \sim 0$ すなわち $r \mid (p-1)$ を得る．$\overline{X^{\mathrm{sm}}} \to X^{\mathrm{sm}}$ が不分岐被覆なので，$\overline{X}$ はアーベル曲面または K3 曲面である．$\overline{X}$ が K3 曲面の場合，命題 2.3 から直ちに $r \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ が従う．$\overline{X}$ がアーベル曲面の場合，原点を固定し $H^0(\overline{X}, \Omega^2_{\overline{X}})$ に自明に作用し位数が有限かつ標数と素な自己同型の位数が調べられており（[Kat87, Theorem 3.7, Lemma 6.3]），$r \mid (p-1)$ という仮定の下では $r \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ が従う． □

例 3.7 で $\overline{X}$ がアーベル曲面になる例を挙げる．

2.5 Θ_X はどこまで大域切断で生成されるか？

もう少し一般に，RDP K3 曲面に対して，

- 標数 p,
- $\mathfrak{g}_X := H^0(X, \Theta_X)$ の p-Lie 環としての構造，
- Θ_X のうち大域切断で生成される部分の階数，
- $\mathfrak{g}_X$ の各 1 次元 p-Lie 環による X の商（K3 か Enriques か有理曲面か），

の組み合わせとして何が実現できるか？ という（欲張った）問題を考えることができます．この問題はこの原稿を書き始めてから思いついたので，確たる結論はまだ得ていませんが，とりあえず分かっていることだけ書いておきます．どなたか解決してくれると嬉しいですね．……と書いていたのですが，原稿を書いている間に高さ有限の場合は概ね解決してしまいました．

なお，$\mathfrak{g}_X$ の部分 p-Lie 環 $\mathfrak{h}$ の生成する foliation による商を $X^{\mathfrak{h}}$ と書く．$\mathfrak{h}$ が 1 次元の場合は対応する群スキーム（μ_p または α_p）による商ともちろん一致する．

命題 2.12. X が高さ有限の RDP K3 曲面のとき，p-Lie 環 $\mathfrak{g}_X = H^0(X, \Theta_X)$ としてありうるものは以下の通りである．

- 0 (p は任意),
- $\mathfrak{m}_p$ ($p \leq 7$),

- $\mathfrak{a}_p$ $(p \le 5)$,
- $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p$ $(p \le 3)$,
- $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p$ $(p \le 3)$,
- $\mathrm{Lie}((\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}})$ $(p \le 2)$.

また，どの場合にも $\langle \mathfrak{g}_X \rangle \subset \Theta_X$ の階数は $\dim_k \mathfrak{g}_X$ に一致する．

証明．これらが実現可能なことについては 3 節（またはそこから引用した文献）に載せた例を見よ．

次に，この 6 候補それぞれについて標数を限定する．$\mathfrak{m}_p, \mathfrak{a}_p$ については命題 2.3(2) ほぼそのものである．$\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p$ については，A_{p-1} 型 RDP を $24/p$ 個以上もつことが示せて，Picard 数との兼ね合いから $p \le 3$ である．$\mathrm{Lie}((\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}})$ については，$p \ge 3$ の RDP で別の RDP の $(\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}}$ 商になっているものが存在しないこと $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p$ についても同様に，$p \ge 5$ では適切な RDP が存在しないことから従う．

最後に，この 6 つ以外のものが現れないことと，$\mathrm{rank}\langle \mathfrak{g}_X \rangle = \dim_k \mathfrak{g}_X$ を示す．$\dim \mathfrak{g}_X \ge 2$ の場合のみ考えればよい．2 次元部分ベクトル空間 $V \subset \mathfrak{g}_X$ をとり，自然な射 $\phi\colon V \otimes_k \mathcal{O}_X \to \Theta_X$ を考える．ϕ が単射でない場合，$D_1 = fD_2$, $f \in k(X) \setminus k$ なる $D_1, D_2 \in V \setminus \{0\}$ が存在することになり，このとき $(D_1) \ne 0$ である．$\langle D_1^{p^n} \mid n \ge 0 \rangle \subset \mathfrak{g}_X$ から p-closed な元 $D' \ne 0$ をとると（補題 1.6 の証明参照），$(D') \ge (D_1)$ なので $(D') \ne 0$ であり，$X^{D'}$ は有理曲面になり，したがって命題 2.6 より $\mathrm{ht}(X) = \infty$ となり矛盾する．

