代数幾何入門コース

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)

2021 年 01 月 26 日

目次

0 はじめに

0.1 なんですかこの文書？

講義ノートみたいなものです．代数幾何入門という体で，私が喋りたいことを喋り倒すのが目的です．内容は目次を見るとだいたい想像がつくと思います．

1 節では代数幾何学がどのような分野か述べていますが，そこに書いた内容と本講義の内容はいまいち一致しません．また，証明は略証で済ませたり引用で済ませたりすることも（とくに終盤では）多いので，あまり self-contained でもありません．（どちらも，このページ数では無理がありますので…….）

あと，普通の教科書に比べて「余談」が多めかと思います．

0.2　参考文献について

各節の冒頭に参考文献を載せています．それとは別に，インターネット時代[*1]に使える情報を載せておきます．

検索エンジン（Google など）については私が言及するまでもないでしょう．

英語版 wikipedia `https://en.wikipedia.org/` の数学記事は専門的な内容も意外と載っていることがあります．なお，日本語版は英語版記事の翻訳にすぎなかったり（そのうえ訳の質が悪かったり）するので，数学の英語が読める人はわざわざ読む必要はあまりないと思います．

MathOverflow `https://mathoverflow.net/` や Mathematics Stack Exchange `https://math.stackexchange.com/` はオンラインの Q&A サイトです．私は直接（i.e. 質問者もしくは回答者として）使ったことはありませんが，検索の結果たどりつくことはあります．例えば「is the direct image of a quasi-coherent sheaf quasi-coherent?」で検索して余談 4.32 で引用した回答に到達しました．

nLab `https://ncatlab.org/` は高次圏や関連する分野（本講義ノートでいうと被覆空間や Grothendieck 位相が近い）が解説されている wiki です．

Stacks Project [SP] `https://stacks.math.columbia.edu/` は代数スタックおよびそれに必要な代数幾何に関する長大な教科書です．通しで読むものではなさそう．「Tag XXXX」の形で節や定理にパーマリンクがふられており，(「定理 12.3.4」などと違い）ほかの部分が変化しても番号が変化しないようになっています．

もちろん，これらのウェブサイトについては査読を経ていないものが多く内容の信憑性に関する懸念がありますが，まともな記事なら証明を載せているか参考文献を載せているはずですので，証明を読むか原論文を参照すればよいでしょう．（査読付き論文なら内容が必ず正しいというわけでもありませんが．）

0.3　演習問題について

各節の末尾に演習問題をいくつか載せています（演習問題がない節もあるかもしれません）．☆のついた問題は**お勧め問題**です．

難易度は無印・【難しい】・【かなり難しい】の 3 段階です．無印は私がスラスラと解けるレベルで，【かなり難しい】は私が諦めて解答を調べたレベルです．

講義ノート末尾（参考文献と索引の後）に「ヒント」「略解」を載せています（ヒントが空な場合もあります）（略解を載せたのはレポート締切の後ですが）．希望する問題以外のヒントや略解を見たくない場合は，目を細めて「ヒント 12.34」「略解 12.34」などで検索するとよいでしょう．もちろん，ヒントや略解を無視して問題を解いてもかまいません．

演習問題

問題 0.1 (☆)**.** 講義ノートの数学的誤りを見つけて指摘せよ．

[*1] 現代の学生からは「そうでない時代があったんですか」とか言われそう…….

1 導入

1.1 導入 1：代数幾何学ってどんな分野？

（を語り尽くせるほど見識があるわけではないので，あまり私の言うことを盲信せず他の方の意見も聞いてみてください.）

もちろん学問分野は数学用語ほど明確な定義があるわけではないですが，ごく大雑把には，

- 研究対象は図形（やその性質）であり，なかでも何らかの意味で代数的な図形である.
- 研究方法は代数的なものを中心とする.（それ以外の方法を用いないわけではない.）

ということはいえると思います.

図形に関しては，狭くとらえると代数幾何学で扱う図形は**代数多様体**とよばれるもので，これは硬さ柔らかさ（位相多様体より C^∞ 多様体が硬く実解析的多様体や複素多様体はもっと硬いという意味で）で言うと，複素多様体と同程度またはもう少し硬いです．というわけで，代数幾何は複素幾何・複素多様体論とは近接しています．一方で，複素数体 $\mathbb{C}$ に限らず一般の体上で（とくに正標数の体上でも）議論できるという違いがあります.

代数多様体，もう少し広く**スキーム**は，可換環の素イデアルの集合（＋付加構造）として得られるアフィンスキームという図形を張り合わせてできるものです.（cf. C^∞ 多様体は $\mathbb{R}^n$ の開集合を張り合わせてできるものでした.）このため，可換環論とのかかわりは深いです.（なぜこのような図形を考えるのかは次節でもう少し詳しく述べます.）

代数多様体に対してどのような問題を考えるのか？ これも簡単に言い尽くせるものではありませんが，いくつか例を挙げてみます.

- 代数多様体を（何らかの意味で）分類する．基本的な不変量として次元がある．各次元ごとに，より細かく [正曲率／平坦／負曲率] に類似した分類ができる．1 次元固有代数多様体（≒ 1 次元コンパクト複素多様体≒向き付き 2 次元実閉曲面）の場合これは種数 [0 ／ 1 ／ 2 以上] に対応する．高次元ではより複雑になる.
- 一般に代数多様体は滑らかとは限らず，滑らかでない点を特異点とよぶ．特異点論では特異点の分類や，特異点を何らかの操作で解消できるかを調べる.
- 代数多様体の間の同型より緩い関係として双有理同値がある（環でいうと「商体が等しい」に対応する)．双有理同値に関する同値類の中で性質のよい代表元をみつけるのが双有理幾何学やその中の極小モデルプログラムの目的である.
- 代数多様体の射影空間への埋め込みがどれだけあるか．代数多様体が部分代数多様体（因子（余次元 1 のもの)，直線や有理曲線など特定の種類のもの，……）をどれだけもつか．代数多様体上の構造（ベクトル場や微分形式，別の種類の代数多様体の族（ベクトル束など)，群作用，……）がどれだけあるか.

ところで，私は大学院生の頃は数論幾何学が専門だと思っていました[*2]ので，ついでに紹介しておくと，数論幾何では，代数的な図形を扱いつつ，整数や有理数の性質を調べることを広い意味で目標にしています．といっても，有理数を調べるために代数的数を調べるために有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群を調べるためにガロア

[*2] ここ数年の研究は数論要素がほとんどないのですが.【脚注は，読まなくても本筋に差し支えない部分です.】

群の表現を調べるために何らかの図形の基本群やコホモロジーを調べよう，ぐらいの距離があって一見整数との関連が見えないこともしばしばありますが.

1.2 導入 2：なぜスキームを考えるのか

前半の数回の目標は，代数幾何で扱う図形である**スキーム** (*scheme*) の概念を導入することです．スキームとは，**アフィンスキーム** (*affine scheme*) を張り合わせたものです．アフィンスキームとは，環 A に対しその素イデアル全体の集合 $\operatorname{Spec} A$，に位相（Zariski 位相）を導入した位相空間，に正則関数のなす層を乗せたもの[*3]です．しかし，なぜこのような空間を考察対象とするのでしょうか？

もう少し素朴な対象として，古典的な意味での代数多様体がありますので，まずこれを見てみましょう．

代数幾何に限らず多様体論・複素多様体論・複素解析などに登場する基本的な図形として $\mathbb{C}^n$（$\mathbb{C}$ は複素数体）があります．また，$\mathbb{C}^n$ の開集合や閉集合も基本的な対象です．閉集合のうち，関数 $f_1, \ldots, f_m$ に対する共通零点の集合 $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}$ を考えてみましょう．ここで $f_1, \ldots, f_m$ としてどのような関数を許容するかで話が大きく変わります（連続？ C^∞？ 複素正則？）．$f_1, \ldots, f_m$ として $x_1, \ldots, x_n$ の多項式のみを許容したときに現れるのが代数多様体です．例えば $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$ といったものです．このような図形を代数的な言葉で捉えるにはどうすればいいでしょうか.

$\mathbb{C}^n$ に関して自然な一対一対応

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\leftrightarrow \{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \text{ の極大イデアル }\} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\leftrightarrow (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \end{aligned}$$

があります[*4]．さらに，$\mathbb{C}^n$ の部分集合のうち，いくつかの多項式 $f_1, \ldots, f_m$ の共通零点の集合 $V(f_1, \ldots, f_m)$ として書けるものに対しては,

$$\begin{aligned} V(f_1, \ldots, f_m) &\leftrightarrow \{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m) \text{ の極大イデアル }\} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\leftrightarrow (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \end{aligned}$$

という対応があります．そのうえ，環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ の元はこの図形上の関数とみなせそうです.

この記述においては $\mathbb{C}$ については「代数閉体である」という性質しか使っていないので，他の代数閉体（正標数も含め）で同じことができます．さらに，後述の Zariski 位相もやはり環の言葉で記述されます（$\mathbb{C}$ の位相的な性質は使いません）……ただし $\mathbb{C}^n$ の位相（から誘導される位相）とはだいぶ異なったものにはなりますが.

ただ，ここまでの説明では極大イデアルの集合を考えるのがよさそうという根拠にはなるものの，一方でスキームは素イデアルの集合という話でした.（極大イデアルは素イデアルですが逆は成り立ちません.）

なぜ極大イデアルだけではなく素イデアルを考えた方が都合がよいかというと，一つの大きな理由は，環の射に対して素イデアルの集合は関手的にふるまうことです．すなわち，環準同型 $f\colon A \to B$ に対して，B の素イデアルの f による引き戻しは A の素イデアルになるので，ここから写像 $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が誘導されます.（一方，極大イデアルの集合に対してはこの性質は一般に成り立ちません[*5].）しかも Zariski 位相に関して連続写像になり，さらには環付き空間の射になります.

[*3] 正確には，……に同型な局所環付き空間

[*4] 証明は環論を少し頑張る必要があります.

[*5] 環をある程度限定することで成り立つようにする手もありますが.

というわけで素イデアル全体の集合であるアフィンスキームやそれを張り合わせたスキームを考えると都合がよさそうです．

……といいつつ，場合によってはスキームだけではなくもう少し一般化した図形概念を扱いたくなるときもあり，本講義の後半ではそういうものもできれば扱いたいと考えています．……考えていましたがそこまで手が回りませんでした．

2 （可換）環と素イデアル

本講義では基本的に，環といったら単位的可換環をさし，環準同型といったら乗法の単位元を保つものをいう．[*6]ただし，この規約は「行列環」「Lie 環」などには適用されない（これらが出てくるかは分かりませんが），

2.1 素イデアル

定義 2.1 (群，モノイド)**．群** (*group*) とは，集合 G と，2 項演算 $*\colon G \times G \to G$ で，次の 3 条件を満たすものをいう．

- [結合法則] 任意の $x, y, z \in G$ に対して，$(x * y) * z = x * (y * z)$.
- [単位元の存在] 次を満たす $1 \in G$ が存在する：任意の $x \in G$ に対して $x * 1 = 1 * x = x$.（なお，この条件を満たす 1 は（存在すれば）一意であることが分かり，**単位元** (*identity element*) とよばれる．）
- [逆元の存在] 任意の $x \in G$ に対し，次を満たす $y \in G$ が存在する：$x * y = y * x = 1$.（なお，この条件を満たす y は（存在すれば）一意であることが分かり，x^{-1} と書かれ，x の**逆元** (*inverse element*) とよばれる．）

$x * y$ を単に xy と書くことが多い．

さらに任意の $x, y \in G$ に対して $x * y = y * x$ を満たすとき**可換** (*commutative*)，**アーベル** (*abelian*) であるという．可換なときは，演算を $+$ で表すことも多い（このとき単位元は 0 と書き逆元は $-x$ と書く）．

逆元の存在を課さないものを**モノイド** (*monoid*) とよぶ．

群 G から群 H への**群準同型** (*group homomorphism*) または群の**射** (*morphism*) とは，写像 $f\colon G \to H$ で演算と可換である（$f(xy) = f(x)f(y)$ を満たす）ものをいう．（このとき単位元は単位元にうつり逆元は逆元にうつることが示せる．）

モノイド G からモノイド H への**モノイド準同型** (*monoid homomorphism*) またはモノイドの射とは，写像 $f\colon G \to H$ で演算と可換であり単位元を単位元にうつすものをいう．（群の場合と異なり，単位元を単位元にうつすという条件は別途課す必要がある．）

定義 2.2 (環，代数)**．環** (*ring*, フランス語 *anneau*) とは，集合と，加法とよばれる 2 項演算 $+$ と，乗法とよばれる 2 項演算 $*$ の組で，$+$ に関し可換群をなし，$*$ に関し可換モノイドをなし，$+$ と $*$ に関し分配法則 ($a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$) を満たすものをいう．加法の単位元を 0，乗法の単位元を 1 で表す（どの環での単位元かを明示したいときは 0_A, 1_A などと表す）．

環の準同型とは，底集合の間の写像で，加法に関する群の準同型であり，乗法に関するモノイドの準同型であるものをいう（したがって，定義より，環の準同型 $\phi\colon A \to B$ は $\phi(1_A) = 1_B$ を満たす）．

[*6] 代数幾何ではこのような環が主に扱われるというだけです．他の分野にはそれぞれの事情があるでしょう．

環準同型 $A \to B$ をそなえた環 B，またはこの環準同型，を A **代数** (A-*algebra*)（または *algebra over* A）とよぶ．

例 2.3 (0 環)**.** $A = \{0_A\}$ なる環を 0 環とよぶ（演算はこの条件から一意的に定まる）．この条件は $0_A = 1_A$ と同値である．0 環のことを 0 で表す．

余談 2.4. 「0 環を環に含めない」流儀もあるが，局所化や剰余環やテンソル積といった種々の操作が環の範囲に収まらなくなるので推奨しない．個人的には，「空集合を集合に含めない」と同程度にナンセンスに思う．

また，「0 環は環だが，なにも断らないときは考えている環は 0 環でないとする」とする文献もあるが，同様の理由により注意が必要になる．

この講義では 0 環を除外する場合には明示的に断る．

定義 2.5 (A 加群)**.** A を環とする．A **加群** (A-*module*) とは，アーベル群 M と写像 $A \times M \to M$ の組であって，（この写像による (a, m) の像を am と書くとき，）$(a + b)m = am + bm$，$a(m + n) = am + an$，$(ab)m = a(bm)$，$1m = m$ を満たすものをいう．

M のアーベル群としての自己準同型写像全体の集合を $\mathrm{End}(M)$ は自然に（一般に可換と限らない[*7]）環になる．M に A 加群構造を与えることと（可換と限らない）環の準同型 $A \to \mathrm{End}(M)$ を与えることは同値である．

定義 2.6 (イデアル)**.** A 自身を A 加群とみなしたときの部分 A 加群を A の**イデアル** (*ideal*) という．言い換えると，0 を含み加法およびスカラー（A の元）倍で閉じている A の部分集合のことである．

A の元の族 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，これらを含む最小のイデアルを $(a_\lambda) = (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ で表す[*8]．これは具体的には a_λ のうちの有限個の A 線形結合として書ける元全体の集合，すなわち $\{\sum_{i=1}^n b_i a_{\lambda_i} \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \Lambda, b_i \in A\}$ である．有限族の場合には $(a_1, \ldots, a_n)$ のように書く．

例 2.7 (単項イデアル)**.** A の元 a に対し，イデアル $(a) = aA = \{ab \mid b \in A\}$ は a の倍数全体からなる．この形のイデアルは**単項イデアル** (*principal ideal*) または**主イデアル**とよばれる．なお，異なる元が同じ単項イデアルを与えることもある（例えば，多くの環で $-1 \neq 1$ だが明らかに $(-1) = (1) = A$ である）．

注 2.8. 一般には単項でないイデアルも存在する．整数論的には多くの 2 次体の整数環でそうであり（例えば $(2, 1 + \sqrt{-5}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は単項でない），代数幾何的には次元の高い環（例えば $(x, y) \subset k[x, y]$）を持ってくるのが簡単である．

定義 2.9 (剰余環)**.** $I \subset A$ をイデアルとすると，A の加法と乗法は（「差が I に属する」という同値関係による）商集合 A/I に well-defined な 2 項演算を誘導し，A/I に環構造が定まる．これを**剰余環** (*quotient ring*) [*9]という．商写像 $A \to A/I$ は環準同型である．

素イデアルと極大イデアルを導入したいので，対応する概念である整域と体を定義しよう．

定義 2.10 (整域)**.** 環 A が**整域** (*integral domain*)（または *domain*）であるとは，次の条件を満たすことを

[*7] いきなり本節冒頭の宣言に反しましたが，当分このようなことはないと思うのでご容赦ください．

[*8] 記号がややこしいですが．

[*9] 標準的な日本語と英語はこれだと思うのですが，標準的な対応【剰余＝ residue】【商＝ quotient】に合致していないのは奇妙ですね．

いう．

- $1 \neq 0$.
- $a, b \in A$ に対し，$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$.（$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ ならば $ab \neq 0$ といってもよい.）

2 条件をあわせて「0 でない元有限個の積もまた 0 でない（有限個の元の積が 0 ならばそのどれかが 0 である)」と言い表すこともできる．

定義 2.11 (可逆・単元・単数)**.** A の元 a が**可逆** (*invertible*) である，また**単元** (*unit*) （または**単数**）であるとは，ある元 $b \in A$ が存在して $ab = 1$ であることをいう．A の可逆元全体の集合を A^* で表し，A の単数群とよぶ：これは可換群をなす.（このとき b は一意に定まり，それを a^{-1} などと表す.）

定義 2.12 (体)**.** 環 A が**体** (*field*) であるとは，$1 \neq 0$ でありかつ 0 以外の任意の元が可逆であることをいう．これは $A^* = A \setminus \{0\}$ とも同値である．

定義 2.13 (素イデアル，極大イデアル)**.** 環 A のイデアル I が**素イデアル** (*prime ideal*) であるとは，A/I が整域であることをいう.（すなわち，$I \subsetneq A$ かつ，A の 2 元の積が I の元ならばどちらかが I の元である.）

環 A のイデアル I が**極大イデアル** (*maximal ideal*) であるとは，A/I が体であることをいう.（すなわち，I の元は非可逆であり I の補集合の元は可逆である.）

注 2.14. 素イデアルの定義は，$\mathbb{Z}$ の素数 p の性質のひとつ「$p \mid ab$ ならば $p \mid a$ または $p \mid b$」を抽象化したものである．

環 A のイデアルのうち (1) 以外のもの全体の集合を考えると，これは包含関係により順序集合をなす．この順序集合の極大元であることと極大イデアルであることは同値である．

イデアルには $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ といったドイツ文字を使うことも多く，素イデアルには $\mathfrak{p}$ など，極大イデアルには $\mathfrak{m}$ などを使うことが多い．

定理 2.15. 任意の真のイデアル $I \subsetneq A$ に対し，I を含む極大イデアルが存在する．とくに，環 A の単元でない元 a に対し，a を含む極大イデアルが存在する．とくに，0 環でない環は極大イデアルをもつ．

証明. 3 つめは 2 つめで $a = 0$ とすると従う．2 つめは 1 つめで $I = (a)$ とすると従う．1 つめは 3 つめを A/I に適用すると従う．というわけでどれを示してもよいが，1 つめを示そう．

1 つめを示すには，大雑把にいうと，イデアル $I \subsetneq (1)$ から始め,「まだ極大イデアルでないならば，適当な元を付け加えたイデアル（$\subsetneq (1)$）で置き換える」を繰り返せばよい（繰り返しは無限回かもしれない)．

きちんとした証明には Zorn の補題を用いることになる．ポイントは，真のイデアルの全順序集合が与えられたときそれらの和集合も真のイデアルになることである． □

余談 2.16. [*10]そういえば，見かけ上もう少し弱い命題「0 環でない環は素イデアルをもつ」についてはこれより簡単な証明はあるんでしょうか？

[*10] 「余談」は無視しても本筋に差し支えない部分です．脚注もそうです．

→これは実際真に弱く，（ZF 公理系上の）命題の強弱関係は，

$$\text{Zorn の補題} = \text{任意の真のイデアルは極大イデアルに含まれる} = \text{任意の非 0 環は極大イデアルをもつ}$$
$$> \text{任意の真のフィルターはウルトラフィルターに含まれる} = \text{任意の非 0 環は素イデアルをもつ}$$

だそうです．参考：`https://ncatlab.org/nlab/show/prime+ideal+theorem`.

