3.1 入射的対象に関するいくつかの補題

補題 3.1. $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \dots$ および $0 \to M' \to I'^0 \to I'^1 \to \dots$ をアーベル圏の完全列とし，I'^i は入射的と仮定する（I^i については何も仮定しない）．$\phi\colon M \to M'$ を射とする．

(1) このとき，ϕ は複体の射に延長できる．すなわち，次の図式を可換にするような $(\phi^i)_{i\geq 0}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi"] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "\phi^0"] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "\phi^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "d'"] & I'^0 \arrow[r, "d'"] & I'^1 \arrow[r, "d'"] & \dots
\end{tikzcd}$$

(2) (ϕ^i) と (ψ^i) が上の条件を満たすならば，この 2 つはホモトピックである．すなわち，射の族 $(L^i\colon I^i \to I'^{i-1})_{i\geq 1}$ であって $\phi^0 - \psi^0 = L^1 \circ d$, $\phi^i - \psi^i = L^i \circ d + d' \circ L^{i+1}$（$i \geq 1$）を満たすものが存在する．

証明. (1) $\phi^0 \circ d = d' \circ \phi$ を満たす $\phi^0\colon I^0 \to I'^0$ が存在することが，I'^0 が入射的であることから従う．そのような ϕ^0 を 1 つとる．次に，$0 \to I^0/M \to I^1 \to \dots$ に同様の議論を行うことで $\phi^1\colon I^1 \to I'^1$ をとる．以下同様に得る (ϕ^i) が条件を満たす．

(2) これも入射性を用いて順に構成する． □

補題 3.2. $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ をアーベル圏の完全列とし，$0 \to M_1 \xrightarrow{d_1^{-1}} I_1^0 \xrightarrow{d_1^0} I_1^1 \to \dots$ と $0 \to M_3 \xrightarrow{d_3^{-1}} I_3^0 \xrightarrow{d_3^0} I_3^1 \to \dots$ も完全列とする．I_1^i は入射的と仮定する（I_3^i については何も仮定しない）．このとき，縦も横も完全な図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d_1^{-1}"] \arrow[d, "f"] & I_1^0 \arrow[r, "d_1^0"] \arrow[d, "f^0"] & I_1^1 \arrow[r, "d_1^1"] \arrow[d, "f^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "d_2^{-1}"] \arrow[d, "g"] & I_2^0 \arrow[r, "d_2^0"] \arrow[d, "g^0"] & I_2^1 \arrow[r, "d_2^1"] \arrow[d, "g^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & M_3 \arrow[r, "d_3^{-1}"] \arrow[d] & I_3^0 \arrow[r, "d_3^0"] \arrow[d] & I_3^1 \arrow[r, "d_3^1"] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

に延長できる．I_3^i が入射的ならば，I_2^i も入射的になる．

証明. $I_2^0 := I_1^0 \oplus I_3^0$ とし，$f^0\colon I_1^0 \to I_2^0$ を自然な埋め込み，$g^0\colon I_2^0 \to I_3^0$ を自然な射影とする．すると $0 \to I_1^0 \to I_2^0 \to I_3^0 \to 0$ は明らかに完全である．また，$\iota\colon I_3^0 \to I_2^0$ を自然な埋め込みとする．I_1^0 は入射的なので，$a\colon M_2 \to I_1^0$ であって $a \circ f = d_1^{-1}$ なものが存在する．1 つとる．$d_2^{-1}\colon M_2 \to I_2^0$ を $d_2^{-1} := f^0 \circ a + \iota \circ d_3^{-1} \circ g^0$ で定める．するとここまでの図式は可換で，d_2^{-1} はモノ射である．短完全列 $0 \to \mathrm{Coker}(d_1^{-1}) \to \mathrm{Coker}(d_2^{-1}) \to \mathrm{Coker}(d_3^{-1}) \to 0$ と $\mathrm{Coker}(d_k^{-1}) \to I_k^1 \to \dots$（$k = 1, 3$）に対して同じ議論により I_2^1, f^1, g^1, d_2^0 を得る．以下繰り返す． □