したがって ϕ は単射であり，$(\bigwedge^2 V) \otimes_k \mathcal{O}_X \to \bigwedge^2 \Theta_X$ も単射である．右辺の X^{sm} への制限は $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{sm}}}(-K_X) \cong \mathcal{O}_{X^{\mathrm{sm}}}$ に同型なので，X^{sm} への制限 $\phi|_{X^{\mathrm{sm}}}$ は同型である．よって結局 $V = H^0(X, \Theta_X)$ である．命題 2.10 の証明と同様に，各 $x \in X$ に対し $\mathfrak{l}_x := \{D \in \mathfrak{g}_X \mid x \in \mathrm{Fix}(D)\} \subset V$ は部分 p-Lie 環で，$x \in X^{\mathrm{sm}}$ ならば $\mathfrak{l}_x = 0$ で，$x \in \mathrm{Sing}(X)$ ならば $\dim \mathfrak{l}_x \ge 1$ である．もし $\mathfrak{l}_x = V$ ならば初めから $\mathrm{Bl}_x X$ を考えればよいので，$x \in \mathrm{Sing}(X)$ に対して $\dim \mathfrak{l}_x = 1$ と仮定してよい．さていま V が無限個の 1 次元部分 p-Lie 環 $\mathfrak{h}$ をもつと，どの $\mathfrak{l}_x$（$x \in \mathrm{Sing}(X)$）にも一致しない $\mathfrak{h}$ がとれて，$X^{\mathfrak{h}}$ は固定点をもたないベクトル場による商なので RDP Enriques 曲面になり，したがって $\mathrm{ht}(X) = \infty$ となり矛盾する．2 次元 p-Lie 環で 1 次元部分 p-Lie 環を有限個しかもたないものは，命題 1.8 より，$\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p, \mathrm{Lie}((\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}})$ の 3 つのみである．□

一方高さ無限の場合には，$p = 2, 3, 5, 7, 11$ に対し，$m = 10, 4, 1, 1, 1$ とおくと，$\mathfrak{g}_X \supset \mathfrak{a}_p^{\oplus m} \rtimes \mathfrak{m}_p$ かつこの部分空間が生成する foliation が階数 1 である例が存在する（例 3.4）．

2.6 X への群スキーム作用についてはどこまで分かるか？

高さ 1 の無限小群スキームの作用は $H^0(X, \Theta_X)$ を見れば決定できるが，高さ 2 以上のもの（$\mu_{p^2}, \alpha_{p^2}, M_2$ など[*15]）の作用の情報はここから直接は得られない（例えば例 3.1 の $(f_{\{1,2\}} = 0)$ は $\mu_2 \times \mu_2$ が作用する例だが，実際にはより大きい群スキーム $\mu_4 \times \mu_4$ が作用する）ので，より精密な情報が必要となる．

μ_n については，標数 p で μ_n が（忠実に）作用する RDP K3 曲面が存在する (p, n) をすべて決定した（[Mat20a, Theorem 8.2]）．一般の無限小群スキーム（さらには一般の有限群スキーム）については見通しは立っていない（そこまで突き止めたいともあまり思っていませんが……）．

3 例

RDP K3 曲面上のベクトル場に関する例を挙げる．なお，

- 環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 上の導分 $D = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ とイデアル I に対し，$D(I) \subset I$ であるとき，D は $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ 上の導分を誘導する．これのことも $D = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書く．射影空間の部分多様体についても同様の記法を用いる．
- RDP K3 曲面のアフィン部分スキーム上での記述のみ与えて，大域的である（極をもたない）ことの確認は省くことがある．
- RDP K3 曲面であることの確認は省く．
- 命題 2.6 より，μ_p, α_p 商（存在する場合は）を見れば高さ有限か無限かの判定ができる：例 3.1,3.2,3.3 は高さ有限であり，3.4,3.5,3.6 は高さ無限である．(3.7 は大域切断による商ではないので当てはまらない．) ただし，商が RDP K3 曲面/RDP Enriques 曲面/有理曲面であることの確認も省く．
- 私はこういう例を作って眺めるのは好きなのですが，一般のみなさまはどうでしょうね？