「より弱い仮定で済む」は必ずしも「証明が分かりやすい」を意味しませんが.

2.2 環のスペクトルとその位相

定義 2.17 (スペクトル)**.** 環 A に対し，その素イデアル全体の集合を $\operatorname{Spec} A$ で表し，A の**スペクトル** (*spectrum*) とよぶ.

余談 2.18. ところでなぜ「スペクトル」という名前なのでしょうか？ 聞くところによると，関数解析において有界作用素 T に対し集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ は可逆でない }\}$ を T のスペクトルというらしく，これの類似だそうです.

定義 2.19 (スペクトルの位相)**.** 環 A とそのイデアル $I \subset A$ に対し，部分集合 $V(I) \subset \operatorname{Spec} A$ を $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ で定める．集合系 $\{V(I) \mid I \text{ は } A \text{ のイデアル }\}$ は位相空間の閉集合系の公理を満たす (問題 2.3)．これが定める位相を $\operatorname{Spec} A$ の Zariski 位相とよぶ．以下，スペクトルはつねにこの位相を入れて考える.

例 2.20. 0 環は素イデアルを 1 つももたないので，$\operatorname{Spec} 0 = \emptyset$ である．（逆に $\operatorname{Spec} A = \emptyset$ ならば $A = 0$ である（定理 2.15).）

体は極大イデアル (0) をもち，他に真のイデアルはないので，体のスペクトルは 1 点集合である.

$\mathbb{Z}$ のイデアルは（すべて単項なので）各整数 m に対する (m) であり，そのうち素イデアルは (0) と各素数 p に対する (p) であり，そのうち (0) 以外が極大イデアルである．Zariski 位相の定義に基づいて考えると，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ の閉集合とは，全体集合と，(0) を含まない有限集合である．（したがって，(0) の閉包は $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 全体である.）

多項式環 $\mathbb{C}[x]$ もすべてのイデアルが単項である．素イデアルは (0) と各 $a \in \mathbb{C}$ に対する $(x - a)$ であり，位相は $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ と同様である.

命題 2.21.
(1) 環準同型 $\phi\colon A \to B$ と素イデアル $\mathfrak{p} \subset B$ に対し，逆像 $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ も（A の）素イデアルである.
(2) 写像 $\phi^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を $\mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ で定めると，ϕ^* は（Zariski 位相に関し）連続である.

略証．$A \to B/\mathfrak{p}$ は単射環準同型 $A/\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow B/\mathfrak{p}$ を誘導し，整域の部分環は整域である.

後半については，$(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V((\phi(I)))$ が成り立つ. □

すなわち，Spec は環の圏から位相空間の圏への反変関手である.

閉集合系を与える形で位相を定義したが，次の開基も重要である.

命題 2.22. 環 A とその元 $f \in A$ に対し，部分集合 $D(f) \subset \operatorname{Spec} A$ を $D(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ で定める．集合系 $\{D(f) \mid f \in A\}$ は位相空間の開基の公理を満たし，これが定める位相は Zariski 位相に一致する.

証明は演習問題とする（問題 2.4）．

この $D(f)$ の形に書ける開集合を *principal open subset* とよぶ．（日本語訳はよく知りません．principal が単項イデアルに対応していると思えば「単項」，重要度を示唆していると思えば「主」などと訳したいところです．）

注 2.23. 素イデアルの代わりに極大イデアルのみを集めた位相空間を考えることもできる（極大スペクトルとよび，$\operatorname{Specm} A$ などと表し，位相は $\operatorname{Spec} A$ の相対位相を入れる）．欠点の 1 つは，環準同型による極大イデアルの逆像は極大イデアルとは限らないことである（問題 2.2）．ただし扱う環および環準同型を限定することでこれがほぼ問題にならないようにできる場合もある．例えば体 k 上有限生成な環の間の射による極大イデアルの逆像は必ず極大イデアルである．

注 2.24. この位相の何が嬉しいのかまだ分からないかもしれない．スペクトルは位相空間だけではなく後述の局所環付き空間（定義 4.2）として捉えるべきであり，そこまで把握するとこの位相のよさが伝わるのではないかと思う．

2.3 種々の構成とスペクトルの関係

2.3.1 剰余環

イデアルによる剰余環の定義はすでに述べた（定義 2.9）．

命題 2.25. 商準同型を $\phi\colon A \to A/I$ と書く．$\phi^*\colon \operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ は単射であり，像は $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supset I\}$ であり，像は閉集合であり，ϕ^* は像への同相写像である．

証明は演習問題とする（問題 2.5）．

注 2.26. 異なるイデアル $I, J \subset A$ に対して $\operatorname{Spec} A/I$ と $\operatorname{Spec} A/J$ が（$\operatorname{Spec} A$ の閉部分集合として）一致することもある．これらは後述の局所環付き空間（定義 4.2）としての構造で区別することができる．

2.3.2 局所化

定義 2.27 (局所化)**.** A を環，$S \subset A$ を部分集合とする．（S には現時点ではとくに条件を課さないが，後述の積閉集合についてのみ局所化を定義する方が一般的かもしれない）．A の S での**局所化** (*localization*) とは，A 代数で S の像が可逆であるもののうち普遍的なものをいう．

すなわち，局所化とは A 代数 $\phi\colon A \to B$ で次の条件を満たすものである．

- $\phi(S) \subset B^*$ である．
- $\psi\colon A \to C$ が環準同型で $\psi(S) \subset C^*$ であるとき，環準同型 $f\colon B \to C$ で $\psi = f \circ \phi$ であるものが一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & B \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & (\phi(S) \subset B^*) \\ & C & (\psi(S) \subset C^*) \end{tikzcd}$$

局所化を $S^{-1}A$ や A_S と表す．

普遍性から，局所化が存在すればそれは一意的な同型を除き一意であることが定義から（普遍性から）従う．

このことを確認しておく．$\phi_i\colon A \to B_i$（$i = 1, 2$）が局所化だとする．B_1 が（$C = B_2$ に対する）普遍性を満たすので，$f\colon B_1 \to B_2$ であって図式を可換にするものが一意に存在する（以下，可換性への言及は省略する）．B_2 が（$C = B_1$ に対する）普遍性を満たすので，$g\colon B_2 \to B_1$ が一意に存在する．B_1 が（$C = B_1$ に対する）普遍性を満たすので，$g \circ f = \mathrm{id}_{B_1}$ が成り立つ．同様に B_2 の方で $f \circ g = \mathrm{id}_{B_2}$ が成り立つ．すなわち B_1, B_2 は A 代数として同型である．

注 2.28. まだ局所化が存在することは証明していない．

定義 2.29. 環 A の部分集合 S が**積閉集合** (*multiplicatively closed set*) であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

- $1 \in S$.
- $s, s' \in S$ ならば $ss' \in S$.

2 条件をあわせて「S の元有限個の積もまた S に属する」と言い表すこともできる．

命題 2.30 (分数を用いた局所化の構成)**.** A を環，$S \subset A$ を積閉集合とする．このとき，直積集合 $A \times S$ 上の 2 項関係 $\sim$ を，

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \text{ある } S \text{ の元 } t \text{ が存在して } t(as' - a's) = 0$$

で定めると，これは同値関係になる．$A \times S$ 上の 2 項演算 $+, *$ を

$$(a, s) + (b, t) := (at + bs, st), \qquad (a, s) * (b, t) := (ab, st)$$

で定めると，これは商集合 $(A \times S)/\sim$ 上の well-defined な 2 項演算を誘導し，それらの演算により $(A \times S)/\sim$ は環をなし，$A \to (A \times S)/\sim\colon a \mapsto [(a, 1)]$ は環準同型になり，この A 代数は局所化の普遍性条件を満たす．

S が一般の（積閉と限らない）部分集合の場合，S を含む最小の積閉集合（すなわち，S の元有限個の積として書ける A の元全体の集合）を仮に $\bar{S}$ と書くと，S での局所化 A_S と $\bar{S}$ での局所化 $A_{\bar{S}}$ が一致するので，A と $\bar{S}$ に上述の構成を施すことで A_S が得られる．

注 2.31. 同値類 $[(a, s)]$ のことを分数の記法を用いて a/s, $\frac{a}{s}$ のように書くことが多い．（この記法から連想される計算規則が実際に成り立つか検討せよ．）

命題 2.32 (局所化の別の（身も蓋もない）構成)**.** A を環，$S \subset A$ を部分集合とする．（多変数）多項式環 $A[T_s \mid s \in S]$ のイデアル $(sT_s - 1 \mid s \in S)$ による剰余 A 代数 $A[T_s \mid s \in S]/(sT_s - 1 \mid s \in S)$ は局所化の普遍性条件を満たす．

略証．$sT_s = 1$ なので s は可逆である．また S の像が可逆な環 B への環準同型 $A \to B$ に対して，T_s を s の像の逆元にうつすことで環準同型 $A[T_s \mid s \in S]/(\dots) \to B$ が定まる．$\square$

命題 2.33. A を環，$S \subset A$ を部分集合とし，$\phi\colon A \to A_S$ を局所化に伴う環準同型とする．$\phi^*\colon \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ は単射であり，像は $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$ であり，ϕ^* は像への同相写像である．さらに，ある元 $f \in A$ を用いて $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と書ける場合，像は $D(f)$ に等しく，とくに開集合である．

証明は演習問題とする（問題 2.8）．

例 2.34. 1 元 $f \in A$ で生成する積閉集合 $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ での局所化は単に A_f と書くことも多い．$\operatorname{Spec} A_f = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{q}\}$ である．

$\mathfrak{p} \in A$ が素イデアルのとき $S := A \setminus \mathfrak{p}$ は積閉集合になる．このとき A_S を $A_\mathfrak{p}$ と書くことが多い[*11]．$\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ である．（すなわち $\mathfrak{p}$ に含まれる素イデアルのみが生き残るわけで，剰余環 $A/\mathfrak{p}$ の場合と対照的である．）したがって $A_\mathfrak{p}$ は局所環である．

定義 2.35. **局所環** (*local ring*) とは，極大イデアルをちょうど 1 つもつ環をいう．極大イデアルを明示するために $(A, \mathfrak{m})$ などと書くことがある．

局所環の間の**局所射** (*local morphism*) $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ とは，環の射 $\phi\colon A \to B$ であって $\mathfrak{m} = \phi^{-1}(\mathfrak{n})$ を満たすものをいう．（この条件は $\mathfrak{m} \subset \phi^{-1}(\mathfrak{n})$ や $\phi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ と同値である．）

2.3.3 テンソル積

定義 2.36 (テンソル積)**.** A を環とし，B, C を A 代数とする．B と C の A 上のテンソル積 $B \otimes_A C$ とは，A 加群としてのテンソル積に自然に積構造を入れた A 代数である．

これは B 代数かつ C 代数である環 D であって 2 つの A 代数構造（$A \to B \to D$ と $A \to C \to D$）が一致するもの，の中で普遍的なものでもある．（圏論でいうと，環の圏での pushout である．）

テンソル積のスペクトルは，剰余環や局所化の場合ほど単純ではない．位相空間のファイバー積への自然な射 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \to \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ はあるが，これは一般に同相写像ではない（問題 2.9）．

演習問題

問題 2.1 (☆)**.** $n = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ とし，$A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f = 15 = 3 \cdot 5 \in A$ とおく．（問題 2.5，2.8 の結果を使ってもよいことにする．）

(1) $\operatorname{Spec} A$ を求めよ（元を具体的に書き下し，また位相を記述せよ）．
(2) $\operatorname{Spec} A/fA$ を求めよ．
(3) $\operatorname{Spec} A_f$ を求めよ．
(4) $\operatorname{Spec} A$ が（位相空間として）連結かどうか判定せよ．

注. 位相空間 X が**連結** (*connected*) とは，$X \neq \emptyset$ であり，互いに交わらない開集合 U_1, U_2 が $X = U_1 \cup U_2$ を満たすならば $X = U_1$ または $X = U_2$ を満たすことである．2 条件を合わせて「X がどの 2 つも互いに交わらない有限個の開集合 $U_1, \ldots, U_n$ の和集合ならばある i に対して $X = U_i$ である」と言い表すこともできる．

問題 2.2 (極大スペクトル)**.** 環準同型 $\phi\colon A \to B$ と B の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で，逆像 $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset A$ が極大イデアルでない例を 1 つ挙げよ．

問題 2.3 (☆スペクトルの位相)**.** A を環とする．A のイデアル I に対し $\operatorname{Spec} A$ の部分集合 $V(I)$ が定まる（定義を復習せよ）．集合族 $\{V(I) \mid I \text{ は } A \text{ のイデアル}\}$ が閉集合系の公理を満たすことを示せ．

[*11] $A_\mathfrak{p}$ と $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$ が同義になるので奇妙な記法ですが，誤解の余地はあまりないでしょう．微妙な例としては $\mathfrak{p} = (f)$ が単項イデアルのときの A_f と $A_{(f)}$ がありますが．

問題 2.4 (☆スペクトルの位相・続き)**.** A を環とする．A の元 f に対し $\operatorname{Spec} A$ の部分集合 $D(f)$ が定まる(定義を復習せよ).

(1) Zariski 位相（問題 2.3 で定めた位相）に関して，$D(f)$ が開集合であることを示せ.

(2) $\{D(f) \mid f \in A\}$ が開基をなし，またこの集合族が（有限個の）共通部分について閉じていることを示せ.

(3) A の元の（有限と限らない）族 $(f_i)_{i\in I}$ に対して，$(D(f_i))_{i\in I}$ が $\operatorname{Spec} A$ の被覆になることと $(f_i \mid i \in I) = (1)$ とが同値であることを示せ．ただし $(f_i \mid i \in I)$ は f_i $(i \in I)$ が生成するイデアルである.

(4) $\operatorname{Spec} A$ は準コンパクトであることを示せ.

注. 本講義では,（数論幾何分野で支配的な）Bourbaki の流儀に従い,「任意の開被覆が有限部分被覆をもつ」という性質を**準コンパクト** (*quasi-compact*) とよぶ.

問題 2.5 (☆剰余環のスペクトル)**.** A を環，$I \subset A$ をイデアルとし，$\phi\colon A \to A/I$ を商準同型とする．$\phi^*\colon \operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ は単射であり，像は $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supset I\}$ であり，像は閉集合であり，ϕ^* は像への同相写像であることを確かめよ.

また，環 A と，イデアル $I, J \subset A$ で，$I \neq J$ だが $V(I) = V(J)$ となるものの例を挙げよ.

問題 2.6 (局所化)**.** 次のそれぞれの条件を満たす環 A と部分集合 $S \subset A$ の例を挙げよ.

(1) 直積集合 $A \times S$ 上の 2 項関係 $\approx$ を，$(a, s) \approx (a', s') \iff as' - a's = 0$，で定めると，同値関係にならない.

(2) 局所化に伴う環準同型 $A \to A_S$ が単射でない.

(3) $A \neq 0$ かつ $A_S = 0$.

問題 2.7 (局所化の単数群)**.** S を積閉集合とする．$A \to S^{-1}A$ による $S^{-1}A$ の単数群 $(S^{-1}A)^*$ の逆像は $S' := \{a \in A \mid$ ある元 $b \in A$ が存在して $ab \in S\}$ であることを示せ．また，$S'^{-1}A \cong S^{-1}A$ であることを示せ.

余談. $S' = S$ となるとき，S は saturated な積閉集合であるという．ただし，モノイド論における saturated とは異なる.

問題 2.8 (☆局所化のスペクトル)**.** A を環，$S \subset A$ を部分集合とし，$\phi\colon A \to A_S$ を局所化に伴う環準同型とする.

(1) $\phi^*\colon \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ は単射であり，像は $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$ であり，ϕ^* は像への同相写像であることを確かめよ.

(2) ある元 $f \in A$ を用いて $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と書ける場合，像は開集合であることを確かめよ.

(3) $S, S' \subset A$ に対し $\operatorname{Spec} A_S$，$\operatorname{Spec} A_{S'}$ を上記の対応で $\operatorname{Spec} A$ の部分集合と同一視する．$\operatorname{Spec} A_{S'} \subset \operatorname{Spec} A_S$ ならば $\phi'\colon A \to A_{S'}$ は $\phi\colon A \to A_S$ を経由する（すなわち，環準同型 $\psi\colon A_S \to A_{S'}$ が存在して $\phi' = \psi \circ \phi$ である）ことを示せ．とくに，$\operatorname{Spec} A_{S'} = \operatorname{Spec} A_S$ ならば $A_{S'} \cong A_S$ である.

問題 2.9 (テンソル積のスペクトル)**.** A を環，$f\colon A \to B$ および $g\colon A \to C$ を環準同型とする．このとき，環準同型 $B \to B \otimes_A C$, $C \to B \otimes_A C$ から誘導される写像 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \to \operatorname{Spec} B$, $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \to \operatorname{Spec} C$ は集合や位相空間としてのファイバー積とは一般に一致しないことを示せ.

