前層の逆像と順像の随伴

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)
2021 年 07 月 12 日

位相空間上の前層の場合

位相空間 X に対し，開集合系を $\mathrm{Open}(X)$ で表し，（集合，……の）前層のなす圏を $\{\mathrm{Presh}/X\}$ で表す．

$f\colon X \to Y$ を連続写像とし，$F \in \{\mathrm{Presh}/X\}, G \in \{\mathrm{Presh}/Y\}$ を前層とする．f_*F を順像（すなわち，$V \in \mathrm{Open}(Y)$ に対して $f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$）とする．$f^\bullet G$ を逆像（すなわち，$U \in \mathrm{Open}(X)$ に対して $f^\bullet G(U) = \varinjlim_{V \in \mathrm{Open}(Y), f(U) \subset V} G(V)$）とする．

命題 0.1 (逆像と順像の随伴)**.** 自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(f^\bullet G, F) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/Y\}}(G, f_*F)$ がある．

証明. 概略は次の通り（I の定義，条件 (*) の内容，(1) と (2) の説明は後述）.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(f^\bullet G, F) &= \{(\phi_U\colon \varinjlim_{V \in \mathrm{Open}(Y), f(U) \subset V} G(V) \to F(U))_{U \in \mathrm{Open}(X)} \mid \text{制限写像と可換}\} \\
&\underset{(1)}{\overset{1:1}{\leftrightarrow}} \{(\chi_{U,V}\colon G(V) \to F(U))_{(U,V) \in I} \mid \text{条件 (*)}\} \\
&\underset{(2)}{\overset{1:1}{\leftrightarrow}} \{(\psi_V\colon G(V) \to F(f^{-1}(V)))_{V \in \mathrm{Open}(Y)} \mid \text{制限写像と可換}\} \\
&= \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/Y\}}(G, f_*F).
\end{aligned}$$

ここで，$I = \{(U,V) \in \mathrm{Open}(X) \times \mathrm{Open}(Y) \mid f(U) \subset V\}$ であり，条件 (*) とは，$(U',V'),(U,V) \in I$ であって $U' \subset U$ と $V' \subset V$ を満たすものに対して（このとき (U',V) も I の元になり）図式

$$\begin{array}{ccc}
G(V) & \xrightarrow{\chi_{U,V}} & F(U) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle r^F} \\
G(V) & \xrightarrow{\chi_{U',V}} & F(U') \\
\downarrow{\scriptstyle r^G} & & \| \\
G(V') & \xrightarrow{\chi_{U',V'}} & F(U')
\end{array}$$

が可換になることである．なお，“上部” の可換性と “下部” の可換性はどちらも “外周” の可換性の特別な場合なので，“外周” の可換性だけ要請すれば十分である．

(1) の説明：逆像の定義に基づいて考えればよい．順系からの射をなすことが “下部” の可換性に相当し，制限写像と可換になることが “上部” の可換性に相当する．

(2) の説明：[→]：$\psi_V := \chi_{f^{-1}(V),V}$ とする．[←]：$\chi_{U,V} := r^F \circ \psi_V\colon G(V) \to F(f^{-1}(V)) \to F(U)$ とする． □

もう少し一般の場合

$\mathcal{C}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ 上の（集合，……の）前層とは，C^{op} から（集合，……の圏への）関手のことであり，前層のなす圏を $\{\mathrm{Presh}/\mathcal{C}\}$ で表す．

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$f^\bullet \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．（この記法は $f^\bullet$ が何らかの関手 f から何らかの反変的な方法で得られていることを示唆するが，今はとくにそのような仮定はしない．）関手 $f_* \colon \{\mathrm{Presh}/\mathcal{C}\} \to \{\mathrm{Presh}/\mathcal{D}\}$ を，前層 $F \in \{\mathrm{Presh}/\mathcal{C}\}$ に対し $f_*F \in \{\mathrm{Presh}/\mathcal{D}\}$ を合成関手 $F \circ f^\bullet$ とする（すなわち $d \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$ に対して $f_*F(d) = F(f^\bullet(d))$ とする）ことで定め，f_*F を F の順像とよぶ．関手 f_* の左随伴を考えたい．

圏 I を，

$$\begin{aligned}\mathrm{Obj}(I) &= \{(c,d,i) \mid c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}), i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, f^\bullet(d))\},\\ \mathrm{Hom}_I((c',d',i'),(c,d,i)) &= \{(p,q) \mid p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c',c), q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d',d), i \circ p = f^\bullet(q) \circ i'\}\end{aligned}$$

で定める（つまり，I の対象とは図式 $c \xrightarrow{i} f^\bullet(d)$ であり，I の 2 対象とその間の射は $\mathcal{C}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "i"] & f^\bullet(d) \\ c' \arrow[u, "p"] \arrow[r, "i'"] & f^\bullet(d') \arrow[u, "f^\bullet(q)"'] \end{tikzcd}$$

を与える）．また $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対し圏 I_c を，射影 $I \to \mathcal{C}$ の c 上のファイバー（すなわち，第 1 成分が c である対象と第 1 成分が id_c である射のみからなる部分圏）とする．I_c の対象 (c,d,i) を単に (d,i) と書く．

前節と同様に，$F \in \{\mathrm{Presh}/\mathcal{C}\}$ と $G \in \{\mathrm{Presh}/\mathcal{D}\}$ に対し一対一対応