[*15] M_2 とは，$\alpha_p \to G \to \alpha_p$ という拡大で書ける長さ p^2 の可換群スキームのうち，$\alpha_p \times \alpha_p$ でも α_{p^2} でも $(\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}}$ でもないものである．なお，$\alpha_p \times \alpha_p$ と $(\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}}$ は高さ 1 である．

3.1 高さ有限の例

例 3.1 (Θ_X が $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p$，$\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p$, $\mathrm{Lie}((\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}})$ で大域的に生成される例（$p=2$））．$p=2$ とする．$R = k[x_0, y_0, x_1, y_1]$ の部分環 R_i と，$\mathbb{P}^3 = \operatorname{Proj} R$ のベクトル場 D_i を次で定める．

$$
\begin{aligned}
D_1 &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, & R_1 &= k[*^2, x_0x_1, y_0y_1], \\
D_2 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, & R_2 &= k[*^2, x_0y_0, x_1y_1], \\
D_3 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0}, & R_3 &= k[*^2, x_0y_1 + x_1y_0, x_1y_1], \\
D_4 &= y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, & R_4 &= k[*^2, x_1^2x_1y_1 + (x_0y_1 + x_1y_0)y_1^2] \subset R_3,
\end{aligned}
$$

ただし各変数の 2 乗を並べたものを $*^2$ と略記した．

$I \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,4\}\}$ とする．generic な 4 次式 $f \in R_I := \cap_{i \in I} R_i$ で定まる 4 次曲面 $X = (f = 0) \subset \mathbb{P}^3$ は RDP K3 曲面であり，各 $i \in I$ に対して $D_i \in H^0(X, \Theta_X)$ であり，これは $i = 1, 2$ ならば μ_p 作用，$i = 3$ ならば α_p 作用を与え，商は RDP K3 曲面である．（$i = 4$ に対しては $D_4^2 = D_3 \neq \lambda D_4$ である．）さらに $I = \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,4\}$ ならば Θ_X は 2 つの大域切断 D_i（$i \in I$）で生成され，それぞれ $\mu_p \times \mu_p, \mu_p \times \alpha_p, (\alpha_{p^2})^{\mathrm{D}}$ 作用を与える．

$|I| = 2$ の場合に上記の条件を満たす元として例えば次がある．

$$
\begin{aligned}
f_{\{1,2\}} &= x_0^4 + y_0^4 + x_1^4 + y_1^4 + x_0y_0x_1y_1, \\
f_{\{1,3\}} &= x_0^4 + y_0^4 + x_1^4 + y_1^4 + x_1y_1(x_0y_1 + x_1y_0) + x_0^2y_0^2, \\
f_{\{3,4\}} &= x_0^2y_0^2 + x_1^4 + y_1^4 + x_1^2x_1y_1 + (x_0y_1 + x_1y_0)y_1^2.
\end{aligned}
$$

さらに，この $f_{\{1,3\}}$ の場合，$X/\mu_p \to X^{(p)} \to X^{(p)}/\alpha_p$ は M_2 作用による商である．

例 3.2 (Θ_X が $\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p$，$\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p$ で大域的に生成される例（$p=3$））．$p=3$ とする．$R = k[x_0, x_1, x_2, y_1, y_2]$ の部分環 R_i と，$\mathbb{P}^4 = \operatorname{Proj} R$ のベクトル場 D_i を次で定める．

$$
\begin{aligned}
D_1 &= y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, & R_1 &= k[x_0, x_1, x_2, y_1^3, y_2^3, y_1y_2], \\
D_2 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, & R_2 &= k[x_0, x_1^3, x_2^3, x_1x_2, y_1, y_2], \\
D_3 &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, & R_3 &= k[x_0, x_1^3, x_2^3, x_1^2 + x_0x_2, y_1, y_2],
\end{aligned}
$$