注. ただし，後述の（アフィン）スキームとしてはファイバー積になる．

注 (復習：集合のファイバー積，位相空間のファイバー積)**.** S, X, Y を集合とし，$F\colon X \to S$, $G\colon Y \to S$ を写像とする．X と Y の S 上のファイバー積 (fibered product) とは，集合 W と写像 $p\colon W \to X$, $q\colon W \to Y$ の組で $f \circ p = g \circ q$ を満たすもののうち普遍的なものをいう．すなわち，W, p, q で次の条件（普遍性）を満たすものである．

- $f \circ p = g \circ q$ である．
- 集合 W' と写像 $p'\colon W' \to X$, $q'\colon W' \to Y$ が $f \circ p' = g \circ q'$ を満たすとき，写像 $\phi\colon W' \to W$ で $q \circ \phi = q'$, $p \circ \phi = p'$ を満たすものが一意に存在する．

普遍性より，ファイバー積は（存在するならば）一意的な同型を除いて一意である．この W を $X \times_S Y$ と書く．

直積集合の部分集合 $W = \{(y, z) \in Y \times Z \mid F(y) = G(z)\}$ および射影 $p\colon W \to Y$, $q\colon W \to Z$ がファイバー積の具体的な構成を与える．

「集合」「写像」を「位相空間」「連続写像」にそれぞれ置き換えることで位相空間のファイバー積を定義する．構成も同様である（W の位相は直積位相の相対位相とする）．

問題 2.10 (分離公理)**.** $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ および $\operatorname{Specm} \mathbb{Z}$（極大イデアルのなす部分空間）が T_0, T_1, T_2 の各分離公理を満たすか検証せよ．

注. ただしスキームとしての分離性がこれとは別に定義される．5.3 節を見よ．

問題 2.11 (連結性)**.** A を環とする．次が同値であることを示せ．

(1) $e^2 = e$ を満たす $e \in A$ がちょうど 2 つ存在する．
(2) $\operatorname{Spec} A$ は位相空間として連結である．

3　層

3.1　導入：層

例 3.1 (位相空間上の連続関数)**.** X, Y を位相空間とします．X の開集合 U に対し，U から Y への連続写像（全体のなす集合）を考えることができます．また，部分開集合 $V \subset U$ へ連続写像を制限することができます．重要な性質として次の張り合わせ条件があります：

> $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ を開被覆とし，$f_i\colon U_i \to Y$ を連続写像の族とし，$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ が任意の $i, j \in I$ について成り立っているとする．このとき，連続写像 $f\colon U \to Y$ で，$f|_{U_i} = f_i$ が任意の $i \in I$ について成り立つものが一意に存在する．

平たく言うと，局所的に連続写像が定まっており矛盾がなければ大域的な連続写像が定まる；連続写像を定めるには開被覆に関して局所的に定めればよい，ということです．

一般の（開と限らない）集合族による被覆ではこれは成り立たないことに注意しましょう．

例 3.2 (C^∞ 多様体間の C^∞ 関数，複素多様体間の複素正則関数)**.** 例 3.1 の「位相空間」を「C^∞ 多様体」（resp. 「複素多様体」）に置き換えて，「連続写像」を「C^∞ 関数」（resp. 「複素正則関数」）に置き換えても同

様のことが成り立ちます．

開集合ごとに何かが定義され，部分開集合へ制限でき，局所的な（U_i 上の）対象から大域的な（U 上の）対象を復元できるという性質（張り合わせ条件），を記述するための概念として層というものがありますので，本節ではまずこの層の概念およびいくつか関係する概念を導入し，その後 3.8 節で環 A のスペクトル $\operatorname{Spec} A$ に乗せる "正則関数" の層を説明します．

3.2 用語の準備

本節で使う用語をいくつか準備しておきます．

3.2.1 差核・等化子，完全列

定義 3.3 (差核・等化子)**.** 集合の写像の図式

$$A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C$$

において f が g, h の**差核** (*difference kernel*) または**等化子** (*equalizer*) であるとは，f が A から $\{b \in B \mid g(b) = h(b)\}$ への全単射であることをいう．（このときとくに f は単射である．）

同値な言い換え：$hf = gf$ となる写像のなかで普遍的なものである．

定義 3.4 (完全列)**.** アーベル群の準同型の図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が（B で）**完全** (*exact*) であるとは，$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ であることをいう．さらに，群と準同型のもっと長く続く図式（系列）

$$\cdots \to A \to B \to C \to \ldots$$

が完全であるとは，両端を除く各所で同様の等式が成り立つことをいう．

A, B, C がアーベル群で f, g, h が準同型のとき，f が g, h の差核（定義 3.3）であることと，$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g-h} C$ が完全（定義 3.4）であることは同値である．

3.2.2 順系，順極限，逆系，逆極限

定義 3.5 (有向集合)**.** 順序集合 I が**有向** (*directed*) である（I が**有向集合** (*directed set*) である）とは，空でなく，かつ任意の 2 元 $i, j \in I$ に対してある $k \in I$ が存在して $i \leq k$ かつ $j \leq k$ を満たすことをいう．

同値な言い換え：任意の有限部分集合 $S \subset I$ に対し，S の上界が存在する．

例 3.6. 最大元をもつ順序集合は明らかに有向だが，この場合は以降の話は自明になる[*12]．

全順序集合は明らかに有向である．とくに，$\mathbb{N}$ は有向である．

X を位相空間，$x \in X$ を点とすると，x の近傍系が逆包含関係に関してなす順序集合は有向である．基本近傍系も同様である．

[*12] もともと順序関係の定義は左右に関して対称だが，この後の話は右側にどんどん伸びている順序集合をイメージするとよいと思います．

定義 3.7 (共終部分集合)**.** 順序集合 I の部分集合 $J \subset I$ が**共終** (*cofinal*) であるとは，任意の $i \in I$ に対してある $j \in J$ が存在して $i \leq j$ を満たすことをいう．

例 3.8. $\mathbb{N}$ の無限部分集合は共終である．

位相空間 X の点 x の基本近傍系は近傍系の共終な部分集合である（前述のように逆包含関係を入れている）．

定義 3.9 (順系・帰納系)**.** I を順序集合とする．I で添字づけられた集合の**順系** (*direct system*) または**帰納系** (*inductive system*) とは，I で添字づけられた集合族 $(M_i)_{i\in I}$ と，$\{(i,j) \in I \times I \mid i \leq j\}$ で添字づけられた写像の族 $(f_{i,j}\colon M_i \to M_j)_{i\leq j}$ との組であって，$f_{i,i} = \mathrm{id}_{M_i}$ および（$i \leq j \leq k$ に対し）$f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ を満たすものをいう[*13]．

アーベル群（，……）の順系とは，各 M_i がアーベル群（，……）であり，各 $f_{i,j}$ がアーベル群（，……）の射であるものをいう．

順系 $((M_i),(f_{i,j}))$ から順系 $((N_i),(g_{i,j}))$ の射とは，射の族 $(\phi_i\colon M_i \to N_i)_{i\in I}$ であって可換性（$\phi_j \circ f_{i,j} = g_{i,j} \circ \phi_i$）を満たすものをいう．

$f_{i,j}$ は例えば**推移写像** (*transition map*) などとよばれる．

定義 3.10 (順極限・帰納極限)**.** I で添字づけられた集合（，……）の順系 (M_i) の**順極限** (*direct limit*) または**帰納極限** (*inductive limit*) （または帰納的極限）とは，集合（，……）N と集合（，……）の射の族 $g_i\colon M_i \to N$ の組であって，推移写像と可換である（$g_i = g_j \circ f_{i,j}$ を満たす）もののうち普遍的なものである．（すなわち，P と $h_i\colon M_i \to P$ が $h_i = h_j \circ f_{i,j}$ を満たすならば，射 $\phi\colon N \to P$ が一意に存在して $\phi \circ g_i = h_i$ を満たす．）

順極限を $\varinjlim_{i\in I} M_i$ で表す．

注 3.11. 極端な場合として，I が最大限 $i_{\max}$ をもつ場合，$M_{i_{\max}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} M_i$ である．

別の極端な場合として，I が離散的な順序集合（どの相異なる 2 元の間にも大小関係がない）ならば，順極限は集合の直和，アーベル群や A 加群の直和，環や A 代数のテンソル積である．

注 3.12. 応用上は，順序集合 I を明示するのではなく，元 i が満たすべき条件を $\varinjlim$ の下に列挙する形で表記することも多い．後述の逆系・逆極限も同様である．

余談 3.13. I については，実は順序集合より弱く前順序集合（2 項関係に反射律と推移律は要請するが反対称律を要請しない）でも本小節の議論は全く同様にできる．後述の逆系・逆極限も同様である．

命題 3.14. I が有向ならば，集合またはアーベル群または A 加群または環または A 代数の順系に対し，順極限が存在する．

注 3.15. 実は有向でなくても存在するが，有向を仮定した方が証明が楽になる．

証明. アイデアとしては，まずほしい元（各 M_i の像や，それらの和などとして書けるもの）をすべてかき集めて，それらの元の間のほしい関係式（推移写像との可換性，A 加群としての準同型性など）が成り立つように商をとればよい．普遍性の証明は，ほしい元の行先は P にあるはずで，ほしい関係式は P でも成り立って

[*13] ところで，$f_{i,j}$ のことを f^i_j のように書く記法もありそうです（M_i にぶつけると上下の添字 i が相殺して M_j にいたる気持ち）．

いるはずなので，well-defined な写像が定まる．

まず集合の場合を示す．集合としての直和 $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ を同値関係 $\sim$ で割った集合を $N := (\bigsqcup_{i\in I} M_i)/{\sim}$ とし，$g_i \colon M_i \to N$ を自然な写像とする．ここで，$s \in M_i$ と $t \in M_j$ に対し $s \sim t \overset{\text{def}}{\iff} \exists k \in I, f_{i,k}(s) = f_{j,k}(t)$ と定める[*14]．するとこれが順極限の条件を満たす．

A 加群や A 代数の順系の場合，有向性の仮定の下で，集合としての順極限に加法などの演算が入り，A 加群や A 代数としての順極限になる．例えば，$s \in M_i$ と $t \in M_j$ の同値類 $[s], [t] \in \varinjlim M_i$ の和は，$i \leq k$ かつ $j \leq k$ を満たす $k \in I$ をとって $[f_{ik}(s) + f_{jk}(t)]$ と定める：これが well-defined になることが確かめられる．結合法則なども，登場する元に応じて適当な $k \in I$ のレベルで確かめればよい．

有向性を仮定しない場合，A 加群や A 代数の順極限に関しては，共通の $k \in I$ に行けない場合にも演算を定義する必要があるため，同値関係で割る前の段階を少し工夫する必要がある．

詳細は問題 3.7. □

命題 3.16. I が有向な順序集合で，$J \subset I$ が共終な部分集合で，$(M_i)_{i\in I}$ が順系のとき，これの順極限と $(M_i)_{i\in J}$ の順極限は（存在するか否かを含めて）一致する．

略証. 推移写像と可換な族 $(g_i \colon M_i \to N)_{i\in J}$ が与えられたとき，これが族 $(g_i \colon M_i \to N)_{i\in I}$ に一意的に延長できることを確認すればよい．（なぜかというと，X が順極限であるとは，任意の対象 N に対し $\mathrm{Hom}(X, N)$ がそのような族全体の集合に一致するということに他ならないので.）

$i \in I$ をとる．共終性から $i \leq j$ なる $j \in J$ が存在するので $g_i := g_j \circ f_{i,j}$ とする．これが well-defined である，すなわち $j, j' \in J$ に対して同じ結果になることを確かめよう．有向性と共終性から $j, j' \leq j''$ なる $j'' \in J$ をとれて，どちらも $g_{j''} \circ f_{i,j''}$ に一致するのでよい．$i \leq i'$ のときに推移写像と可換なことは容易． □

注 3.17. 似た単語 direct と directed が使われている理由ですが，よく分かりません．なお，direct limit や inductive limit を I が有向の場合に限定している文献もありそうです．

次に，矢印の向きを逆にしたものを考える．

定義 3.18 (逆系・射影系)**.** I を逆序集合とする．I で添字づけられた集合の**逆系** (*inverse system*) または**射影系** (*projective system*) とは，I で添字づけられた集合族 $(M_i)_{i\in I}$ と，$\{(i,j) \in I \times I \mid i \leq j\}$ で添字づけられた写像の族 $(f_{i,j} \colon M_j \to M_i)_{i\leq j}$ との組[*15]であって，$f_{i,i} = \mathrm{id}_{M_i}$ および（$i \leq j \leq k$ に対し）$f_{i,j} \circ f_{j,k} = f_{i,k}$ を満たすものをいう．

アーベル群（, ……）の逆系とは，各 M_i がアーベル群（, ……）であり，各 $f_{i,j}$ がアーベル群（, ……）の射であるものをいう．

定義 3.19 (逆極限・射影極限)**.** I で添字づけられた集合（, ……）の逆系 (M_i) の**逆極限** (*inverse limit*) または**射影極限** (*projective limit*) （または射影的極限）とは，集合（, ……）N と集合（, ……）の射の族 $g_i \colon N \to M_i$ の組であって，推移写像と可換である（$g_i = f_{i,j} \circ g_j$ を満たす）もののうち普遍的なものである．（すなわち，P と $h_i \colon P \to M_i$ が $h_i = f_{i,j} \circ h_j$ を満たすならば，射 $\phi \colon P \to N$ が一意に存在して $g_i \circ \phi = h_i$ を満たす.）

[*14] より直感的には，各 $i \leq j$ と各 $s \in M_i$ に対し $f_{ij}(s) \approx s$ とし，$\approx$ を含む最小の同値関係で割ればよい（この同値関係が $\sim$ に他ならない）．

[*15] 向きが逆になっていることに注意．

逆極限を $\varprojlim_{i\in I} M_i$ で表す.

注 3.20. 極端な場合として，I が最大限 $i_{\max}$ をもつ場合，$\varprojlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{\sim} M_{i_{\max}}$ である.

別の極端な場合として，I が離散的な順序集合ならば，逆極限は集合や A 加群や A 代数の直積である.

命題 3.21. 集合またはアーベル群または A 加群または環または A 代数の逆系に対し，逆極限が存在する.

証明. まず集合の場合を示す．集合としての直積 $\prod_{i\in I} M_i$ の部分集合 $N := \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{i,j}(m_j) = m_i\}$ および自然な写像 $g_i : N \to M_i$ が逆極限の条件を満たす.

A 加群や A 代数の場合は，集合としての逆極限に自然に演算が入り A 加群や A 代数になる. □

命題 3.22. I が有向な順序集合で，$J \subset I$ が共終な部分集合で，$(M_i)_{i\in I}$ が逆系のとき，これの逆極限と $(M_i)_{i\in J}$ の逆極限は（存在するか否かを含めて）一致する.

略証. 命題 3.16 と全く同様. □

3.3 位相空間上の前層と層

X を位相空間とし，X の開集合系を $\mathrm{Open}(X)$ で表すことにする*16.

定義 3.23 (前層)**.** X 上のアーベル群の**前層** (*presheaf (of abelian groups)*, フランス語 *préfaisceau*) P とは，次のデータ (1),(2) であって，条件 (3),(4) を満たすものをいう.

(1) 各開集合 $U \in \mathrm{Open}(X)$ に対し，アーベル群 $P(U)$.（これの元を P の U 上の**切断** (*section*) とよぶ.）
$P(U)$ を $\Gamma(U, P)$ と書くこともある*17.

(2) 包含関係にある 2 開集合 $U, V \in \mathrm{Open}(X)$，$V \subset U$，に対し，準同型 $r_{VU} : P(U) \to P(V)$.（これを**制限写像** (*restriction*) とよぶ.）
前層 P を明示したいときには制限写像を r^P_{VU} と書くこともある.

(3) 各 $U \in \mathrm{Open}(X)$ に対し $r_{UU} = \mathrm{id}_{P(U)}$.

(4) 包含関係にある 3 開集合 $U, V, W \in \mathrm{Open}(X)$，$W \subset V \subset U$，に対し，$r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$.

「アーベル群」を集合，群，環，A 加群，A 代数などに言い換えて,「準同型」も適切に言い換えることで，集合などの**前層** (*presheaf of sets, ...*) も同様に定義する.

なお，$s \in P(U)$ および $V \subset U$ に対して，$r_{VU}(s)$ のことを $s|_V$ とも書き，これを s の V への**制限**とよぶ.

余談 3.24. すなわち前層とは，逆包含関係に関する順序集合 $(\mathrm{Open}(X), \supset)$ で添字づけられた順系である*18.

圏論でいうと，前層とは $\mathrm{Open}(X)$（が包含関係に関してなす順序集合が定める圏）からアーベル群 (, ……) の圏への反変関手である．行先の圏は今のところは何でもよいが，茎などを使う際には直積や順極限をもつなどの性質が必要になる.

---

*16 位相空間論において開集合系を $\mathcal{O}_X$ と表す記法も一般的ですが，この記号は構造層のためにとっておきます.

*17 P の部分が複雑になるとこの方が見やすい.

*18 この方が（包含関係に関する逆系というより）都合がよい.

注 3.25. 文献によってはこれに加えて $P(\emptyset)=0$ という条件[*19]を課すものもある（その方が多い？）ので注意が必要である．なお，前層 P が層（後述）ならばこの条件は必ず成り立つ．私は前層にあえてこの条件を課す必要はないと思っているが，私は普段前層（で層にならないもの）を使わないので，あまり参考にならないかもしれない．

例 3.26 (定数前層)**.** X を位相空間とし，M をアーベル群とする．次のデータは X 上のアーベル群の前層 ${}^{\mathrm{p}}\underline{M}$ を定める[*20]．これを**定数前層** (*constant presheaf*) とよぶ．アーベル群に限らず集合などの場合も同様である．

任意の U に対して ${}^{\mathrm{p}}\underline{M}(U)=M$, 任意の $V\subset U$ に対して $r_{VU}=\mathrm{id}_M\colon {}^{\mathrm{p}}\underline{M}(U)\to {}^{\mathrm{p}}\underline{M}(V)$.

定義 3.27 (層)**.** 集合（やアーベル群や A 加群や A 代数など）の前層 F が**層** (*sheaf*, フランス語 *faisceau*) であるとは，任意の $U\in\mathrm{Open}(X)$ およびその任意の開被覆 $U=\bigcup_{i\in I}U_i$（$U_i\in\mathrm{Open}(X)$）に対して次の条件が成り立つことをいう：

- $i\in I$ で添字づけられた族 $(s_i)\in\prod_{i\in I}F(U_i)$ が，任意の $i,j\in I$ に対して $s_i|_{U_{ij}}=s_j|_{U_{ij}}$ を満たすならば，元 $s\in F(U)$ が**一意に**存在して $s|_{U_i}=s_i$ を満たす．ここで $U_{ij}:=U_i\cap U_j$ である．

言い換えると，次の図式が差核図式であることをいう：

$$F(U)\xrightarrow{r_{U_iU}}\prod_{i\in I}F(U_i)\underset{r_{U_{ij}U_j}}{\overset{r_{U_{ij}U_i}}{\rightrightarrows}}\prod_{i,j\in I}F(U_{ij}).$$

F がアーベル群などの前層のときは，F が層であることは

$$0\to F(U)\xrightarrow{r_{U_iU}}\prod_{i\in I}F(U_i)\xrightarrow{r_{U_{ij}U_i}-r_{U_{ij}U_j}}\prod_{i,j\in I}F(U_{ij})$$

が完全であることと同値である．

定義 3.28 (（前）層の準同型)**.** F,G を位相空間 X 上のアーベル群などの前層とする．F から G への（前層の）準同型または射とは，各開集合 $U\in\mathrm{Open}(X)$ に対する準同型 $\phi(U)\colon F(U)\to G(U)$ の族であって，包含関係にある 2 開集合 $V\subset U$ に対し次の図式が可換になるものをいう．

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & G(U) \\ \downarrow{\scriptstyle r^F_{VU}} & & \downarrow{\scriptstyle r^G_{VU}} \\ F(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & G(V). \end{array}$$

層の準同型とは前層としての準同型をいう．

余談 3.29. 逆系の射といってもよい．

圏論でいうと，関手の自然変換である．

例 3.30 (連続関数のなす層)**.** X,Y を位相空間とする．X の開集合 U に対して $F(U)$ を U から Y への連続写像全体の集合とし，$r_{VU}\colon F(U)\to F(V)$ を（連続）写像の制限とすると，集合の前層が定まる．これは層

[*19] 集合の前層の場合は右辺は 1 点集合とする．一般の圏に値をもつ前層の場合は右辺は終対象とする．
[*20] 添字の p は presheaf の頭文字で，後述の定数層と区別するためにつけています．

になる（問題 3.1：練習のために示してみよう）．さらに Y が例えば $\mathbb{R}$ ならば，$F(U)$ に $\mathbb{R}$ 代数の構造が入り，$\mathbb{R}$ 代数の層になる．

例 3.31 (正則関数のなす層)**.** X, Y を複素多様体とし，X の開集合 U に対して $F(U)$ を U から Y への正則写像全体の集合とし，r_{VU} を（正則）写像の制限とすると，集合の前層が定まる．これも層になる．さらに Y が例えば $\mathbb{C}$ ならば，$\mathbb{C}$ 代数の層になる．

例 3.32 (連続写像のセクションのなす層)**.** $\pi\colon E \to X$ を位相空間の連続写像とする．$F(U)$ を π の U 上のセクション[*21]全体の集合，すなわち

$$F(U) := \{s\colon U \to E \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U\}$$