系 3.3. $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ をアーベル圏 $\mathcal{C}$ の完全列とする．$\mathcal{C}$ は入射的対象を十分もつとする．このとき，縦も横も完全な図式 (1) で，各 I_k^i が入射的であるものが存在する．

証明. M_1 と M_3 の入射的分解をとり，補題 3.2 を適用して図式を得る．I_2^i は入射的対象の拡大なので入射的である． □

補題 3.4. $(M_k, I_k^\bullet)$ と $(M'_k, I'^\bullet_k)$ を縦も横も完全な (1) の形の図式とする．I'^i_k は入射的と仮定する（I_k^i については何も仮定しない）．$(\phi_k\colon M_k \to M'_k)_{k=1,2,3}$ を短完全列の間の射とする．このとき，図式の射 $(\phi_k, \phi_k^\bullet\colon I_k^\bullet \to I'^\bullet_k)$ に延長できる．

証明. I'^0_1 が入射的なので，完全列 $0 \to I'^0_1 \to I'^0_2 \to I'^0_3 \to 0$ は分裂する．分裂を 1 つ固定し，$\pi\colon I'^0_2 \to I'^0_1$ と $\iota\colon I'^0_3 \to I'^0_2$ を対応する射影と埋め込みとする．

I'^0_3 の入射性を用いて，$\phi_3^0\colon I_3^0 \to I'^0_3$ を，$\phi_3^0 \circ d_3^{-1} = d'^{-1}_3 \circ \phi_3\colon M_3 \to I'^0_3$ となるようにとる．I'^0_1 の入射性を用いて，$a\colon I_2^0 \to I'^0_1$ を，$a \circ d_2^{-1} = \pi \circ d'^{-1}_2 \circ \phi_2\colon M_2 \to I'^0_1$ となるようにとる．$\phi_1^0\colon I_1^0 \to I'^0_1$ を $\phi_1^0 = a \circ f^0$ で定め，$\phi_2^0\colon I_2^0 \to I'^0_2$ を $\phi_2^0 = f'^0 \circ a + \iota_3 \circ \phi_3^0 \circ g^0$ で定める．すると $f'^0 \circ \phi_1^0 = \phi_2^0 \circ f^0$ と $g'^0 \circ \phi_2^0 = \phi_3^0 \circ g^0$ は簡単に分かり，$\phi_1^0 \circ d_1^{-1} = d'^{-1}_1 \circ \phi_1$ も（モノ射 f'^0 と合成した等式を示すことで）確かめられ，$\phi_2^0 \circ d_2^{-1} = d'^{-1}_2 \circ \phi_2$ も（モノ射 $(\pi, g'^0)\colon I'^0_2 \to I'^0_1 \oplus I'^0_3$ と合成した等式を示すことで）確かめられる．

これまでの補題と同様に，後は同じことを繰り返す． □

双対的に，射影的対象に対する同様の主張も成り立つ．詳細は省略する．

入射的対象とは関係ないが話の都合上次の補題をここで述べる．

補題 3.5. $\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$P\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ と $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．P は本質的全射かつ充満と仮定する．このとき，自然な写像 $\mathrm{Nat}(F_1, F_2) \to \mathrm{Nat}(F_1 \circ P, F_2 \circ P)$ は全単射である．

証明. $\tilde{\varepsilon}\colon F_1 \circ P \to F_2 \circ P$ を自然変換とする．目標は $\varepsilon\colon F_1 \to F_2$ を定めることである．