$I \in \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ とする．generic な $2,3$ 次式 $f, g \in R_I := \cap_{i \in I} R_i$ で定まる 6 次曲面 $X = (f = g = 0) \subset \mathbb{P}^4$ を考えると，例 3.1（のうち $i = 4$ が関係しない部分）と同様のことが成り立つ．具体例については

$$
\begin{aligned}
f_{\{1,2\}} &= x_0^2 - y_1 y_2, & g_{\{1,2\}} &= \sigma_1^3 + x_0 x_1 x_2, \\
f_{\{1,3\}} &= x_0^2 + y_1 y_2, & g_{\{1,3\}} &= \sigma_1^3 + x_0(x_1^2 + x_0 x_2) + x_0 y_1 y_2
\end{aligned}
$$

がある（σ_1 は 5 変数の和）．

例 3.3. $p \leq 7$（resp. $p \leq 5$）で μ_p（resp. α_p）が作用し商が RDP K3 曲面である例については [Mat20a, Section 9],[Mat20b, Section 9] を見てください．

3.2 高さ無限の例

例 3.4 ($\mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p$ の例（$3 \leq p \leq 11$））**.** $p = 5, 7, 11$ に対して，$m = 2, 1, 1$ とおくと，RDP 楕円 K3 曲面 $X = (y^2 = x^3 + x + t^{mp})$（$-4 - 27t^{2mp} = 0$ のところに合計 $2m$ 個の A_{p-1} 型 RDP をもつ）に対して，$\mathfrak{g}_X = H^0(X, \Theta_X) = \langle \frac{\partial}{\partial t}, t\frac{\partial}{\partial t} \rangle \cong \mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p$ であり，これは階数 1 の foliation を生成する．なお，$t^2 \frac{\partial}{\partial t}$ は大域切断にならない（$t = \infty$ のファイバーに極をもつ）．

$p = 3$ とする．generic な斉次 $2,3$ 次式 $f_2 \in k[w,x,y,z]_2$, $f_3 \in k[w,x,y,z]_3$ に対し，$X = (f_2(w,x,y,z) = v^3 + f_3(w,x,y,z) = 0) \subset \mathbb{P}^4$ は（$10A_2$ をもつ）RDP K3 曲面であり，$H^0(X, \Theta_X) \supset \{(g + cv)\frac{\partial}{\partial v} \mid g \in k[w,x,y,z]_1, c \in k\} \cong \mathfrak{a}_p^{\oplus 4} \rtimes \mathfrak{m}_p$ である．

$p = 2$ とする．generic な斉次 6 次式 $f \in k[x,y,z]_6$ に対し，$X = (w^2 + f(x,y,z) = 0) \subset \mathbb{P}(3,1,1,1)$ は（$21A_1$ をもつ）RDP K3 曲面であり，$H^0(X, \Theta_X) \supset \{(g + cw)\frac{\partial}{\partial w} \mid g \in k[x,y,z]_3, c \in k\} \cong \mathfrak{a}_p^{\oplus 10} \rtimes \mathfrak{m}_p$ である．

例 3.5 ($\mathfrak{m}_p$ の例（$p \leq 19$））**.** $p = 13, 17, 19$ に対し，楕円 K3 曲面 X を

$$
\begin{aligned}
p &= 13, \quad y^2 = x^3 + t^5 x + t, & D &= 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 6t\frac{\partial}{\partial t}, \\
p &= 17, \quad y^2 = x^3 + t^7 x + t^2, & D &= 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 3t\frac{\partial}{\partial t}, \\
p &= 19, \quad y^2 = x^3 + t^7 x + t, & D &= 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 6t\frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned}
$$

で定めると，$H^0(X, \Theta_X) = \langle D \rangle \cong \mathfrak{m}_p$ である．（$-4t^p - 27 = 0$ のところに A_{p-1} 型 RDP がある．）なお，この例は金銅 [Kon92, Section 7] による標数 0 での $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用の例をそのまま標数 p にしただけである．

例 **3.6.** $p = 2$ で $\mathfrak{g}_X \cong \mathfrak{a}_p \rtimes \mathfrak{m}_p, \mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_p$ でほとんどすべての 1 次元部分 p-Lie 環による商が Enriques 曲面である例については，[Mat19a, Section 4.1] を見てください．