とし，制限写像を写像の制限で定めると，F は集合の層になる．

Y が離散位相空間のとき，$\mathrm{pr}_2\colon E = Y \times X \to X$ のセクションの層は例 3.30 の層に一致する．

実は任意の（集合の）層は例 3.32 の形に表せる．X 上の層 F に対し，その**層空間** (*étalé space*, フランス語 *espace étalé*) [*22]（問題 3.4）を $E \to X$ とすると，$E \to X$ のセクションのなす層は F に自然に同型である．ただし，$Y \to X$ のセクションのなす層の層空間は一般に Y と同型でない．

3.4 （前）層の茎

複素解析においてしばしば「1 点 x の周りで定義された正則関数」を考えた．一般の層に対しても同様の概念がある．

定義 3.33 (茎)**.** X を位相空間，$x \in X$ を点，F を（集合，アーベル群，A 加群，A 代数などの）前層または層とする．F の x での**茎** (*stalk*) F_x を

$$F_x := \varinjlim_{U \in \mathrm{Open}(X),\, U \ni x} F(U)$$

で定義する．すなわち，x を含む X の開集合 U に関する順極限である．茎の元のことを x での**芽** (*germ*) とよぶ[*23]．

$F(U) \to F_x$ による $s \in F(U)$ の像を s_x と書く．

つまり，F の x での芽とは，x のある開近傍上で定義された F の切断の同値類である．F がアーベル群(，……）の前層ならば F_x もアーベル群（，……）である．

前層の射 $\phi\colon F \to G$ は，（各 U での $\phi(U)$ と可換な）各点 x での茎の射 $\phi_x\colon F_x \to G_x$ を誘導する．

注 3.34. アーベル群の層の間の射 $\phi\colon F \to G$ に対して，ϕ が同型射であることと各点 x での $\phi_x\colon F_x \to G_x$ が同型射であることが同値であるという事実を後に扱う（命題 10.3）．

[*21] この「セクション」の定義は次の行に書いてある式です．この用語と層の切断（section）の時間的前後関係には詳しくありません．

[*22] フランス語の発音は「エスパス・エタレ」のような感じです．日本語訳として「エタール空間」とも言われるようですが，フランス語を読めない人が訳したのでしょうか？ なお，後々出てくるエタール射・エタール位相は étale なので別の単語です（語源が同じなのかどうかは分かりません）．

[*23] 生物の素養がないので，茎・芽がどういうメタファーなのかは分かりません．

3.5 前層の層化

定義 3.35. X を位相空間，P を X 上の前層とする．X 上の層 F と（前層の）射 $\phi\colon P \to F$ の組が P の**層化** (*sheafification*)（または *associated sheaf* であるとは，これが P から層への射の中で普遍的であることをいう，すなわち，任意の層 G と任意の射 $\psi\colon P \to G$ に対し射 $f\colon F \to G$ で $\psi = f \circ \phi$ であるものが一意に存在する．

このの F のことを $a(P)$ で表す（a はおそらく associated の頭文字）．

$$\begin{tikzcd} \text{前層 } P \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \text{層 } F \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & \text{層 } G \end{tikzcd}$$

命題 3.36. 集合またはアーベル群（または……）の任意の前層に対し層化が存在する．

前層の射 $P \to P'$ は自然に層の射 $a(P) \to a(P')$ を与え，この対応は恒等射および合成を保つ．

圏論的に言うと，層化は関手 a を定め，随伴 $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(P, i(G)) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/X\}}(a(P), G)$ が成り立つ（i は層を前層とみなす忘却関手）．ただしこの $=$ は自然な全単射による同一視を意味する．

略証．後半：普遍性から容易に従う．

前半：いろいろな構成がある．例えば，層空間の構成（問題 3.4）を前層 P に適用しセクションのなす層を考えるとこれが層化になる．または，まず 1 点集合 $\{x\}$ 上の前層が層であることが $\emptyset$ で $\{0\}$ になることと同値であることを確認し，各点 $x \in X$ に対し $i_x\colon \{x\} \to X$ とおくとき $P \to \prod_{x \in X} (i_x)_* P_x$ が層への射になることを確認し，この像を含む最小の層をとればよい．または，命題 13.12 の 1 つめの証明を見よ． □

例 3.37 (定数層)**.** M をアーベル群または集合とする．${}^{\mathrm{p}}\underline{M}$ を対応する定数前層（例 3.26）とする．すなわち，${}^{\mathrm{p}}\underline{M}(U) = M$ だが，右辺を U から M への "定数写像" 全体の集合と同一視できる[*24]．

${}^{\mathrm{p}}\underline{M}$ の層化 $a({}^{\mathrm{p}}\underline{M}) =: \underline{M}$ は，例 3.30 で $Y = M$（離散位相）としたものに一致する．すなわち，U での切断は U から M への局所定数写像である．この $\underline{M}$ を（M に値をとる）**定数層** (*constant sheaf*) とよぶ．単に M で表すことも多い．

3.6 層の順像と逆像

$f\colon Y \to X$ を位相空間の連続写像とする．Y 上の層から X 上の層を与える操作や，X 上の層から Y 上の層を与える操作がいくつかある．

定義 3.38 (（前）層の順像)**.** F を Y 上の前層とする．切断と制限写像を

- $U \in \mathrm{Open}(X)$ に対し，$(f_*F)(U) := F(f^{-1}(U))$
- $U, V \in \mathrm{Open}(X)$，$V \subset U$，に対し，$r^{f_*F}_{VU} = r^F_{f^{-1}(V), f^{-1}(U)}$

[*24] 本講義での定数前層の定義において，これが $U = \emptyset$ でも正しくなるためには "定数写像" は一般に写像でないように定義せざるを得ない．ただ定数前層の定義の方を ${}^{\mathrm{p}}\underline{M}(\emptyset)$ が 1 点集合になるようにしているならば通常の意味の空集合上の写像になる．

と定めることにより前層 f_*F が定まる．f_*F を f による F の**順像** (*direct image*) という．F が層ならば f_*F も層になる．

略証．前層になることは明らか．

X での開被覆 $U = \bigcup U_i$ に関する f_*F の張り合わせ条件を示そう．定義に沿って書き換えると，これは Y での開被覆 $f^{-1}(U) = \bigcup f^{-1}(U_i)$ に関する F の張り合わせ条件に他ならない． □

定義 3.39 (層の逆像)**.** $f\colon Y \to X$ を位相空間の連続写像とする．X 上の（集合，アーベル群，……の）前層 P に対し，その**逆像** (*inverse image*) $f^{\mathrm{p}}P$ を，

$$(f^{\mathrm{p}}P)(V) = \varinjlim_{U \supset f(V),\, U \in \mathrm{Open}(X)} P(U)$$

および自然な制限写像で定義する．

X 上の（集合，アーベル群，……の）層 F に対し，F の（層としての）逆像 $f^{-1}F$ を，前層としての逆像 $f^{\mathrm{p}}F$ の層化として定義する*25．

命題 3.40 (逆像と順像の随伴性)**.** $f\colon Y \to X$ を連続写像とする．

(1) Y 上の前層 F と X 上の前層 G に対し，$\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/Y\}}(f^{\mathrm{p}}F, G) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(F, f_*G)$ が成り立つ．
(2) Y 上の層 F と X 上の層 G に対し，$\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/Y\}}(f^{-1}F, G) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/X\}}(F, f_*G)$ が成り立つ．

ただしこの $=$ は自然な全単射による同一視を意味する．

証明．(1) 左辺の元は，各 $V \in \mathrm{Open}(Y)$ に対する射 $\varinjlim_{U \supset f(V),\, U \in \mathrm{Open}(X)} F(U) \to G(V)$ の族で制限写像と可換なものだが，順極限の普遍性より，結局これは $\{(V, U) \in \mathrm{Open}(Y) \times \mathrm{Open}(X) \mid f(V) \subset U\}$ の各元に対する射 $\phi_{V,U}\colon F(U) \to G(V)$ の族であって，$V' \subset V$ および $U' \subset U$ を満たす 2 元 $(V', U'), (V, U)$ に対する制限写像と可換なもの，と言い換えられる．とくに $V = f^{-1}(U)$ に対する $\phi_{f^{-1}(U),U}\colon F(U) \to G(f^{-1}(U)) = (f_*G)(U)$ を並べることで右辺の元を得る．

一方，右辺の元は，各 $U \in \mathrm{Open}(X)$ に対する射 $\psi_U\colon F(U) \to G(f^{-1}(U))$ の族で制限写像と可換なものだが，前段落のような (V, U) に対し ψ_U と制限写像 $G(f^{-1}(U)) \to G(V)$ の合成を並べることで左辺の元を得る．

この対応が互いに逆を与えることは容易に確かめられる．

(2) 左辺は (1) の左辺に等しく（前層の層化の普遍性），右辺は明らかに (1) の右辺に等しい． □

例 3.41. 1 点位相空間 $Y = \{y\}$ に対し，Y 上の層 F とその大域切断 $F(Y)$ と茎 F_y は自然に同一視できる．1 点位相空間からの射 $\{y\} \to X$ に関する逆像は y の像での茎と等価である．

Y が X の開集合（で f が包含写像）のとき，前層としての逆像 $f^{\mathrm{p}}F$ の V での切断の定義に登場する U として $f(V)$ 自身をとれるので，この $f^{\mathrm{p}}F$ は結局 F の開集合 $U \subset X$ への制限 $F|_U$（定義域を $\mathrm{Open}(U) \subset \mathrm{Open}(X)$ に制限したもの）に他ならず，とくに層であり，この場合も層化をとるまでもない．

命題 3.42 (順像と逆像の関手性)**.** $g\colon Z \to Y, f\colon Y \to X$ を連続写像とする．

(1) Z 上の前層 F に対し $f_*g_*F = (f \circ g)_*F$ である．

*25 記号 f^* もよく使われるが，この記号は局所環付き空間の $\mathcal{O}$ 加群の層としての逆像のためにとっておきます．

(2) X 上の前層 G に対し $g^{\mathrm{p}} f^{\mathrm{p}} F = (f \circ g)^{\mathrm{p}} G$ である．

(3) X 上の層 G に対し $g^{-1} f^{-1} G = (f \circ g)^{-1} G$ である．

証明．(1) 定義から容易に分かる．

(2), (3) 直接示すこともできるが，ここでは (1) と随伴性（命題 3.40）から示してみる．どちらも同様なので (3) の方で説明する．Z 上の任意の層 F に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/Z\}}(F, (f \circ g)^{-1} G) &= \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/X\}}((f \circ g)_* F, G) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/X\}}(f_* g_* F, G) \\ &= \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/Y\}}(g_* F, f^{-1} G) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/Z\}}(F, g^{-1} f^{-1} G)\end{aligned}$$

が成り立つ．米田の補題を知っていれば，これが $(f \circ g)^{-1} G = g^{-1} f^{-1} G$ を意味することが分かる．知らない人向けに説明すると，F として $(f \circ g)^{-1} G$（resp. $g^{-1} f^{-1} G$）をとったときの左辺（resp. 右辺）の元 id に対応する右辺（resp. 左辺）の元が同型射を与えることが，自然性から分かる． □

系 3.43 (逆像は茎を保つ)**.** $f \colon Y \to X$ を位相空間の連続写像とする．X 上の層 F と点 $y \in Y$ に対し，$(f^{-1} F)_y = F_{f(y)}$ である．前層についても同様である．

証明．例 3.41 で述べたように，茎と一点集合への逆像は同一視できる．$\{y\} \to Y \to X$ に関する逆像について命題 3.42(3) を適用する． □

命題 3.44 (層化は茎を保つ)**.** X を位相空間，$x \in X$ を点，P を X 上の前層とすると，$P_x \to (aP)_x$ は同型である．

証明．これも随伴性と米田の補題を適当に使えばよい． □

3.7 零延長

X の開集合上の層から X 上の層を与える関手として，順像のほかに重要なものがもう 1 つあり，命題 10.6 で応用される．

定義 3.45 (層の零延長)**.** X を位相空間，$U \subset X$ を開集合とし，埋め込み写像を $j \colon U \to X$ と書く．まず，U 上のアーベル群の前層 P に対し，X 上の前層 $j_{!\mathrm{p}} P$ を，

$$V \mapsto \begin{cases} P(V) & (V \subset U) \\ 0 & (V \not\subset U) \end{cases}$$

で定義する．次に，U 上のアーベル群の層 F に対し，X 上の層を $j_! F := a(j_{!\mathrm{p}} F)$ で定める．これを F の j による**零延長** (*extension by zero*) という[*26]．

集合の層に対しても 0 を空集合で置き換えて同様に定義できるが，本講義では登場しない．

注 3.46. $V \not\subset U$ でも $(j_! F)(V) = 0$ とは限らない．簡単な例としては，V が U に含まれる開集合 V_1 と $X \setminus U$ に含まれる開集合 V_2 の和集合ならば，$(j_! F)(V) = (j_! F)(V_1) = F(V_1)$ である．

命題 3.47 (零延長と逆像の随伴性)**.** $j \colon U \to X$ を位相空間の開埋め込みとする．

[*26] 層の方の $j_!$ は一般的な記号ですが，前層の方の $j_{!\mathrm{p}}$ はそうでもないと思います．

(1) U 上の前層 P と X 上の前層 Q に対し，$\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/U\}}(P, j^{\mathrm{p}}Q) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(j_{!\mathrm{p}}P, Q)$ が成り立つ．

(2) U 上の層 F と X 上の層 G に対し，$\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/U\}}(F, j^{-1}G) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/X\}}(j_!F, G)$ が成り立つ．

証明．(1) 容易．

(2) (1) と，層化の随伴性と，いま j は開埋め込みなので層 G に対して $j^{\mathrm{p}}G = j^{-1}G$ であることから従う． □

命題 3.48 (零延長の茎)**.** $(j_{!\mathrm{p}}P)_x = \begin{cases} P_x & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$，$(j_!F)_x = \begin{cases} F_x & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$ である．

証明．前層については，定義から簡単に確認できる．層の場合は，層化は茎を保つ． □

$j_!F$ から j_*F へ自然な射がある．これの像の記述については命題 10.7 を見よ．

3.8 環のスペクトルの構造層

環 A に対し，$\operatorname{Spec} A$ 上の “正則関数” を定義しその層 $\mathcal{O}$ を考えたい．$\mathcal{O}$ が満たすべき条件として，まず $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) = A$ であってほしい．次に，$f \in A$ に対し，開集合 $D(f) \subset \operatorname{Spec} A$ は $\operatorname{Spec} A_f$ と同一視できるうえ $D(f) = D(f')$ ならば $A_f = A_{f'}$ であった（問題 2.8）ので，$\mathcal{O}(D(f)) = A_f$ であってほしい．実はこの条件を満たす層が一意に存在する．そのことの証明のための道具を導入する．

定義 3.49 ($\mathscr{B}$ 層)**.** X を位相空間とし，$\mathscr{B}$ を開基で有限個の共通部分で閉じているものとする．X 上のアーベル群（，……）の $\mathscr{B}$ 前層とは，定義 3.23 において，$\mathrm{Open}(X)$ をすべて $\mathscr{B}$ に置き換えて定義されるものである．X 上のアーベル群（，……）の $\mathscr{B}$ **層** (*$\mathscr{B}$-sheaf*) とは，定義 3.27 において，前層を $\mathscr{B}$ 前層に置き換え $\mathrm{Open}(X)$ をすべて $\mathscr{B}$ に置き換えて定義されるものである．すなわち，$\mathscr{B}$ に属する開集合上での切断および $\mathscr{B}$ に属する開集合間の制限写像が定義されており，関手性を満たし，$\mathscr{B}$ の元の $\mathscr{B}$ の元による被覆に関する張り合わせ条件が成り立っているものである．

$\mathscr{B}$ 前層の準同型または射とは，定義 3.28 において，$\mathrm{Open}(X)$ をすべて $\mathscr{B}$ に置き換えて定義されるものである．$\mathscr{B}$ 層の射とは $\mathscr{B}$ 前層としての射をいう．

なお，「$\mathscr{B}$ 層」がどれぐらい一般的な用語かはよく知らない（[Liu02, Sections 2.2–2.3] に倣った）．ちなみに，$\mathscr{B}$ 層は Grothendieck 位相（例 12.4(2) 参照）に関する層とみなせるので，そちらの理論を用いても次の命題が証明できるらしい．

命題 3.50. X を位相空間とし，$\mathscr{B}$ を開基で有限個の共通部分で閉じているものとする．このとき，X 上の層 F に対して X 上の $\mathscr{B}$ 層 $F|_{\mathscr{B}}$ が自然に定まるが，この対応は層と $\mathscr{B}$ 層の間の一対一対応を与える*[27]．言い換えると，任意の $\mathscr{B}$ 層は層に一意的に延長できる．

また，X 上の層の射 $\phi\colon F \to G$ に対して $\mathscr{B}$ 層の射 $\phi|_{\mathscr{B}}\colon F|_{\mathscr{B}} \to G|_{\mathscr{B}}$ が自然に定まるが，この対応は全単射 $\mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}(F|_{\mathscr{B}}, G|_{\mathscr{B}})$ を与える．

証明．前半：問題 3.3．なお，$\mathscr{B}$ 層 F の層への延長（これも F で表す）は，任意の開集合に対し $\mathscr{B}$ の元による被覆が存在することと，$U \in \mathrm{Open}(X)$ とその $\mathscr{B}$ の元による任意の被覆 $U = \bigcup_i V_i$ に対し，

*27 層全体は集合をなさないため全単射とは言えないので，対応という言い方でごまかします．

$F(U) = \mathrm{Ker}(\prod_i F(V_i) \to \prod_{i,i'} F(V_{i,i'}))$ を満たすことから，これを $F(U)$ の定義と思っておけばよい．言い換えると，$F(U) = \varprojlim_{V \in \mathscr{B}, V \subset U} F(V)$ である．

後半：$\phi \in \mathrm{Hom}(F|_{\mathscr{B}}, G|_{\mathscr{B}})$ が与えられたとする．開集合 $U \in \mathrm{Open}(X)$ と切断 $s \in F(U)$ を任意にとる．$V \subset U$ を満たす $V \in \mathscr{B}$ に対し $s|_V \in F(V)$ は制限写像と可換であり，したがって $\phi(V)(s|_V) \in G(V)$ も制限写像と可換なので，$\phi(V)(s|_V)$ が $G(U)$ の元を誘導する．これを $\phi(U)(s)$ と定める．諸条件が成立することは容易に示せる． □

余談 3.51. F が層であることと次は同値である：任意の $U \in \mathrm{Open}(X)$ と，U の任意の開被覆 $\bigcup_{i \in I} U_i$（$U_i \in \mathrm{Open}(X)$）と，$U_{ij} := U_i \cap U_j$ の任意の開被覆 $\bigcup_{k \in K_{ij}} U_{ij,k}$（$U_{ij,k} \in \mathrm{Open}(X)$）に対し

$$F(U) \xrightarrow{r_{U_i U}} \prod_{i \in I} F(U_i) \overset{r_{U_{ij,k}U_i}}{\underset{r_{U_{ij,k}U_j}}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I, k \in K_{ij}} F(U_{ij})$$

が差核図式である．一般の（有限個の共通部分で閉じていると限らない）開基 $\mathscr{B}$ に対して，上の $\mathrm{Open}(X)$ をすべて $\mathscr{B}$ に置き換えることで $\mathscr{B}$ 層を定義することができる．（有限個の共通部分で閉じている場合には前述の定義と同値になる．）この $\mathscr{B}$ 層も通常の層と等価な概念になることが証明できる．