対象 $c, c' \in \mathcal{C}$，$\tilde{c}, \tilde{c}' \in \tilde{\mathcal{C}}$，同型射 $\phi\colon c \xrightarrow{\sim} P\tilde{c}$，$\phi'\colon c' \xrightarrow{\sim} P\tilde{c}'$，射 $\psi\colon c \to c'$ に対し，射 $\tilde{\psi}\colon \tilde{c} \to \tilde{c}'$ で $\phi' \circ \psi \circ \phi^{-1} = P\tilde{\psi}$ を満たすものが充満性より存在する．$\tilde{\psi}$ をそのような射とすると，図式

$$\begin{array}{ccccccc}
F_1 c & \xrightarrow{F_1\phi} & F_1 P\tilde{c} & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}\tilde{c}} & F_2 P\tilde{c} & \xrightarrow{F_2\phi^{-1}} & F_2 c \\
\downarrow{\scriptstyle F_1\psi} & & \downarrow{\scriptstyle F_1 P\tilde{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle F_2 P\tilde{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle F_2\psi} \\
F_1 c' & \xrightarrow{F_1\phi'} & F_1 P\tilde{c}' & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}\tilde{c}'} & F_2 P\tilde{c}' & \xrightarrow{F_2\phi'^{-1}} & F_2 c'
\end{array}$$

は可換になる（左と右は F_1, F_2 をとる前の可換性から，真ん中は $\tilde{\varepsilon}$ が自然変換なので）．

対象 $c \in \mathcal{C}$ に対し，対象 $\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}$ と同型射 $\phi\colon c \xrightarrow{\sim} P\tilde{c}$ の組が存在する（P は本質的全射なので）．そのような組をとって射 $F_1 c \to F_2 c$ を合成 $F_1 c \xrightarrow{F_1\phi} F_1 P\tilde{c} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}\tilde{c}} F_2 P\tilde{c} \xrightarrow{F_2\phi^{-1}} F_2 c$ で定める．この射が組のとり方によらないことが，図式で $c' = c$，$\psi = \mathrm{id}_c$ とした場合から分かる．この射を εc とする．さらに，εc とが $\mathcal{C}$ の射 $\psi\colon c \to c'$ と交換することも図式から分かる．すなわち，ε は自然変換である． □

3.2 導来関手

定義 3.6 (δ 関手)**.** $\mathcal{C},\mathcal{D}$ をアーベル圏とする．

$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への（コホモロジカルな）δ **関手** (δ-*functor*) とは，次のデータ (1),(2) であって，条件 (3),(4) を満たすものをいう．

(1) 関手 F^i（$i \in \mathbb{N}$）.

(2) $\mathcal{C}$ での短完全列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{D}$ での射 $\partial^i\colon F^i(M'') \to F^{i+1}(M')$. これを**連結準同型** (*connecting homomorphism*) などという．

(3) 短完全列に対し，

$$0 \to F^0(M') \to F^0(M) \to F^0(M'') \xrightarrow{\partial^0} F^1(M') \to F^1(M) \to F^1(M'') \xrightarrow{\partial^1} F^2(M') \to \dots$$

は完全列である．ただし各射はもとの短完全列中の射に F^i を適用したものと (2) の連結準同型である．（これを長完全列という．）

(4) 短完全列の間の射から長完全列の間の射が誘導される（すなわち，短完全列の項の間の射に F^i を適用したものと連結準同型が交換する）．

とくに，F^0 は左完全になる．

定義 3.7 (普遍的 δ 関手)**.** δ 関手の自然変換とは，自然変換の族 $(F^i \Longrightarrow G^i)_{i\in\mathbb{N}}$ であって連結準同型と可換なものをいう．δ 関手 F^i が**普遍的** (*universal*) であるとは，任意の δ 関手 G^i と関手の自然変換 $F^0 \Longrightarrow G^0$ に対しこれを延長する δ 関手の自然変換 $F^i \Longrightarrow G^i$ が一意的に存在することをいう．