3.3　大域切断をもたない foliation の例

例 **3.7** (大域切断をもたない階数 1 の foliation で商が RDP K3 曲面になる例)**.** $\pi\colon A \to A'$ を標数 p のアーベル曲面の間の p 次非分離射とする（任意の A に対しそのような射は存在する）．対応する foliation $\overline{\mathcal{F}} \subset \Theta_A$ は階数 1 で自由である．アーベル曲面の -1 倍写像 $[-1]$ は Θ_A に -1 倍で作用し，とくに $\overline{\mathcal{F}}$ にも -1 倍で作用する．以下 $p > 2$ とする．$X = A/\{[\pm 1]\}, X' = A'/\{[\pm 1]\}$ は（固定点集合 $A[2], A'[2]$ の像に）16 個の A_1 型 RDP をもつ RDP K3 曲面になる．$\pi\colon X \to X'$ に対応する foliation $\mathcal{F} \subset \Theta_X$ は非自明な大域切断をもたない（もつと，その引き戻しは $\overline{\mathcal{F}}$ の $[-1]$-不変な大域切断になってしまう）．これは命題 2.11 における $r = 2$ の例である．なお，この場合 A の p-rank によって X は高さ有限にも高さ無限にもなるので，命題 2.6 の類似は成り立たない．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16K17560, JP20K14296 の助成を受けたものです．

参考文献

[Art77] M. Artin, *Coverings of the rational double points in characteristic p*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 11–22.

[BM76] E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p. III*, Invent. Math. **35** (1976), 197–232.

[DG70] Michel Demazure and Pierre Gabriel, *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970 (French). Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[EHSB12] T. Ekedahl, J. M. E. Hyland, and N. I. Shepherd-Barron, *Moduli and periods of simply connected Enriques surfaces* (2012), available at `http://arxiv.org/abs/1210.0342`.

[Jac37] Nathan Jacobson, *Abstract derivation and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), no. 2, 206–224. MR1501922

[Kat87] Toshiyuki Katsura, *Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), no. 1, 1–41.

[KT89] Toshiyuki Katsura and Y. Takeda, *Quotients of abelian and hyperelliptic surfaces by rational vector fields*, J. Algebra **124** (1989), no. 2, 472–492.

[Kon92] Shigeyuki Kondō, *Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), no. 1, 75–98.

[Kon18] Shigeyuki Kondo, *Classification of Enriques surfaces covered by the supersingular K3 surface with Artin invariant* 1 *in characteristic* 2 (2018), available at `https://arxiv.org/abs/1812.02020`.

[LN80] William E. Lang and Niels O. Nygaard, *A short proof of the Rudakov-Šafarevič theorem*, Math. Ann. **251** (1980), no. 2, 171–173.

[Mat20a] Yuya Matsumoto, *μ_n-actions on K3 surfaces in positive characteristic* (2020), available at `http://arxiv.org/abs/1710.07158v3`.

[Mat20b] ———, *μ_p- and α_p-actions on K3 surfaces in characteristic p* (2020), available at `http://arxiv.org/abs/1812.03466v3`.

[Mat19a] ———, *Canonical coverings of Enriques surfaces in characteristic* 2 (2019), available at `http://arxiv.org/abs/1812.06914v2`.

[Mat19b] ———, *Inseparable maps on W_n-valued Ext groups of non-taut rational double point singularities and the height of K3 surfaces* (2019), available at `http://arxiv.org/abs/1907.04686v1`.

[Mum70] David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.

[Nik79] V. V. Nikulin, *Finite automorphism groups of Kähler $K3$ surfaces*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **38** (1979), 75–137 (Russian). English translation: Trans. Moscow Math. Soc. **1980**, no. 2, 71–135.

[Nyg79] Niels O. Nygaard, *A p-adic proof of the nonexistence of vector fields on $K3$ surfaces*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 515–528.

[RS76] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), no. 6, 1269–1307, 1439 (Russian). English translation: Math. USSR-Izv. **10** (1976), no. 6, 1205–1237.

[Sch19] Stefan Schröer, *Enriques surfaces with normal K3-like coverings* (2019), available at `http://arxiv.org/abs/1703.03081v2`.

[Wan13] Xingting Wang, *Connected Hopf algebras of dimension p^2*, J. Algebra **391** (2013), 93–113.