定義 3.52 (構造層)**.** $X = \mathrm{Spec}\, A$ に対し，$\mathscr{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ は開基であり，有限個の共通部分で閉じている（問題 2.4）．X 上の $\mathscr{B}$ 前層 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}(D(f)) = A_f$ および自然な制限写像（問題 2.8(3)）で定める．これは $\mathscr{B}$ 層になる（問題 3.5）．これに対応する層（命題 3.50）を $\mathrm{Spec}\, A$ の**構造層** (*structure sheaf*) とよび $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_A, \mathcal{O}$ などと表す．

命題 3.50 の証明で述べたことから，一般の開集合 $U \subset \mathrm{Spec}\, A$ に対して，$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{f \in A, D(f) \subset U} A_f$ である．

注 3.53. $\mathcal{O}_X(U)$ の元は，U の各点 x に対して局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の元を対応させる関数で，局所的に環の局所化の元として書けるという意味での正則性を満たすもの，と捉えることができる．この $\mathcal{O}_{X,x}$ については次が成り立つ．

命題 3.54. $x \in X = \mathrm{Spec}\, A$ を素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ に対応する点とすると，構造層 $\mathcal{O}_X$ の x での茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ に一致する．

証明. 問題 3.6. □

余談 3.55. この場合は無事に層になるのだが，それっぽい開集合上の切断をそれっぽく定義したとしても層にならないことがあるらしい．例えば，ある性質をもつ位相環とその部分環の組 (A, A^+) に対して $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ という位相空間およびその上の環の前層 $\mathcal{O}$ が定義され，これが層になるとき (A, A^+) は sheafy であるというが，この性質は必ずしも成り立たないらしい．（参考：例えば [BCKW19, Weinstein, Section 1]）

演習問題

問題 3.1 (☆連続写像のなす層（例 3.30）)**.** X，Y を位相空間とする．X の開集合 U に対して $F(U)$ を U から Y への連続写像全体の集合とし，$r_{VU} \colon F(U) \to F(V)$ を（連続）写像の制限とすると，集合の前層が定まる．これが層になることを示せ．

問題 3.2. 位相空間 X とその開集合 U とその開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ であって次の条件を満たすものを 1 つ挙げよ．A を 0 でないアーベル群とすると，X 上の定数前層 ${}^{\mathrm{p}}\underline{A}$（例 3.26）は U とその開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ に対する張り合わせ条件を満たさず，したがって層でない．

問題 3.3 (【難しい】$\mathscr{B}$ 層と層)**.** X を位相空間とし，$\mathscr{B}$ を開基で有限個の共通部分で閉じているものとする．このとき，X 上の層に対して X 上の $\mathscr{B}$ 層が自然に定まるが，この対応は層と $\mathscr{B}$ 層の間の一対一対応を与える（言い換えると，任意の $\mathscr{B}$ 層は層に一意的に延長できる）ことを示せ．

問題 3.4 (層空間)**.** F を位相空間 X 上の層とする．位相空間 E と連続写像 $p\colon E \to X$ を次のように定義する．まず集合として $E = \coprod_{x \in X} F_x$（集合としての直和）とし，$p$ を $F_x \to \{x\} \subset X$ を合わせたものとする．開集合 $V \subset X$ と切断 $s \in F(V)$ に対し，$O(V, s) := \{s_x \mid x \in V\} \subset E$ とおく．このとき次を示せ．集合系 $(O(V, s))_{V \in \mathrm{Open}(X), s \in F(V)}$ は 2 個の元の交わりで閉じており，これを開基とする位相を E に入れると p は連続であり，p のセクションのなす層（例 3.32）は F と自然に同型である．

問題 3.5 (☆構造層)**.** 定義 3.52 で定めた $\mathscr{B}$ 前層は $\mathscr{B}$ 層であることを示せ．すなわち，A を環，$f, g_i \in A$ を元（の族）とし，$D(f) = \bigcup_i D(g_i)$ となっているとき，列 $0 \to A_f \to \prod_i A_{g_i} \to \prod_{i,i'} A_{g_i g_{i'}}$ は完全であることを示せ．（各射は問題 2.8(3) から自然に定まる．）なお，$f = 1$ の場合に帰着できるのでその場合のみ示せばよい．（余裕があれば一般の場合を示すか帰着も含めて示せ．）

問題 3.6 (☆構造層の茎)**.** $x \in X = \operatorname{Spec} A$ を素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ に対応する点とすると，構造層 $\mathscr{O}_X$ の x での茎 $\mathscr{O}_{X,x}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ に一致することを示せ．

問題 3.7 (☆順極限（命題 3.14）)**.** I を有向な順序集合，A を環とする．I で添字づけられた，集合または A 加群または A 代数の順系に対し，順極限が存在することを示せ．

余裕があれば，有向と仮定せずに解いてもよい．

4 スキーム

参考文献（この節と 5 節）：

- 定番として Hartshorne [Har77] があります．Noether 性を安易に仮定するという批判はある．後半の曲線・曲面の章は代数閉体上のみ扱っている．和訳もありますが読んだことがありません．
- Liu [Liu02] は（体上のスキームに限定しないという意味で）数論幾何寄りです．層のコホモロジーはチェックコホモロジーしか扱われていないという批判はある．[*28]
- スキーム論を細部までやりたい場合は EGA[*29]（[EGA1], ...）が強いですが，厚い（全部で 1500 ページぐらい）のとフランス語なのが難点です．数論幾何をやりたい人は，これや SGA に限らずフランス語の論文がたくさんあるのでこれを機にフランス語を身につけてしまうのもありかもしれません[*30]．
- 最近は Stacks Project [SP] というウェブサイトがありかなりの分量があります．読んで勉強するというよりは必要になったときに調べるのに使っている．

[*28] 個人的事情として，Liu は学部 4 年のセミナーで読んだので思い出補正があります．

[*29] *Éléments de géométrie algébrique*, I–IV（冊数としては，III が 2 冊，IV が 4 冊あるので合計 8 冊）

[*30] 一般的な語学に比べれば，数学書を読めるようになるのに必要な勉強量なんてたかが知れています．そのうち律速がフランス語ではなく数学の方になります．

- 他にも文献はあり和書もいくつかありますが，あまり詳しくありません．

まず広い概念である局所環付き空間を導入し，前節で定義した $\operatorname{Spec} A$ がその例であることを確認しこの形のものをアフィンスキームとよび，局所的にアフィンスキームと同型な局所環付き空間としてスキームを定義します．

4.1 局所環付き空間

定義 4.1 (環付き空間)**.** **環付き空間** (*ringed space*) とは，位相空間 Y とその上の環の層 $\mathcal{O}_Y$ の組である．$\mathcal{O}_Y$ のことを構造層という．

定義 4.2 (局所環付き空間)**.** **局所環付き空間** (*locally ringed space*) とは，環付き空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ であって，各 $y \in Y$ に対し茎 $\mathcal{O}_{Y,y}$ が局所環であるものである．混乱の余地がなければ局所環付き空間を単に Y で表す．

局所環付き空間の射 $(f, f^{\#})\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ とは, 位相空間の射 f と X 上の層の射 $f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ の組であって，各 y に対し誘導される射 $(f^{\#})_y\colon \mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ が局所環の局所射（定義 2.35）であるものをいう．これも混乱の余地がなければ単に f で表す．

定義中にある各 y に対し誘導される射とは，層の射 $f^{\#}$ が $f(y)$ での茎に誘導する射 $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to (f_*\mathcal{O}_Y)_{f(y)}$ と，茎の定義から自然に誘導される射

$$\begin{aligned}(f_*\mathcal{O}_Y)_{f(y)} &= \varinjlim_{U \in \operatorname{Open}(X), U \ni f(y)} (f_*\mathcal{O}_Y)(U) \\ &= \varinjlim_{U \in \operatorname{Open}(X), f^{-1}(U) \ni y} \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) \to \varinjlim_{V \in \operatorname{Open}(Y), V \ni y} \mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_{Y,y}\end{aligned}$$

の合成である．

定義 4.3 (開埋め込み・閉埋め込み)**.** $(f, f^{\#})\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間の射とする．

- $(f, f^{\#})$ が<u>**開埋め込み** (*open immersion*)</u> であるとは，f が位相空間の<u>開埋め込み</u>（X の<u>開集合</u>への同相）であり，各 $y \in Y$ に対し $(f^{\#})_y$ が<u>同型</u>であることをいう．
- $(f, f^{\#})$ が<u>**閉埋め込み** (*closed immersion*)</u> であるとは，f が位相空間の<u>閉埋め込み</u>（X の<u>閉集合</u>への同相）であり，各 $y \in Y$ に対し $(f^{\#})_y$ が<u>全射</u>であることをいう．

下線は比較のために引いた．

加えて $f\colon Y \to X$ が部分集合の包含写像である場合には Y を X の**開部分空間** (*open subspace*)，**閉部分空間** (*closed subspace*) という．さらに Y, X が後述のスキームである場合には開部分スキーム，閉部分スキームという（X がスキームならば Y は自動的にスキームになる：開の場合例 4.16，閉の場合問題 4.1 と同様)．

注 4.4. 開部分空間を与えることは，（その底集合となる）開集合を与えることと等価である．両者を同一視することが多い．

閉部分空間を与えることは，（$f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ の核となる）$\mathcal{O}_X$ のイデアルの層を与えることと等価である．（イデアルの層とは $\mathcal{O}_X$ の $\mathcal{O}_X$ 部分加群の層のことである．$\mathcal{O}_X$ 加群の層の定義は定義 4.21 を見よ．）異なる閉部分空間が同じ底集合をもつこともある．

同型と全射で対称性が崩れていると思うかもしれないが，もともと層の定義の時点で全く対称ではない．

アフィンスキームの場合の典型例は例 4.10 を見よ．

例 4.5. X を位相空間とし，$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ 値連続関数のなす（$\mathbb{R}$ 代数の）層とすると，$(X, \mathcal{O})$ は局所環付き空間である．実際，各点 $x \in X$ に対し，$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_x \mid f(x) = 0\}$ は $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$ を満たし，$\mathcal{O}_x \setminus \mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{O}_x \mid f(x) \neq 0\}$ の任意の元は可逆であるので他に極大イデアルはない．

X が複素多様体で $\mathcal{O}$ が $\mathbb{C}$ 値正則関数の場合も同様である．

4.2 アフィンスキーム

命題 4.6. 環 A に対し $\operatorname{Spec} A$ は局所環付き空間である．

環の射 $\phi\colon A \to B$ から次のように局所環付き空間の射が誘導される．まず位相空間の射として $f = \phi^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ をとり，層の方の射 $f^\#\colon \mathcal{O}_A \to f_*\mathcal{O}_B$ を定義するには principal open $U = D(a)$ での切断の間の射を定義すればよく（命題 3.50 の後半），ϕ から自然に誘導される $A_a \to B_{f(a)}$ をとる．

略証．前半は，茎が局所環であることを確かめればよく，これは命題 3.54（問 3.6）である．

後半は，これで層の射が定義されていることは命題 3.50 の後半であり，局所環付き空間の射になっていることについては問題の環の層の射が $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ で誘導する射が自然な射 $A_{\phi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$ であることを確かめればよい． □

定義 4.7 (アフィンスキーム)**.** 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**アフィンスキーム** (*affine scheme*) [*31]であるとは，ある環 A に対する $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ に同型であることをいう．

次の命題から，アフィンスキームは対応する環の情報をすべて捉えているといえる．（圏論でいうと，環の圏とアフィンスキームの圏は（反変）圏同値である．）

命題 4.8. 環 A, B に対して, $\operatorname{Hom}_{\{\text{rings}\}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\{\text{locally ringed spaces}\}}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A)$ は全単射である．

略証．逆向きの写像を構成する．$(f, f^\#)\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ とする．層の射 $f^\#\colon \mathcal{O}_A \to f_*\mathcal{O}_B$ が大域切断（開集合 $\operatorname{Spec} A$ での切断）に与える射として環の射 $A \to B$ が得られる．これが逆写像になっていることを確かめればよい（省略）． □

余談 4.9. というわけで，アフィンスキームを principal open で張り合わせてスキームを作る限りにおいては，局所環付き空間という概念を意識する必要はあまりない．……気がします．

開埋め込みと閉埋め込みの典型例を挙げる．

例 4.10. $\operatorname{Spec} A_a \to \operatorname{Spec} A$ は開埋め込みである．$\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ は閉埋め込みである．

証明は，各点に対応する素イデアルを $\mathfrak{p} \subset A$ とおくとき，$(A_a)_{\mathfrak{p}A_a} \cong A_{\mathfrak{p}}$ と $(A/I)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/IA_{\mathfrak{p}}$ を確かめればよい．

なお, アフィンスキームの閉部分スキームはこれで尽くされる（問題 4.1）．開埋め込みに関しては, principal でない開集合に対応する開部分スキームもある．

$I, J \subset A$ が異なるイデアルでも $\operatorname{Spec} A$ の閉部分集合 $\operatorname{Spec} A/I, \operatorname{Spec} A/J$ が一致することがあると前に述べたが，この場合も閉部分スキームとしては区別できる．

[*31] アファインとも読む．

4.3 スキーム

定義 4.11 (スキーム)**.** 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**スキーム** (*scheme*) であるとは，局所的にアフィンスキームである（すなわち，X の開被覆 $\{U_i\}$ が存在し，$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ はアフィンスキームである）ことをいう．

これを逆から見ると，次のようにアフィンスキームを張り合わせてスキームを作ることができる．

命題 4.12. X_i（$i \in I$）をスキームとし，$X_{i,j} \subset X_i$（$j \in I$）を開部分スキームとし，$\phi_{i,j}\colon X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ をスキームの同型射とする．$X_{i,jk} := X_{i,j} \cap X_{i,k}$ とおく．各 $i, j, k \in I$ に対し

$$X_{i,i} = X_i, \qquad \phi_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i}, \qquad \phi_{i,j}|_{X_{i,jk}}\colon X_{i,jk} \xrightarrow{\sim} X_{j,ik}, \qquad \phi_{i,k}|_{X_{i,jk}} \circ \phi_{k,j}|_{X_{k,ij}} \circ \phi_{j,i}|_{X_{j,ki}} = \mathrm{id}_{X_{i,jk}}$$

が成り立つとする．

このとき，スキーム X と開埋め込み $g_i\colon X_i \to X$ であって，$X_{i,j} = g_i^{-1}(g_j(X_j))$，$g_i|_{X_{i,j}} = g_j|_{X_{j,i}} \circ \phi_{i,j}$，を満たすものが同型を除いて一意に存在する．

略証．位相空間は通常のやり方で（直和の商空間として）構成できる．構造層 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_{X_i}$ の張り合わせとして構成できる． □

アフィンでないスキームの基本的かつ重要な例として（1 次元以上の）射影空間がある．

例 4.13 (射影空間)**.** A を環とし，$n \in \mathbb{N}$ とする．$i = 0, \ldots, n$ に対し，$U_i = \operatorname{Spec} A[t_0/t_i, \ldots, t_n/t_i]$ とし，$U_{i,j} = D(t_j/t_i) \subset U_i$ とし，$\phi_{i,j}\colon U_{i,j} \to U_{j,i}$ を（座標から自然に想像される）同型とする．これらから命題 4.12 を用いて得られるスキームを A 上の n 次元**射影空間** (*projective space*) とよび $\mathbb{P}^n_A$ で表す．$A \neq 0$ かつ $n \geq 1$ のときこれはアフィンではない．

一般のスキーム X に対し，$\mathbb{P}^n_X := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} X$ （ファイバー積（定義 5.1））と定める．

射影空間 $\mathbb{P}^n_A$ は次で定義する $\operatorname{Proj} A[t_0, \ldots, t_n]$（$A$ の元は次数 0，t_i は次数 1 とする）と同型になり，こちらを定義にすることもある．

定義 4.14 (次数付き環の Proj)**.** **次数付き環** (*graded ring*) （正確には $\mathbb{N}$-次数付き環）とは，環 B とそのアーベル群としての直和分解 $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i$ であって，$1 \in B_0$ と $B_{i_1} B_{i_2} \subset B_{i_1+i_2}$ を満たすものをいう[*32]．和集合 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ の元を**斉次** (*homogeneous*) であるといい，B_i の元を i 次の斉次元といい i をその元の**次数** (*degree*) という．斉次元で生成されるイデアルのことを**斉次イデアル** (*homogeneous ideal*) という．

$\mathbb{N}$ を任意のモノイド M に置き換えて，M-次数付き環が定義できる．

次数付き環 B に対して，次数 > 0 の斉次元全体で生成されるイデアルを B_+ とおき，B の斉次素イデアルで B_+ を含まないもの全体の集合 $\operatorname{Proj} B$ に適切に位相と構造層を与えることでスキームが作れる[*33]．位相：斉次元 b に対する $D_+(b) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B \mid b \notin \mathfrak{p}\}$ を開基とする．または，斉次イデアル I に対する $V_+(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ を閉集合系とする．構造層：$\mathcal{O}(D_+(b)) := B_{(b)} := (B_b)_0$ とする（B_b（環の局所化）に自然に $\mathbb{Z}$-次数構造を入れて 0 次部分をとる）．

[*32] $1 \in B_0$ を課していない文献もある．実のところ $\mathbb{N}$ や一般に群の部分モノイドならば $1 \in B_0$ は他の条件から自動的に従うのだが，一般のモノイドではそうとは限らないのでここでは明示的に課しておく．

[*33] この Proj の名前については，homogeneous spectrum とよばれているのは見ましたが，単に Proj とよばれていることが多い気がします．

例 4.15. A を環とし，アフィンスキーム $U_i = \operatorname{Spec} A[t_i]$ $(i=1,2)$ およびその開部分スキーム $V_i = D(t_i) = \operatorname{Spec} A[t_i, t_i^{-1}] \subset U_i$ を考え，同型 $V_1 \cong V_2 \colon t_1 = t_2$ を用いて張り合わせたスキーム $X := U_1 \cup U_2$ を考える．$A = \mathbb{R}$ であるかのような図を書くと，「$\mathbb{R}$ のようだが原点だけ 2 重になっている（ハウスドルフでない）多様体」のようになる．実際，$A \neq 0$ ならばこのスキームは後述の分離性という条件を満たさない．

例 4.16. アフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ の開部分空間 U はスキームである．実際，$\{D(a) = \operatorname{Spec} A_a \mid a \in A\}$ が $\operatorname{Spec} A$ の開基なので，U はアフィンスキームで被覆できる．U 自身はアフィンとは限らない（問題 4.3 に例を挙げた）．

アフィンスキームの開部分スキームとして表せる準コンパクトスキームのことは**準アフィン** (*quasi-affine*) であるという．

命題 4.17 (大域切断と Spec の随伴性)**.** $\operatorname{Hom}_{\{\text{schemes}\}}(X, \operatorname{Spec} A) = \operatorname{Hom}_{\{\text{rings}\}}(A, \mathcal{O}_X(X))$ が成り立つ．

証明．X がアフィンである場合は正しい（命題 4.8）．

一般にスキーム X, Y と開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ に対し

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \to \prod_i \operatorname{Hom}(U_i, Y) \rightrightarrows \prod_{i,j} \operatorname{Hom}(U_{ij}, Y)$$

は差核図式である（定義 3.3）．実際，位相空間としての射は張り合わせで構成でき，構造層の方の射は $\mathcal{O}_X(X) \to \prod \mathcal{O}_X(U_i) \to \prod \mathcal{O}_X(U_{ij})$ が完全であることから構成できる．また，