命題 3.8. $\mathcal{C}$ を入射的対象を十分もつ（定義 2.61）アーベル圏とし，F を $\mathcal{C}$ からアーベル圏 $\mathcal{D}$ への左完全関手とする．対象 M に対し，$0 \to M \to I^\bullet$ を入射的分解（定義 2.61）とし，複体 $F(I^\bullet)$ のコホモロジー $H^i(F(I^\bullet))$ を $(R^iF)(M)$ とすると，これは $I^\bullet$ のとり方によらず定まり，R^iF は関手になり，さらに連結準同型が自然に定まって R^iF は普遍的 δ 関手をなす．また，$R^0F = F$ となる．

証明. まず，この構成が分解 $0 \to M \to I^\bullet$ のとり方によらず R^iF が関手になり $R^0F = F$ となることを示す．

$\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の対象の（コチェイン）複体 $C^\bullet = (\dots \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots)$ 全体の圏とする．部分圏 $\mathrm{Kom}(\mathrm{Inj}(\mathcal{C})) \subset \mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ を，各 C^i が入射的対象である複体全体とする．部分圏 $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathrm{Kom}(\mathrm{Inj}(\mathcal{C}))$ を，$I^i = 0$（$i < 0$）かつ $H^i(I^\bullet) = 0$（$i \neq 0$）をみたす複体 $I^\bullet$ 全体とする．ただし $H^i\colon \mathrm{Kom}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は i 番目でのコホモロジーをとる関手である．関手 $H^0\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ がある．($(I^\bullet)$ は $H^0(I^\bullet) \in \mathcal{C}$ の入射的分解である．）これらは次を満たす：

(1) H^0 は本質的全射である．すなわち，各 $M \in \mathcal{C}$ に対し，$M \cong H^0(I^\bullet)$ を満たす $I^\bullet \in \tilde{\mathcal{C}}$ が存在する．

(2) H^0 は充満である．すなわち，各 $I^\bullet, I'^\bullet \in \tilde{\mathcal{C}}$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(I^\bullet, I'^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H^0(I^\bullet), H^0(I'^\bullet))$ は全射である．

(3) 複体 $C^\bullet, C'^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ に対し，0 とホモトピックな射全体を $\mathcal{N}(C^\bullet, C'^\bullet) \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{C})}(C^\bullet, C'^\bullet)$ で表す．このとき，(2) の準同型の核は $\mathcal{N}(I^\bullet, I'^\bullet)$ に等しい．

(1) の証明：定義 2.61 で述べたように，入射的対象を十分もつという仮定から，各 $M \in \mathcal{C}$ に対し入射的対

象 I^i と完全列 $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \dots$ がとれる．このとき $(\dots \to 0 \to I^0 \to I^1 \to \dots) \in \tilde{\mathcal{C}}$ が条件を満たす．

(2) の証明：$M = H^0(I^\bullet), M' = H^0(I'^\bullet)$ とおく．前段落と同様に，これは列 $0 \to M \to I^0 \to I^1 \dots$ および $0 \to M' \to I'^0 \to I'^1 \dots$ が完全であることを意味する．主張は補題 3.1(1) から従う．

(3) の証明：補題 3.1(2) から従う．

さて，ホモトピックな 2 つの射がコホモロジーに誘導する射は一致することから，関手 $H^i \circ F\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \mathrm{Kom}(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ が定める準同型 $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(I^\bullet, I'^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H^i(F(I^\bullet)), H^i(F(I'^\bullet)))$ は $\mathcal{N}(I^\bullet, I'^\bullet)$ 上では 0 である．したがって $\tilde{\mathcal{C}}$ のイデアル $\mathcal{N}$ による商からの関手 $\tilde{\mathcal{C}}/\mathcal{N} \to \mathcal{D}$ を誘導する．上記の主張 (1)(2)(3) よりこの商 $\tilde{\mathcal{C}}/\mathcal{N}$ は $\mathcal{C}$ と圏同値である．以上より，関手 $R^iF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が定義され入射的分解を用いて計算でき分解によらないことが分かった．F は左完全なので $R^0F = F$ が成り立つ．