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/\mathcal{D}\}}(G, f_*F) &= \{(\psi_d \colon G(d) \to F(f^\bullet(d)))_{d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} \mid \mathcal{D} \text{ の射に対する制限写像と可換}\}\\ &\overset{1:1}{\leftrightarrow} \{(\chi_{c,d,i} \colon G(d) \to F(c))_{(c,d,i) \in \mathrm{Obj}(I)} \mid I \text{ の射に対する後述の図式が可換}\}\\ &\overset{1:1}{\leftrightarrow} \{(\phi_c \colon \varinjlim_{(d,i) \in \mathrm{Obj}(I_c)} G(d) \to F(c))_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mid \mathcal{C} \text{ の射に対する制限写像と可換}\}\end{aligned}$$

が，余極限 $\varinjlim_{(d,i) \in \mathrm{Obj}(I_c)} G(d)$ が存在するならば成り立つ．ただし $(\chi_{c,d,i})$ については I の射 $(p,q) \in \mathrm{Hom}_I((c',d',i'),(c,d,i))$ に対する図式

$$\begin{tikzcd} G(d) \arrow[r, "\chi_{c,d,i}"] \arrow[d, equal] & F(c) \arrow[d, "F(p)"] \\ G(d) \arrow[r, "\chi_{c',d,i\circ p}"] \arrow[d, "G(q)"'] & F(c') \arrow[d, equal] \\ G(d') \arrow[r, "\chi_{c',d',i'}"] & F(c') \end{tikzcd}$$

の可換性を要請する．したがって，$f^\bullet G \in \{\mathrm{Presh}/\mathcal{C}\}$ を $f^\bullet G(c) = \varinjlim_{(d,i) \in \mathrm{Obj}(I_c)} G(d)$ と定めることで，次が成り立つ．

命題 0.2. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が小さい圏で，前層の行先の圏（集合，……の圏）が余極限をもつならば，$f^\bullet$ を上のように定めると自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/\mathcal{C}\}}(f^\bullet G, F) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/\mathcal{D}\}}(G, f_*F)$ がある．

例 0.3. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をそれぞれ位相空間 X, Y の開集合系（が包含順序に関してなす順序集合が定める圏）とし，$f^\bullet$ を連続写像 $f\colon X \to Y$ による引き戻しとする．（この場合，$\mathcal{C}, \mathcal{D}, I$ は thin な圏（2 対象に対しそれらの間の射は高々 1 つ）である．）このとき，前層・順像・逆像の概念は前節のものと一致する．

層の知識を仮定する．層の前層としての順像は層になるので，これを層としての順像とよぶ．一方で，層の前層としての逆像は一般に層にならない（が，例えば f が開埋め込みならば層になる）．層としての逆像を，前層としての逆像の層化として定義すると，逆像と順像の間に同様の随伴性が成り立つ．

例 0.4. $j\colon X' \to X$ を位相空間の開埋め込みとし，X' を像 $j(X')$ と同一視する．$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をそれぞれ位相空間 X, X' の開集合系（が包含順序に関してなす順序集合が定める圏）とし，$f^\bullet$ を開集合 $V \subset X'$ に対し $V \subset X$ を対応させる関手とする．この場合も $\mathcal{C}, \mathcal{D}, I$ は thin な圏になる．このときの $f_* F$ は X 上の前層の X' への制限に他ならず，例 0.3 でいう（j による）逆像であることに注意する．さて今回はアーベル群の前層を考える．このとき上記の構成から $U \subset X$ に対して $f^\bullet G(U) = \begin{cases} G(U) & (U \subset X') \\ 0 & (U \not\subset X') \end{cases}$ となる．この前層を通常 $j_! G$ と書き，G の零延長とよぶ．

層については，前層としての零延長の層化を層としての零延長とよぶ．やはり零延長と逆像の間に同様の随伴性が成り立つ．

例 0.5. スキームとエタール射の知識を仮定する．（とりあえず次を分かっていれば（または認めれば）よい．スキームの圏があり，ファイバー積をもつ．エタール性はスキームの射に関する性質であり，同型射はエタール射であり，エタール射の合成はエタール射であり，エタール射の底変換はエタール射である．さらに，図式 $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ において，$f \circ g$ と f がエタールならば g もエタールである．）

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をそれぞれスキーム X, Y 上エタールなスキームの圏とする（射は X, Y 上のスキームとしての射だが，上述の性質より自動的にエタール射になる），$f^\bullet$ をスキームの射 $f\colon X \to Y$ による引き戻しとする．（例 0.3 の場合と異なり，$\mathcal{C}$ や $\mathcal{D}$ や I は一般に thin でない．）この場合も上記の構成で逆像を定義すると随伴性が成り立つ（「小さい」を保証するために例えば有限表示エタールなものに限るなどの修正が必要）．$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 上の前層をそれぞれ X, Y 上のエタール前層とよぶ．

前層は任意の圏に対して定義される．一方で，位相空間上の層とは，各被覆に対して張り合わせ条件を満たす前層のことであった．したがって，層を一般化するためには被覆に類似する概念が必要となる．圏に対する Grothendieck 位相という概念があり，これをそなえた圏（をサイトという）上で層の概念が定義される．X 上エタールなスキームの圏にエタール位相とよばれる Grothendieck 位相が導入され，この位相に関する層をエタール層とよぶ．エタール層に関して，位相空間上の層の層係数コホモロジーの理論と類似した議論が展開でき，エタールコホモロジーとよばれる．

これ以外にもさまざまなサイトおよびその上の層やコホモロジーが（数論幾何や数理論理などの分野で）研究対象となる．