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i \operatorname{Hom}(U_i,Y) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{i,j} \operatorname{Hom}(U_{ij},Y) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)) \arrow[r] & \prod_i \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(U_i)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(U_{ij}))
\end{tikzcd}$$

は可換図式であり，下辺も差核図式である．

$Y = \operatorname{Spec} A$ とし，X の開被覆としてアフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} B_i$, をとると，真ん中の縦の射は全単射である．したがって左の縦の射は単射である（確かめよ）．これは任意のスキーム X に対し成り立つので，右の縦の射も単射である．したがって左の縦の射は全射である（確かめよ）．

別方針として，$\operatorname{Hom}(-, Y)$ と $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(-))$ が層であることを確認して，余談 3.51 の結果をアフィン開集合からなる開基 $\mathscr{B}$ に適用してもよい． □

なお $-$ は「ここに任意の対象（今の場合 X の開部分スキーム）を入れる」を意味する（複数ある場合はすべてに同じものを入れる[*34]）．

系 4.18. 任意のスキーム Y に対し，射 $Y \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は一意に存在する．

余談 4.19. 証明中に見たように，X の開集合 U に対しこれを開部分スキーム（これも U で書く）と同一視して $\operatorname{Hom}_{\{\text{schemes}\}}(U, Y)$ を対応させると集合の層になる．

実はより強く，$\operatorname{Hom}_{\{\text{schemes}\}}(-, Y)$ は fpqc 位相での層になる（例 12.11，問題 12.5 参照）．

余談 4.20. 大域切断関手は局所環付き空間の圏から環の圏への反変関手を与える．これの随伴関手（存在すれば一意）の本質的像を含み張り合わせで閉じている最小の部分圏としてスキームの圏を定義することもでき

[*34] そうでない意図で書く場合もあるのですが．$\operatorname{Hom}(-,-)$ とか．

る．局所環付き空間の諸々の性質と随伴関手定理を用いれば存在証明もできるらしい．

4.4　スキーム上の準連接層

環 A 上の加群 M からアフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ 上の層が誘導され，これの一般化としてスキーム上の準連接層を導入します．

定義 4.21. X をスキームとする（または一般に環付き空間）X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層とは，アーベル群の層 M と，各 $U \in \operatorname{Open}(X)$ に対する $M(U)$ の $\mathcal{O}_X(U)$ 加群構造（$\mathcal{O}_X(U) \times M(U) \to M(U)$ で所定の条件を満たすもの）の族であって $V \subset U$ に対する制限写像と可換なものとの組をいう．次項の概念を用いれば，アーベル群の層 M と（単位的だが一般に可換でない）環の層の射 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd(M)$ の組といってもよい．

同様に，環の層 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A}$ 加群の層を定義できる．

定義 4.22. 位相空間 X とその上の層 F, G に対し，各 $U \in \operatorname{Open}(X)$ に対し $\mathcal{H}om(F,G)(U) := \operatorname{Hom}(F|_U, G|_U)$（右辺は U 上の層の射全体の集合）と定め制限写像を自然に定めると $\mathcal{H}om(F,G)$ は X 上の層になる[*35]．

$\mathcal{E}nd(F) := \mathcal{H}om(F,F)$ とする．

注 4.23. U に対し $\operatorname{Hom}(F(U), G(U))$ とすると，制限写像がうまく定義できない．

命題 4.24. A を環，M, N を A 加群，$f\colon M \to N$ を A 加群の射とする．$X = \operatorname{Spec} A$ とする．

(1) 次を満たす $\mathcal{O}_X$ 加群の層 $\tilde{M}$ が一意に存在する：各 $a \in A$ に対し，$\tilde{M}(D(a)) = M_a := M \otimes_A A_a$ である．
(2) 次を満たす $\mathcal{O}_X$ 加群の層の射 $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \tilde{N}$ が一意に存在する：各 $a \in A$ に対し，$\tilde{f}(D(a)) = f \otimes_A A_a\colon M_a \to N_a$ である．

証明. (1) $\mathscr{B}$ を定義 3.52 で定めた $\operatorname{Spec} A$ の開基とする．命題 3.50 の前半より，$\tilde{M}\colon D(a) \mapsto M_a$ が $\mathcal{O}_X$ 加群の $\mathscr{B}$ 層になっていることを確認すればよい．$\mathcal{O}_X$ 加群の $\mathscr{B}$ 前層なのはよい．張り合わせ条件は問題 3.5 と同様にして確認できる．(2) は命題 3.50 の後半から同様に従う． □

定義 4.25. スキーム X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層 F が**準連接層** (*quasi-coherent sheaf*) であるとは，アフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ と $\mathcal{O}_X(U_i)$ 加群 M_i が存在して，$F|_{U_i}$ が $\tilde{M_i}$ に同型であることをいう．

命題 4.26. スキーム X 上の層 F について，次は同値である．

(1) F は準連接層である．
(2) X の任意のアフィン開集合 V に対し，$F|_V \cong \widetilde{(F(V))}$ である．

証明. (2) $\implies$ (1) は明らかである．(1) $\implies$ (2) を示す．

U_i を定義中の条件を満たすアフィン開被覆とする．($V \cap U_i$ は V の principal open とは限らないが，U_i の principal open かつ V の principal open である開部分スキーム W_{ij} で被覆できる（問題 4.4）ので，X の開

*35　かたい文字（この場合 Hom）で表される対象を並べた前層またはその層化をしばしばやわらかい文字（この場合 $\mathcal{H}om$）で表します．他にも，やわらかい文字にする代わりに下線をつける記法（この場合 $\underline{\mathrm{Hom}}$）もよく使われます（これはタイプライター時代の流行かもしれない）．

被覆 $\{U_i\}$ を V の開被覆 $\{W_{ij}\}$ で置き換えることで,）$V = X = \operatorname{Spec} A$ かつ U_i は X の principal open としてよい．さらに $\operatorname{Spec} A$ は準コンパクトなので $\{U_i\}$ は有限被覆としてよい．有限直積（＝有限直和）はテンソル積と交換することに注意する．このとき，$a \in A$ に対し，

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F(X) \otimes_A A_a & \longrightarrow & \prod F(U_i) \otimes_A A_a & \longrightarrow & \prod F(U_{ij}) \otimes_A A_a \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F(D(a)) & \longrightarrow & \prod F(D(a) \cap U_i) & \longrightarrow & \prod F(D(a) \cap U_{ij})
\end{array}$$

は可換図式で，上辺は完全であり（$\otimes_A A_a$ は完全列を保つので），下辺も完全であり，$F|_{U_i}$ に関する仮定から真ん中の縦の射は同型である．よって左の縦の射は単射である．U_{ij} もアフィンなので右の縦の射も同様に単射である．よって左の縦の射は同型である． □

系 4.27. アフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} A$ 上の準連接層と A 加群は一対一に対応し，準連接層の間の（$\mathcal{O}_X$ 加群の層の）射は A 加群の準同型と一対一に対応する．

定義 4.28. $f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．

- $\mathcal{O}_Y$ 加群の層 F の順像 f_*F を，アーベル群（，集合，……）としての層と同様に定める．これは層になる．
- $\mathcal{O}_X$ 加群の層 G の逆像 f^*G を，$f^*G := f^{-1}(G) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ と定める．

ただし，環の層 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 加群の層 M, N に対し，$M \otimes_{\mathcal{A}} N$ とは U に対し $M(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} N(U)$ を対応させる前層の層化である．

命題 4.29. 記号を前定義のものとする．順像は $\mathcal{O}_X$ 加群の層になる．逆像は $\mathcal{O}_Y$ 加群の層になる．

証明. 定義から明らか． □

命題 4.30. $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームの射とする．

- $\operatorname{Spec} A$ 上の準連接層 $F = \tilde{M}$ に対し，$f^*F = (M \otimes_A B)^\sim$ である．
- $\operatorname{Spec} B$ 上の準連接層 $G = \tilde{N}$ に対し，$f_*G = (N|_A)^\sim$ である．ただし，$N|_A$ は B 加群 N を A 加群とみなしたものである．

とくに，アフィンスキーム間の射による順像・逆像は準連接性を保つ．

証明. 容易． □

命題 4.31. $f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．

- X 上の準連接層の逆像は Y 上の準連接層である．
- Y がネータースキーム（定義 5.26）である，または，f が準コンパクト（定義 5.12）かつ分離的（定義 5.31）である，と仮定する．このとき，Y 上の準連接層の順像は X 上の準連接層である．$\operatorname{Spec} B$ 上の準連接層 $G = \tilde{N}$ に対し，$f_*G = (N|_A)^\sim$ である．

証明. 逆像については，X と Y がアフィンスキームである場合に帰着できる（Y の各点 y に対し，アフィン

開近傍であって f^*F の制限が準連接であるものを見つければよいので，X を $f(y)$ のアフィン開近傍で置き換えて Y を y のアフィン開近傍で置き換えればよい）ので，前命題より従う．

順像については，[Har77, Proposition II.5.8(c)] または [Liu02, Proposition 5.1.14(c)] を参照．仮定は，X の各アフィン開集合の逆像が，有限アフィン開被覆 $\{U_i\}$ であって各 $U_i \cap U_j$ が準コンパクトであるものをもつことを保証するのに用いられる． □

余談 4.32. 一般には準連接層の順像は準連接ではない．簡単な反例として次[*36]がある．$X = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ とし，$Y = \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ を $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の無限直和とし，$f\colon Y \to X$ を自然な射とする．このとき $f_*\mathcal{O}_Y$ は準連接でない．もし準連接だとすると，principal open subscheme $D(a) \subset \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ に対して $(f_*\mathcal{O}_Y)(D(a)) = (f_*\mathcal{O}_Y)(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_a$ となるはずだが，左辺は $\coprod \mathbb{Z}_a$，右辺は $(\coprod \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_a$ で，両者は例えば $a = 2$ で等しくない．というのは，右辺の元の分母は有界である（ある 2^n 倍して整数列になる）が，左辺の元の分母は有界とは限らない．

準連接層にある種の有限性を課した概念である連接層を 10.6 節で導入する：これは局所ネータースキーム（定義 5.26）上では有限生成加群に対応する概念である（ネーター性を仮定しないともう少しややこしい）．また，一般の環付き空間上の準連接層の定義もそこで紹介する．

4.5 スキームに関する諸性質

（必要に迫られて後から設置したのでそのような小節タイトルです．）

定義 4.33 (被約)**.** 環 A が**被約** (*reduced*) であるとは，冪零な元（自然数 n が存在して $f^n = 0$ となる元 f）が 0 以外に存在しないことをいう．

スキーム X が被約であるとは，任意の開集合 U に対して $\mathcal{O}_X(U)$ が被約であることをいう．これは任意の点 $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ が被約であることと同値である．

定義 4.34 (既約閉集合)**.** 位相空間の閉集合 Z が**既約** (*irreducible*) であるとは，$Z \neq \emptyset$ であり，Z が真の閉集合 2 つの和集合で書けないことをいう．

命題 4.35. 環 A の素イデアル $\mathfrak{p}$ はアフィンスキーム $\operatorname{Spec}A$ の既約閉集合 $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ を与え，この対応は全単射であり包含関係を（逆向きに）保つ．

証明．略． □

定義 4.36 (整)**.** スキーム X が**整** (*integral*) であるとは，被約かつ既約であることをいう．アフィンスキーム $\operatorname{Spec}A$ に対しては，これは A が整域であることと同値である．

定義 4.37 (次元)**.** スキーム X の**次元** (*dimension*) $\dim X$ とは，既約閉集合の真の包含列 $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d$ の長さ（この場合 d）の上限 $\in \{-\infty\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ をいう．$X = \emptyset$ に対しては $\dim X = -\infty$ としましょう．$X = \operatorname{Spec}A$ に対しては，上記の対応より，素イデアルの真の包含列の長さの上限に一致する．

命題 4.38. X が整かつ体 k 上有限型（定義 5.14）ならば，$\dim X$ は X の関数体 $k(X)$ の k 上の超越次数 $\operatorname{trdeg}_k k(X)$ に一致する．

[*36] Georges Elencwajg, `https://math.stackexchange.com/a/1109845`

証明. スキーム論の教科書を見てください. □

系 4.39. X が整かつ体 k 上有限型ならば，空でない（したがって稠密な）開集合は X と同じ次元をもつ.

注 4.40. 体上有限型を仮定しないと命題 4.38 は一般に成り立たない．典型的な例：$k[x]$ の素イデアル (x) での局所化 $k[x]_{(x)}$ は 1 次元だが，x^{-1} を加えると体 $k(x)$ になり次元が落ちる．同様に，$\mathbb{Z}$ の素イデアル (p) での局所化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ は 1 次元だが，p^{-1} を加えると体 $\mathbb{Q}$ になり次元が落ちる.

演習問題

問題 4.1 (☆アフィンスキームの閉部分スキーム)**.** A のイデアル全体の集合とアフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ の閉部分スキーム全体の集合の間に $I \mapsto \operatorname{Spec} A/I$ で一対一対応が定まることを示せ.

問題 4.2. I, J が環 A のイデアルのとき，$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$ を示せ．ただし，$\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$ と定め，これを I の**根基** (*radical*) という.

これを用いて，A の根基イデアル全体の集合とアフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ の閉集合全体の集合の間に $I \mapsto \operatorname{Spec} A/I$ で一対一対応が定まることを示せ．ただし，イデアル $I \subset A$ が**根基イデアル** (*radical ideal*) であるとは $\sqrt{I} = I$ が成り立つことをいう.

問題 4.3 (アフィンでない準アフィンスキームの例)**.** k を体とする．x を $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[t_1, t_2]$ の原点，すなわち極大イデアル $\mathfrak{m} = (t_1, t_2)$ に対応する閉点とする．$U = X \setminus \{x\}$ とおく．$\mathcal{O}_X(U)$ を求め，U はアフィンでないことを示せ.

問題 4.4 (【難しい】)**.** X をスキーム，U, V をアフィン開部分スキームとする．$U \cap V$ は次の条件を満たす開部分スキームで被覆されることを示せ：U の principal open subscheme でもあり，V の principal open subscheme でもある.

問題 4.5 (☆射影空間の構造層の大域切断)**.** A を環，$n = 1$ とする．n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_A$ に対し $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = A$ であることを示せ．余裕があれば一般の $n \in \mathbb{N}$ について解いてもよい.

5 スキームの射に関する諸性質

5.1 ファイバー積

集合や位相空間の射の直積や逆像を包括する概念としてファイバー積を導入する.

スキーム論においては個々のスキームよりスキームの間の射が大事だとよく言われる[*37]．スキーム X（や $\operatorname{Spec} A$ 上のスキーム X）の性質の多くはスキームの射に関する性質を射 $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$（や射 $X \to \operatorname{Spec} A$）に適用したものとして表せる．また，射 $f \colon Y \to X$ の多くは底変換（別の射とのファイバー積から誘導される射）$Y \times_X Z \to Z$ に遺伝し，一定の条件下（例えば $Z \to X$ が Zariski 被覆の場合）で逆が成り立つことも多い.

定義 5.1 (ファイバー積；参考：問題 2.9 内の注)**.** S, X, Y をスキームとし，$f \colon X \to S$, $g \colon Y \to S$ を射とす

[*37] Grothendieck's relative point of view と称される．参考：`https://ncatlab.org/nlab/show/relative+point+of+view`.

る．X と Y の S 上の**ファイバー積** (*fibered product*) とは，スキーム W と射 $p\colon W \to X$, $q\colon W \to Y$ の組で $f \circ p = g \circ q$ を満たすもののうち普遍的なものである．すなわち，W, p, q で次の条件（普遍性）を満たすものである．

- $f \circ p = g \circ q$ である．
- スキーム W' と射 $p'\colon W' \to X$, $q'\colon W' \to Y$ が $f \circ p' = g \circ q'$ を満たすとき，写像 $\phi\colon W' \to W$ で $q \circ \phi = q'$, $p \circ \phi = p'$ を満たすものが一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[dr, dashed, "\phi"] \arrow[drr, "q'"] \arrow[ddr, "p'"'] & & \\
& W \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd}$$

普遍性より，ファイバー積は（存在するならば）一意的な同型を除いて一意である．この W を $X \times_S Y$ と書く．

ファイバー積になっている四角形図式（上でいう W, X, Y, S がなす図式）のことを**カルテジアン図式** (*cartesian diagram*) という[*38]．

注 5.2. 集合のファイバー積（問題 2.9 内の注）を知っている場合，ファイバー積 W の満たすべき条件は

$$\operatorname{Hom}(-, W) = \operatorname{Hom}(-, X) \times_{\operatorname{Hom}(-,S)} \operatorname{Hom}(-, Y)$$

と表せる．

圏論に慣れている人向けに言うと，表現関手のファイバー積を表現する対象がファイバー積である．[*39]

定義 5.3 (底変換)**.** 上の状況で，$q\colon X \times_S Y \to Y$ を $f\colon X \to S$ の $g\colon Y \to S$ による**底変換** (*base change*) という．q のことを f_Y などと書くこともある．この（f から f_Y を得る）操作のことも底変換という．

命題 5.4. スキームのファイバー積は存在する．

略証．まず S, X, Y がアフィンスキームである場合を考える．$S = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} C$ とおく．環のテンソル積の普遍性から考えると，$\operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ がいかにも条件を満たしそうである．直ちに従うのは普遍性の条件のうち W' がアフィンスキームの場合のみだが，W' が一般のスキームの場合も命題 4.17 から従う．

一般の場合は，S のアフィン開被覆をとり，アフィンの場合のファイバー積をそれらしく張り合わせることで構成できる．と思いますが下手すると循環論法になりそうなので気をつけましょう． □

注 5.5. スキームのファイバー積は位相空間としてのファイバー積とは異なる（正確に言うと，$\varepsilon\colon \{\text{schemes}\} \to \{\text{topological spaces}\}$ を忘却関手とするとき，$\varepsilon(X \times_S Y) \to \varepsilon(X) \times_{\varepsilon(S)} \varepsilon(Y)$ は同型射とは限らない）．問題 2.9 参照.

[*38] cartesian は（直交座標を導入した）デカルトにちなむ.

[*39] 圏論に慣れている人はファイバー積にもなじんでいる気がするので，この注が必要なのか分かりませんが…….