次に，短完全列から連結射と長完全列が得られる（したがって δ 関手になる）ことを示す．

$\mathcal{E}$ を $\mathcal{C}$ の短完全列の圏とする（射は複体の射）．$\tilde{\mathcal{E}}$ を，次を満たす $\mathcal{C}$ の複体の列 $I_1^\bullet \to I_2^\bullet \to I_3^\bullet$ がなす圏とする．

- 各 $i < 0$ と各 $k \in \{1, 2, 3\}$ に対し，$I_k^i = 0$.
- 各 $i \geq 0$ に対し，$0 \to I_1^i \to I_2^i \to I_3^i \to 0$ は入射的対象からなる完全列．（なお，I_1^i が入射的なので，この完全列は分裂する．）
- 各 $i > 0$ と各 $k \in \{1, 2, 3\}$ に対し，$H^i(I_k^\bullet) = 0$.（したがって，$0 \to H^0(I_1^\bullet) \to H^0(I_2^\bullet) \to H^0(I_3^\bullet) \to 0$ は完全列．）

さて，$I = (I_1^\bullet \to I_2^\bullet \to I_3^\bullet) \in \tilde{\mathcal{E}}$ に対し，$0 \to F(I_1^i) \to F(I_2^i) \to F(I_3^i) \to 0$ も完全列であり（分裂完全列の像なので），したがって連結射 $\partial^i(I)\colon H^i(F(I_3^\bullet)) \to H^{i+1}(F(I_1^\bullet))$ と $\mathcal{D}$ の長完全列

$$\dots \to H^i(F(I_2^\bullet)) \to H^i(F(I_3^\bullet)) \xrightarrow{\partial^i(I)} H^{i+1}(F(I_1^\bullet)) \to H^{i+1}(F(I_2^\bullet)) \to \dots$$

を得る．この構成は $\tilde{\mathcal{E}}$ の射と可換になり，$\tilde{\mathcal{E}}$ から $\mathcal{D}$ への関手の間の自然変換の列

$$\dots \Longrightarrow H^i \circ F \circ \mathrm{pr}_2 \Longrightarrow H^i \circ F \circ \mathrm{pr}_3 \overset{\partial^i}{\Longrightarrow} H^{i+1} \circ F \circ \mathrm{pr}_1 \Longrightarrow H^{i+1} \circ F \circ \mathrm{pr}_2 \Longrightarrow \dots$$

であって任意の対象を代入して完全列になるものを得る．ただし $\mathrm{pr}_k\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{C}}, \mathrm{pr}_k\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$（$k = 1, 2, 3$）は第 k 成分へ射影する関手．

関手 $H^0\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ について $H^i \circ F \circ \mathrm{pr}_k = R^iF \circ \mathrm{pr}_k \circ H^0$ が成り立つ．また，関手 $H^0\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ は本質的全射かつ充満である（系 3.3, 補題 3.4）．したがって，補題 3.5 より，上の列は $\mathcal{E}$ からの関手の間の自然変換の列

$$\dots \Longrightarrow R^iF \circ \mathrm{pr}_2 \Longrightarrow R^iF \circ \mathrm{pr}_3 \overset{\partial^i}{\Longrightarrow} R^{i+1}F \circ \mathrm{pr}_1 \Longrightarrow R^{i+1}F \circ \mathrm{pr}_2 \Longrightarrow \dots$$

を与え，これも任意の対象を代入して完全列になる．言い換えると，短完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ に対する $\partial^i\colon R^iF(M_3) \to R^{i+1}F(M_1)$ であって，長完全列をなし，短完全列の射と交換するものを得た．

普遍性は，入射的対象 I と $i > 0$ に対し $R^iF(I) = 0$ となることから従う（詳細略）． □

定義 3.9 (導来関手)**.** この R^iF を F の**右導来関手** (*right derived functors*) という[*31]．

[*31] 正確に表現すると，族 (R^iF) が δ 関手で，各関手 R^iF が導来関手です．