ファイバー積の重要な例としては次の開埋め込みの場合と後述のファイバーがある．

例 5.6. $f\colon Y \to X$ をスキームの射，$U \subset X$ を開部分スキームとすると，f と包含射 $U \to X$ のファイバー積は Y の開部分スキーム $f^{-1}(U)$（と Y への包含射と $f|_{f^{-1}(U)}\colon f^{-1}(U) \to U$ の組）である．

余談 5.7. P をスキームの射に関する性質とすると，P **によっては**，次のいくつかが成り立つ．$f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．

- P を満たす射の合成も P を満たす．
- g と $g \circ f$ が P を満たすならば，f も P を満たす．
- f が P を満たすならば，任意の射 $g\colon X' \to X$ に対し，g による f の底変換 $f'\colon Y \times X' \to X'$ も P を満たす．
- $\{U_i\}$ が X の開被覆で，各 i に対し底変換 $f^{-1}(U_i) \to U_i$ が条件 P を満たすならば，f も P を満たす．
- 射 $g\colon X' \to X$ が条件 Q（例：全射，エタールな全射，局所的に開埋め込みである全射，像が稠密な開埋め込み，……）を満たし，g による f の底変換 $f'\colon Y \times X' \to X'$ が P を満たすならば，f も P を満たす．（$Q =$「局所的に開埋め込みである全射」に対してこれが成り立つことは，前項が成り立つことと同値である．）

これら（のうち成り立つもの）をうまく使って証明を簡単な場合に帰着するのがスキーム論での常套手段である．

定義 5.8 (点)**.** スキーム（一般に局所環付き空間）X の各点 $x \in X$ に対し，茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ は局所環である（局所環付き空間の定義：定義 4.2）．その剰余体（唯一の極大イデアルによる商）を点 x での**剰余体** (*residue field*) とよび $\kappa(x)$ などと書く．アフィン開近傍において x が $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対応するとき，命題 3.54 より $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}}$ なので $\kappa(x) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ である．

その点からなる 1 点集合が閉であるとき，その点を**閉点** (*closed point*) とよぶ．アフィンスキームにおいては対応する素イデアルが極大イデアルであることと同値である．

他のどの点の閉包にも含まれない点を**生成点** (*generic point*) とよぶ．アフィンスキームにおいては対応する素イデアルが極小素イデアルであることと同値である．整域のスペクトルの場合は (0) が唯一の生成点である．

例 5.9 (ファイバー)**.** $f\colon X \to S$ を射とし，$s \in S$ を点とする．f と $s = \operatorname{Spec} \kappa(s) \to S$ とのファイバー積を $f^{-1}(s)$ や X_s と書き，f の（または X の）s 上の**ファイバー** (*fiber*) とよぶ．

5.2 各種の有限性

射の有限性に関するいくつかの条件があり，

- アフィン開集合の逆像に関する条件
- アフィン開集合の逆像に含まれるアフィン開集合（に対応する環）に関する条件

の一方または両方からなるものが多い．また，しばしば「あるアフィン開被覆に対して〜〜」と「任意のアフィン開集合に対して〜〜」が同値になる．

定義（と同値な言い換え）を把握したら次を示してみるといいでしょう.

命題 5.10. P を準コンパクト，局所有限型，有限型，有限，アフィン，準有限のいずれかとする.

(1) P は底変換で保たれる（P を満たす射の底変換は P を満たす).
(2) P は合成で保たれる（P を満たす射の合成射は P を満たす).

証明. 容易. □

5.2.1 準コンパクト

語法 5.11. （問題 2.4 の注でも述べたように,）本講義では，Bourbaki の流儀に従い,「任意の開被覆が有限部分被覆をもつ」という性質を**準コンパクト** (*quasi-compact*) とよぶ.（この流儀では「準コンパクトかつハウスドルフ」を**コンパクト** (*compact*) とよぶ.）

定義 5.12 (準コンパクト)**.** スキームの射 $f\colon Y \to X$ が**準コンパクト** (*quasi-compact*) であるとは，X が，逆像が準コンパクトである開集合で被覆されることをいう.

命題 5.13. $f\colon Y \to X$ が準コンパクトであることは，次を満たすことと同値である：X の任意のアフィン開集合の逆像が準コンパクトである.

また,「X の任意の準コンパクト開集合」に置き換えても同値である.

スキーム Y が準コンパクトであることと,（唯一の）射 $Y \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ が準コンパクトであることは同値である.

証明. 1 つめの主張：まず $U \subset X$ が $f^{-1}(U)$ が準コンパクトなるアフィン開集合で $U' \subset U$ が principal 開集合ならば $f^{-1}(U')$ も準コンパクトであることに注意する. 実際，$f^{-1}(U)$ を有限個のアフィン開集合 V_j で覆うことができ，このとき $f^{-1}(U')$ は有限個のアフィン開集合 $V_j \times_U U'$ で覆えて，アフィンスキームは準コンパクトであり準コンパクト集合有限個の和集合は準コンパクトである.

開被覆 $X = \bigcup U_i$ で $f^{-1}(U_i)$ が準コンパクトなものをとる. アフィン開集合 $V \subset X$ をとる. V を「ある i に対して U_i の principal 開集合である」という条件を満たすアフィン開集合 W_k 有限個で覆う. すると $f^{-1}(W_k)$ は前述のように準コンパクトであり，$f^{-1}(V)$ は準コンパクト集合有限個の和集合なので準コンパクトである.

残りは（1 つめの主張を用いれば）明らか. □

5.2.2 （局所）有限型，有限表示

定義 5.14 (有限型)**.** スキームの射 $f\colon Y \to X$ が**有限型** (*of finite type*) であるとは，アフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ と各 i に対する有限アフィン開被覆 $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ であって，$U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$ とおくとき B_{ij} が有限生成 A_i 代数であるものが存在することをいう.

「有限アフィン開被覆」という条件を「アフィン開被覆」に緩めた場合（命題 5.15 では準コンパクトという条件を除いた場合）には**局所有限型** (*locally of finite type*) であるという.

命題 5.15. $f\colon Y \to X$ が有限型であることは，次を満たすことと同値である.

X の任意のアフィン開集合 U に対し，$f^{-1}(U)$ は準コンパクトであり，かつ，任意のアフィン開集合

$V \subset f^{-1}(U)$ に対し，$U = \operatorname{Spec} A$, $V = \operatorname{Spec} B$ とおくとき B は有限生成 A 代数である．

証明は演習問題とする（問題 5.6）．

定義 5.16. 環の射 $A \to B$ が**有限表示** (*finite presentation*) とは，A 加群の完全列 $A^{\oplus p} \to A^{\oplus q} \to B \to 0$ が存在することをいう．言い換えると，有限生成を示す全射 $A^{\oplus q} \to B$ で核も有限生成なものが存在する．

注 5.17 (参考：[SP, Tag 00F2])**.** 有限表示ならば，任意の全射 $A^{\oplus q} \to B$ の核は有限生成である．

有限表示ならば有限型である．A がネーターならば，有限生成 A 加群の部分加群もまた有限生成なので有限表示と有限型は同値である．一般には同値ではない：A の有限生成でないイデアル I に対して A/I は有限型だが有限表示でない．

定義 5.18 (局所有限表示)**.** 局所有限型の定義において「有限生成」を「有限表示」に置き換えた性質を**局所有限表示** (*locally of finite presentation*) という．

注 5.19 (参考：[SP, Tag 01TO])**.** 有限表示は単に局所有限表示かつ準コンパクトではないらしい．

5.2.3　有限，アフィン

定義 5.20 (有限射・アフィン射)**.** スキームの射 $f\colon Y \to X$ が**有限** (*finite*) であるとは，アフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ が存在し，各 i に対して $f^{-1}(U_i)$ はアフィンであり，$U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$ とおくとき B_i が有限 A_i 代数である（すなわち，A_i 加群として有限生成である）ことをいう．

スキームの射 $f\colon Y \to X$ が**アフィン** (*affine*) であるとは，アフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ が存在し，各 i に対して $f^{-1}(U_i)$ はアフィンであることをいう．

命題 5.21. $f\colon Y \to X$ がアフィン（resp. 有限）であることは，次を満たすことと同値である．

X の任意のアフィン開集合 U に対し，$f^{-1}(U)$ はアフィンである（resp. さらに，$U = \operatorname{Spec} A$, $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ とおくとき B は有限 A 代数である）．

証明は演習問題とする（問題 5.7）．

余談 5.22. このように，スキームやスキームの射に対する性質として，「あるアフィン開被覆について……」と「任意のアフィン開被覆について……」はしばしば同値になる．

例 5.23. $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ は有限である．一般に閉埋め込みは有限である．というのは，アフィンスキームの閉部分スキームは（$\operatorname{Spec} A$ に対する $\operatorname{Spec} A/I$ の形のもののみであり）すべてアフィンなので．

開埋め込みはほとんどの場合有限でなく，しばしばアフィンでもない（アフィンスキームのアフィンでない開部分スキームの埋め込みはアフィンでない）．

$Q \in A[t]$ を monic（最高次係数が 1）な多項式とすると，$\operatorname{Spec} A[t]/(Q) \to \operatorname{Spec} A$ は有限である．$\operatorname{Spec} A[t] \to \operatorname{Spec} A$ は（$A \neq 0$ なら）有限でない．

命題 5.24. $g\colon Z \to Y$, $f\colon Y \to X$ を射とする．P をアフィン，有限のいずれかとする．

(1) f が P を満たすならば f の底変換も P を満たす．
(2) g と f が P を満たすならば $f \circ g$ も P を満たす．
(3) $f \circ g$ が P を満たし f がアフィンならば g も P を満たす．

証明．X の開被覆 (U_i) をとって各 U_i 上で示せばよい（命題 5.21）ので，はじめから X はアフィンとしてよい．

(1) $X' \to X$ による底変換を考えるとして，X' をアフィン開スキーム被覆して考えればよい．

(2) f がアフィンなので Y はアフィンであり，g がアフィンなので Z はアフィンである．有限性についても明らか．

(3) f と $f \circ g$ がアフィンなので Y と Z はアフィンである．有限性についても明らか．または，命題 5.39(3) のように証明してもよい．□

5.2.4 準有限

定義 5.25 (準有限)**.** $f\colon Y \to X$ が**準有限** (*quasi-finite*) であるとは，有限型であり，かつ各点 $x \in X$ のファイバー $f^{-1}(x)$ が位相空間として有限離散空間であることをいう．

有限ならば準有限だが，逆は全然成り立たない．例えば開埋め込みは明らかに準有限だがほとんどの場合閉写像ではなく，一方，後述（命題 5.40）のように有限射は閉写像である．

5.2.5 ネーター

定義 5.26 (（局所）ネータースキーム)**.** スキーム X が**局所ネーター** (*locally Noetherian*) であるとは，ネーター環のスペクトルからなる開被覆をもつことをいう．

さらにこれを有限被覆でとれる場合には**ネーター** (*Noetherian*) であるという．

命題 5.27. ネータースキームの開部分スキームや閉部分スキームはネーターである．ネータースキーム X の開部分集合 U（アフィンでなくてもよい）に対し，$\mathcal{O}_X(U)$ はネーター環である．

証明．例えば [Liu02, Proposition 2.3.46] を見よ．□

例によって，この場合任意のアフィン開集合はネーター環のスペクトルである．

定義 5.28 (ネーター位相空間)**.** 位相空間 X が**ネーター** (*Noetherian*) であるとは，閉集合に関する降鎖律が成り立つこと（すなわち，閉集合の真減少無限列 $Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \dots$ が存在しないこと）をいう．

命題 5.29. ネータースキームは位相空間としてネーターである．

証明は演習問題とする（問題 5.1）．

5.3 分離性，固有性，射影性

アフィンスキームは必ず準コンパクトである（問題 2.4）．また，多くのスキーム（例えば $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$）は位相空間としてハウスドルフでない（問題 2.10）．しかし，これらは位相空間の準コンパクト性（・固有性）およびハウスドルフ性の真の類似ではない．

位相空間のハウスドルフ性の類似概念である分離性を導入するために，ハウスドルフ性の言い換えを与える．

命題 5.30 (位相空間のハウスドルフ性の言い換え)**.** X を位相空間とする．X がハウスドルフであることと，対角射 $\Delta = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)\colon X \to X \times X$ が（直積位相に関して）閉写像であることとは同値である．また，Δ

の像が閉集合であることとも同値である．

証明は演習問題とする（問題 5.3）．

定義 5.31 (分離性)**.** スキームの射 $f\colon Y \to X$ が**分離的** (*separated*) であるとは，対角射 $\Delta = \Delta_{Y/X} = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)\colon Y \to Y \times_X Y$ が閉埋め込みであることをいう．

スキーム X が分離的であるとは，$X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ が分離的であることをいう．

語法 5.32. 射 $X \to Y$ が分離的であるとき，X は Y 上分離的であるともいう．（もちろん，X から Y への射が指定されていることを前提としている．）$Y = \operatorname{Spec} A$ のとき，「$\operatorname{Spec} A$ 上」のことを略して「A 上」ということもある．他の術語についても同様である．

命題 5.33. アフィン射は分離的である．とくに，アフィンスキームの間の射は分離的である．とくに，アフィンスキームは分離的である．

証明は演習問題とする（問題 5.4）．

例 5.34. $A \neq 0$ ならば，例 4.15 の X は $\operatorname{Spec} A$ 上分離的でない．実際，$\Delta\colon X \to X \times_{\operatorname{Spec} A} X$ が閉埋め込みだとすると，それの $U_1 \times_{\operatorname{Spec} A} U_2 \subset X \times_{\operatorname{Spec} A} X$ への制限 $U_1 \cap U_2 \to U_1 \times_{\operatorname{Spec} A} U_2$ も閉埋め込みのはずだが，この射は環でいうと $A[t] \otimes A[t] \to A[t, t^{-1}]$ であり全射でないので，スキームでいうと閉埋め込みになっていない．

余談 5.35. ちなみに，昔は今で言う分離的なスキームのことをスキームとよび，今で言うスキームのことを**前スキーム** (*prescheme*) とよんでいたらしい．

余談 5.36. 分離性ぐらいいつでも成り立ってほしい（分離的でないものはあまり触りたくない）という気持ちがある．一方で，非分離的なところに幾何的に重要な現象の情報を見いだせることもある．

例えば，$\mathcal{M}$ を K3 曲面＋付加構造[*40]のモジュライ空間とする．これは，自然な全単射 $\operatorname{Hom}(S, \mathcal{M}) \leftrightarrow \{X = (X, L) \to S \mid$ 平坦射で，各ファイバーは K3 曲面＋付加構造 $\}$ を意味する．付値環 $R \subset K = \operatorname{Frac} R$ とこの付値体上の K3 曲面＋付加構造 $X \to \operatorname{Spec} K$ であって，それの $\operatorname{Spec} R$ への延長（すなわち，射 $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ と同型射 $\mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} K \xrightarrow{\sim} X$ の組）は存在するとは限らないが，存在する場合にも互いに同型でない 2 つ以上が存在することがある．これは $\mathcal{M}$ が対応する点で非分離的であるということに他ならない（余談 5.46 参照）．なお，2 つの延長 $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ に対し，flop という操作の有限列 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \dashrightarrow \mathcal{X}_1 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow \mathcal{X}_n = \mathcal{X}'$ が存在することが知られている[*41]．

定義 5.37 (普遍閉，固有性)**.** スキームの $f\colon Y \to X$ が**普遍閉** (*universally closed*) であるとは，f の任意の底変換が閉写像である（つまり，任意の射 $Z \to X$ に対し $f_Z\colon Y \times_X Z \to Z$ が閉写像である）ことをいう．

スキームの $f\colon Y \to X$ が**固有** (*proper*) であるとは，f が分離的かつ有限型かつ普遍閉であることをいう．

余談 5.38. ちなみにこの定義（普遍閉のところ）も位相空間の連続写像の固有性の言い換えと思える（何らかの仮定の下で？）らしいです．

命題 5.39. $g\colon Z \to Y$, $f\colon Y \to X$ を射とする．P を分離，固有のいずれかとする．

[*40] 例えば，巨大かつネフな因子（の線形同値類）

[*41] 私が示しました [LM18, Proposition 4.7].

(1) f が P を満たすならば f の底変換も P を満たす.

(2) g と f が P を満たすならば $f \circ g$ も P を満たす.

(3) $f \circ g$ が P を満たし f が分離ならば g も P を満たす.

証明. (1) 容易.

(2) 分離について，$\Delta_{Z/X} \colon Z \to Z \times_X Z$ は $Z \xrightarrow{\Delta_{Z/Y}} Z \times_Y Z \cong Z \times_Y Y \times_Y Z \xrightarrow{1 \times \Delta_{Y/X} \times 1} Z \times_Y Y \times_X Y \times_Y Z \cong Z \times_X Z$ と書けるので閉埋め込みである．他は容易.

(3) 下の図式において，上の射は f に関する仮定から閉埋め込みでありとくに P を満たし，下の射は仮定より P を満たし，それらの底変換である真ん中の横の射 2 本も P を満たし，それらの合成である g は P を満たす.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\Delta_{Y/X}"] & Y \times_X Y & \\
Z \arrow[u] \arrow[r, "(1_Z, g)"'] \arrow[ur, phantom, "\neg"] & Z \times_X Y \arrow[u, "(g, 1_Y)"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Z \arrow[r, "f \circ g"'] & X
\end{tikzcd}$$

□

命題 5.40. 有限射は固有である.

証明. 分離と有限型は明らかなので普遍閉を示せばよいが，有限射の底変換は有限射なので，有限射が閉写像であることを示せばよい．アフィンスキームの射 $f \colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ の場合に帰着できる．対応する環の（有限）射を $\phi \colon A \to B$ と書く．イデアル $I \subset B$ に対して $f(V(I)) = V(\phi^{-1}(I))$ であることを示せばよい.

$\subset$ は明らかである．$\supset$ を示そう．$\phi \colon A/\phi^{-1}(I) \to B/I$ に置き換えることで，$\phi \colon A \to B$ が有限かつ単射ならば $f \colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が全射であることに帰着された．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ をとる．$A \to A_{\mathfrak{p}}$ は平坦（次小節参照）ゆえ $A_{\mathfrak{p}} \to B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ も有限かつ単射になるので，$\mathfrak{p}$ は唯一の極大イデアルだと仮定してよい．$A \to B$ は単射で $A \neq 0$ なので $B \neq 0$ である．B の極大イデアル $\mathfrak{q}$ をとる．$A/\phi^{-1}(\mathfrak{q}) \to B/\mathfrak{q}$ は有限とくに整なので，$B/\mathfrak{q}$ が体であることから $A/\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ が体であることが従う．したがって $\phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ である. □

命題 5.41. 射影空間 $\mathbb{P}^n_X$ は X 上固有である.

証明. 分離性は容易で，有限型は明らかで，普遍閉については環 A に対し $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ が閉写像であることを確かめればよい．これの証明は代数幾何の教科書を見てください．（例えば [Liu02, Theorem 3.3.30], [Har77, Theorem II.4.9].） □

定義 5.42 (射影的射)**.** 射 $Y \to X$ が Hartshorne [Har77, Section II.4] の意味で**射影的** (*projective*) であるとは，ある n に対して閉埋め込み $Y \to \mathbb{P}^n_X$ と自然な射 $\mathbb{P}^n_X \to \operatorname{Spec} X$ の合成で書けることをいう.

EGA [EGA2, Définition 5.5.2] ではもう少し広い**射影的** (*projective*) 射の定義を採用している（略）. Hartshorne の意味で射影的ならば EGA の意味で射影的であり，X が例えばアフィンならば逆も成り立つ.

例 5.43 (射影的ならば固有)**.** 閉埋め込みは固有であり，固有な射の合成も固有なので，Hartshorne の意味で射影的ならば固有である.

（定義を述べていないが）EGA の意味で射影的ならば固有である．

体 k 上固有だが射影的でないスキームは存在するが，それなりに議論が必要である．詳しくは [Har77, Remark II.4.10.2] とそこからの引用を参照せよ．一方で，次の結果を用いて，固有スキームに関する主張を射影スキームの場合に帰着できることも多い．

定理 5.44 (Chow の補題)**.** X をネータースキームとし，$f\colon Y \to X$ を固有射とすると，射 $g\colon Y' \to Y$ で，g と $f \circ g$ が射影的であり，g が Y の稠密開集合上同型であるものが存在する．

証明．代数幾何の教科書を見てください． □

命題 5.45. Hartshorne の意味で射影的な射の底変換や合成は Hartshorne の意味で射影的である．

証明．底変換は明らか．合成については，$\mathbb{P}^n$ 上の $\mathbb{P}^m$ が射影的であることを示せばよく，環の射

$$\mathbb{Z}[R_{ij} \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m] \to \mathbb{Z}[T_i \mid 0 \leq i \leq n] \otimes \mathbb{Z}[S_j \mid 0 \leq j \leq m]\colon R_{ij} \mapsto T_i \otimes S_j$$

が誘導する閉埋め込み $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^{nm+n+m}_{\mathbb{Z}}$（Segre embedding）を使えばよい． □

余談 5.46 (付値判定法)**.** 位相空間論においては，ハウスドルフ性・準コンパクト性はそれぞれ**ネット** (*net*) [*42]の収束先の一意性・収束部分ネットの存在で言い換えることができる．これの類似として，スキームの射の分離性や固有性を，付値環の商体のスペクトルからの射の延長の一意性や存在で特徴づける**付値判定法** (*valuative criterion*) が存在する．詳細は省略するが，付値環の基本的な例である離散付値環のスペクトルの位相だけ紹介しておくと，閉点 s と生成点 η からなる 2 点集合 $\{\eta, s\}$ で（したがって開集合系は $\{\emptyset, \{\eta\}, \{\eta, s\}\}$ で），その商体は開部分スキーム $\{\eta\}$ に対応する．

5.4 平坦射

平坦性は幾何的イメージを掴みづらいが，射の族として連続的なもの（突然増えたりしないもの）という傾向がある気がします．

定義 5.47 (平坦射)**.** A 加群 M が**平坦** (*flat*) であるとは，任意の（長さ有限または無限の）A 加群の完全列

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} N_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} N_n \xrightarrow{f_n} N_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

に対して，列

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}\otimes 1_M} N_{n-1} \otimes_A M \xrightarrow{f_{n-1}\otimes 1_M} N_n \otimes_A M \xrightarrow{f_n \otimes 1_M} M_{n+1} \otimes_A M \xrightarrow{f_{n+1}\otimes 1_M} \dots$$

が完全になることをいう．またこのとき M は A 上平坦であるという．

A 加群 M が**忠実平坦** (*faithfully flat*) であるとは，平坦であり，かつ逆も成り立つ（$\otimes_A M$ して完全ならば元の列も完全）であることをいう．

A 代数 B の平坦性も同様に（B を A 加群とみなして）定義する．

スキームの射 $f\colon Y \to X$ が平坦であるとは，各 $y \in Y$ に対し $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ が平坦であることをいう．

[*42] 点列の一般化で，定義域を $\mathbb{N}$ に限らず一般の有向集合とする．例えば `https://ncatlab.org/nlab/show/net` 参照．一般化せずに点列だけで考えると点列コンパクトと準コンパクトは同値にならない．

注 5.48. 環の射の平坦性は各 $\mathfrak{p}$ での局所化で判定できる(問題 5.8)ので, $A \to B$ の平坦性と $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ の平坦性は同値である.

命題 5.49. (1) A 加群 M が平坦のとき，これが忠実平坦であることと任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し $M/\mathfrak{m}M \neq 0$ であることは同値である.

(2) A 代数 B が平坦のとき，これが忠実平坦であることと $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が全射であることは同値である.

証明. 可換環論の教科書を見てください. □

注 5.50. この手の性質は,

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

の形の完全列について確かめれば十分である．この形の完全列を**短完全列** (*short exact sequence*) という.

さらに今の場合は，$0 \to I \to A$（I は A のイデアル）の形の場合に確かめればよい．すなわち，任意のイデアル $I \subset A$ に対して $I \otimes_A B \to B$ が単射ならば，B は A 上平坦である.

注 5.51. 完全列を完全列にうつす操作のことを**完全** (*exact*) であるという.

M を A 加群とすると，テンソル積 $\otimes_A M$（をとる操作）は完全とは限らないが，次は成り立つ.

$$N' \to N \to N'' \to 0$$

が完全ならば

$$N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

も完全である．このことを，テンソル積（をとる操作）は**右完全** (*right exact*) であるという.

例 5.52. M が A 加群として自由ならば，A 上平坦である．とくに，A が体ならば，任意の A 加群は平坦である.

環の局所化 $A \to A_S$ は平坦である.

環の局所化が誘導する射 $\operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ は平坦であり，開埋め込みは平坦である．実際，各茎での射は同型または 0 である．閉埋め込みは多くの場合に平坦でない.

証明は少し大変だが次が成り立つ.

定理 5.53 ([Mil80, Theorem I.2.12], [SP, Tag 01UA])**.** ネータースキームの局所有限型で平坦な射 $Y \to X$ は開写像である．ネーターを仮定しない場合，局所有限表示で平坦な射 $Y \to X$ は開写像である.

5.5 不分岐射，エタール射

余談 5.54. 命題 5.63 あたりを見るに，エタール射は "局所同型" という雰囲気があります．しかしそう解釈するためには Zariski 位相では位相が弱すぎることが分かります．というわけで後々エタール位相とかを導入しまして……13 節へ続く.

定義 5.55 (不分岐射)**.** 局所有限表示な射 $f\colon Y \to X$ が $y \in Y$ で**不分岐** (*unramified*, フランス語 *net*) であるとは，$f(y) = x$ とおくとき,（$\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ と $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ を各局所環の極大イデアルとするとき）

$\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y}$ が成り立ち，かつ，剰余体の拡大 $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \to \kappa(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ が有限次分離拡大*43であることをいう．

任意の $y \in Y$ で不分岐であるとき f は不分岐であるという．

注 5.56. 例えば $\mathcal{O}_K$ を代数体 K の整数環とし，$K' \subset K$ を部分体とし，$\mathfrak{p}$ を 0 でない素イデアルとするとき，$\mathfrak{p}$ での $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$ の不分岐性は整数論でいう不分岐性と一致する．

定義 5.57 (エタール射)**.** 局所有限表示な射 $f\colon Y \to X$ が**エタール** (*étale*, フランス語 *étale*) *44とは，不分岐かつ平坦であることをいう．

開埋め込みはエタールである．閉埋め込みは不分岐だが，ほとんどの場合エタールでない．

$\operatorname{Spec} A[x] \to \operatorname{Spec} A$ は平坦だが，どの点でも不分岐でない．

補題 5.58. A をネーター環とし，$Q(t) \in A[t]$ をモニック多項式とする．$B = (A[t]/(Q(t)))[Q'(t)^{-1}]$ とおくと $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ はエタールである．

このような射を *standard étale morphism* という．日本語訳はよく知りません．

略証. 平坦性は（自由加群の場合と局所化の場合の合成なので）明らか．

不分岐性を考える．A が体（各点での剰余体）の場合を考えればよい．このとき，Q が（代数閉包上で）重根をもつとまずいが，重根は Q と Q' の共通零点でのみ発生し，いま Q' は可逆なので大丈夫． □

例 5.59. $n \in \mathbb{N}$ が A で可逆であり $a \in A^*$ のとき，$Q(t) = t^n - a$ と $Q'(t) = nt^{n-1}$ が生成する A のイデアルは (1) なので，$\operatorname{Spec} A[t]/(t^n - a) \to \operatorname{Spec} A$ はエタールであり，しかも有限かつ全射である

したがって，$n \in \mathbb{N}$ が A で可逆ならば $\operatorname{Spec} A[x^{1/n}, x^{-1/n}] \to \operatorname{Spec} A[x, x^{-1}]$ はエタールで有限な全射である．

実は次が成り立つ．

命題 5.60. X をスキームとする．スキームの射 $f\colon Y \to X$ が点 $y \in Y$ でエタールならば，Y と X をそれぞれ y の開近傍と $f(y)$ の開近傍で置き換えると f は開埋め込み $Y \hookrightarrow W$ と standard étale 射 $W \to X$ の合成である．

証明. X を局所ネーターと仮定してよければ [Liu02, Proposition 4.4.11]．一般には [SP, Tag 02GT]． □

命題 5.61. $g\colon Z \to Y$, $f\colon Y \to X$ を局所有限型な射とする．P を不分岐，エタールのいずれかとする．

(1) f が P を満たすならば f の底変換も P を満たす．
(2) g と f が P を満たすならば $f \circ g$ も P を満たす．
(3) $f \circ g$ が P を満たし f が不分岐ならば g も P を満たす．

証明. (1) 容易．

(2) 局所環の局所射 $\operatorname{Spec} C \xrightarrow{g} \operatorname{Spec} B \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} A$ の場合に帰着できる．容易．

*43 この「分離」は separable でありスキームの射の分離性（separated）とは英語では異なる．ちなみに位相空間論では separable は「可分」なので訳し分けられていますね．

*44 フランス語 étale は「(水面が) 静止している」などの意味だそうです．`https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/lec.html` も参照．

(3) P が不分岐の場合は容易（f が不分岐という仮定は不要）．P がエタールの場合は [SP, Tag 00U7]．または，局所ネーターを仮定する場合，「$Y \to X$ が不分岐 $\iff$ 対角射 $Y \to Y \times_X Y$ が開埋め込み」という同値（命題 5.71）を用いて示すことができる．下の図式において，上の射はこの同値から開埋め込みでありとくに P を満たし，下の射は仮定より P を満たし，それらの底変換である真ん中の横の射 2 本も P を満たし，それらの合成である g は P を満たす．

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\Delta_{Y/X}"] & Y \times_X Y & \\
Z \arrow[u] \arrow[r, "(1_Z, g)"'] \arrow[ur, phantom, "\neg"] & Z \times_X Y \arrow[u, "(g, 1_Y)"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Z \arrow[r, "f \circ g"'] & X
\end{tikzcd}
$$

□

定義 5.62 (接空間)**.** X をスキーム，$x \in X$ を点とするとき，$\kappa(x)$ ベクトル空間 $T^*_{X,x} := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ を x での**余接空間** (*cotangent space*) といい，そのベクトル空間としての双対 $T_{X,x} := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$ を x での**接空間** (*tangent space*) という．

スキームの射 $f\colon Y \to X$ と点 $y \in Y$, $x = f(y) \in X$ に対し，接空間の射 $T_{f,y}\colon T_{Y,y} \to T_{X,x} \otimes_{\kappa(x)} \kappa(y)$ と余接空間の射 $T^*_{f,y}\colon T^*_{X,x} \otimes_{\kappa(x)} \kappa(y) \to T^*_{Y,y}$ が定まる．

命題 5.63. $f\colon Y \to X$ がスキームの射で，y でエタールならば，接空間の射と余接空間の射は同型である．

証明. 各局所環の射 $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ について考えればよい．これが平坦なので，$\mathfrak{m}_x^i \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \cong \mathfrak{m}_x^i \mathcal{O}_{Y,y}$ $(i = 1, 2)$ であり，$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \cong (\mathfrak{m}_x \otimes \mathcal{O}_{Y,y})/(\mathfrak{m}_x^2 \otimes \mathcal{O}_{Y,y})$ である．左辺の $\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y}$ は $\otimes_{\kappa(x)} \kappa(y)$ と同じことであり，右辺では $\mathfrak{m}_x \otimes \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$ なので，余接空間の方の射が同型であることが分かる．

$\kappa(x) \to \kappa(y)$ は有限次拡大なので，接空間の射も同型である．□

注 5.64. 5.6 節で導入する微分加群の層 Ω^1 は余接空間を “つなげた” ものである．

5.6 微分加群

定義 5.65 (導分)**.** B を A 代数，M を B 加群とする．B から M への A 上の**導分** (*derivation*) とは，A 加群の射 $D\colon B \to M$ であって，積に関して Leibniz 則 $D(b_1 b_2) = b_1 D(b_2) + b_2 D(b_1)$ を満たすものをいう．（ほとんどの場合，これは B 加群の射にならない．）なおこのとき $D(A) = 0$ がすぐに分かる．

導分全体のなす B 加群を $\mathrm{Der}_A(B, M)$ と書く．

定義 5.66 (微分加群)**.** A, B を定義 5.65 の通りとする．普遍的な導分を B の**微分加群** (*module of relative differentials*) とよび $d\colon B \to \Omega^1_{B/A}$ と書く．すなわち，d は導分であり，任意の導分 $D\colon B \to M$ はある一意的な B 加群の射 $\Omega^1_{B/A} \to M$ と d との合成として表される．言い換えると，$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \to \mathrm{Der}_A(B, M)\colon f \mapsto f \circ d$ は全単射である．

M のことも単に微分加群とよぶ．

命題 5.67. B を A 代数とする．集合 $\{db \mid b \in B\}$ で自由生成する B 加群の，イデアル $(d(b_1 + b_2) - db_1 -$

$db_2,\ d(b_1b_2)-b_1db_2-b_2db_1,\ da \mid a\in A,\ b_1,b_2\in B)$ による商は微分加群の普遍性を満たす．とくに，微分加群は存在する．

しかしこの（身も蓋もない）構成より，次の構成の方が扱いやすい．

命題 5.68. B を A 代数とする．I を $B\otimes_A B\to B\colon b_1\otimes b_2\mapsto b_1b_2$ の核とする．$B\otimes_A B$ を $b\cdot(b_1\otimes b_2):=b_1\otimes bb_2$ により B 加群とみなす．$\Omega^1:=I/I^2$ は B 加群である．写像 $d\colon B\to\Omega^1$ を $d(b):=b\otimes 1-1\otimes b$ で定めると，これは Leibniz 則を満たし導分になる．さらに普遍性も満たす．したがってこの Ω^1 は微分加群である．

証明は演習問題とする（問題 5.10）．

例 5.69. $B=A[t_1,\ldots,t_n]$ のとき，$\Omega^1_{B/A}$ は $dt_1,\ldots,dt_n$ を基底とする（階数 n の）自由 B 加群である．（$f=f(t_1,\ldots,t_n)$ に対し，$df=\sum_{i=1}^n f_{t_i}dt_i$ となる）．
導分の典型例として，$B=M=A[t_1,\ldots,t_n]$ のときの $\frac{\partial}{\partial t_j}$ があり，これは $\Omega^1_{B/A}\to B\colon dt_i\to\delta_{ij}$ に対応する．

定義 5.70 (微分加群の層)**.** $f\colon Y\to X$ をスキームの射とする．**微分加群の層** (*sheaf of relative differentials*) $\Omega^1_{Y/X}$ を，$\mathcal{I}:=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{Y\times_X Y}\to\mathcal{O}_Y)$ として，$\Omega^1_{Y/X}:=\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ により定める．ここで $\Delta\colon Y\to Y\times_X Y$ である．また，$d\colon\mathcal{O}_Y\to\Omega^1_{Y/X}$ を環上の場合と同様に定める．

このとき，$\Omega^1_{Y/X}$ は準連接層であり，アフィン開集合 $V=\operatorname{Spec}B\subset f^{-1}(U)\subset Y$ と $U=\operatorname{Spec}A\subset X$ に対し $d\colon\mathcal{O}_Y(V)\to\Omega^1_{Y/X}(V)$ は $\mathcal{O}_Y(V)$ の $\mathcal{O}_X(U)$ 上の微分加群を与える．

命題 5.71. X を局所ネータースキーム，$f\colon Y\to X$ を局所有限型な射とする．このとき次は同値である．

- f は不分岐.
- $\Omega^1_{Y/X}=0$.
- 対角射 $Y\to Y\times_X Y$ は開埋め込み.

証明. [Mil80, Proposition I.3.5]. □

せっかく微分加群の層を導入したのでついでに標準因子の紹介だけします．以下本小節の終わりまで定義をサボります．

命題 5.72. $f\colon Y\to X$ が相対次元 n の滑らかな射ならば，$\Omega^1_{Y/X}$ は階数 n の局所自由層になる．

定義 5.73. 体 k 上の滑らかな n 次元代数多様体[*45]に対し，$\Omega^1_{X/k}$ の最高次外積 $\Omega^n_{X/k}:=\bigwedge^n\Omega^1_{X/k}$ は階数 1 の局所自由層すなわち線束になる．この線束を**標準束** (*canonical bundle*) といい，対応する因子（線形同値を除いて一意に定まる）を**標準因子** (*canonical divisor*) という

実際には「滑らか」より緩い仮定で定義できる．標準束・標準因子は代数多様体論，とくに双有理幾何においてきわめて重要な役割を果たすが，本講義ではこれ以上立ち入らない．

[*45] 体 k 上の代数多様体の定義は k 上有限型・整にしておきます．

演習問題

問題 5.1. ネータースキームは位相空間としてネーターであることを示せ．

問題 5.2 (☆固有でない典型的な例)**.** k を体とする (0 環でない環ならなんでもよい)．射 $f\colon \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[t] \to \operatorname{Spec} k$ は普遍閉でなく，したがって固有でないことを示せ．

問題 5.3 (位相空間のハウスドルフ性の言い換え)**.** X を位相空間とする．次が同値であることを示せ．

(1) X はハウスドルフである．
(2) 対角射 $\Delta = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)\colon X \to X \times X$ は閉写像である．
(3) Δ の像は閉集合である．

問題 5.4 (☆アフィン射は分離的)**.** アフィンスキームの間の射は必ず分離的であることを示せ．（したがって，アフィン射は分離的である．）

問題 5.5 (【難しい】分離性の言い換え)**.** X をスキームとする．次の条件が同値であることを示せ．

- X は分離的である．
- あるアフィン開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ が存在して次の条件が成り立つ：任意の $i, j \in I$ に対して，$U_i \cap U_j$ もアフィンであり，かつ $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes \mathcal{O}_X(U_j) \to \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ は全射である．
- 任意のアフィン開被覆に対して前項と同じ条件が成り立つ．

問題 5.6 (【かなり難しい】有限型の言い換え)**.** $f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．次の条件が同値であることを示せ．

- f は有限型である．すなわち，アフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ と各 i に対する有限アフィン開被覆 $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ が存在し，$U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$ とおくとき B_{ij} は有限生成 A_i 代数である．
- X の任意のアフィン開集合 U に対し，$f^{-1}(U)$ は準コンパクトであり，かつ，任意のアフィン開集合 $V \subset f^{-1}(U)$ に対し，$U = \operatorname{Spec} A$, $V = \operatorname{Spec} B$ とおくとき B は有限生成 A 代数である．

問題 5.7 (【難しい】有限性の言い換え)**.** $f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．次の条件が同値であることを示せ．

- f は有限である．すなわち，アフィン開被覆 $X = \bigcup_i U_i$ が存在し，各 i に対する有限アフィン開被覆 $f^{-1}(U_i)$ はアフィンであり，$U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$ とおくとき B_i が有限生成 A_i 代数である．
- X の任意のアフィン開集合 U に対し，$f^{-1}(U)$ はアフィンであり，$U = \operatorname{Spec} A$, $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ とおくとき B は有限 A 代数である．

問題 5.8 (平坦性は局所的に確認できる)**.** A 加群 B に対し次が同値であることを示せ．

- B は A 上平坦である．
- 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対し，$B_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ 上平坦である．

問題 5.9. k を体，$n \geq 1$ を正整数，$A = k[t]$, $B = A[s]/(s^n - t)$ とするとき，$\Omega^1_{B/A}$ を計算せよ．

問題 5.10 (☆対角射を用いた微分加群の構成)**.** B を A 代数とする．I を $B \otimes_A B \to B\colon b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$ の核とする．$B \otimes_A B$ を $b \cdot (b_1 \otimes b_2) := b_1 \otimes bb_2$ により B 加群とみなす．$\Omega^1 := I/I^2$ は B 加群である．写像 $d\colon B \to \Omega^1$ を $d(b) := b \otimes 1 - 1 \otimes b$ で定めると，これが微分加群になることを示せ．

6 位相空間の基本群と被覆空間

参考文献：いいものがあったら教えてください．

定義 6.1 (連結性（再掲）)**.** 位相空間 X が**連結** (*connected*) であるとは，$X \neq \emptyset$ であり，互いに交わらない開集合 U_1, U_2 が $X = U_1 \cup U_2$ を満たすならば $X = U_1$ または $X = U_2$ を満たすことである．2 条件を合わせて「X がどの 2 つも互いに交わらない有限個の開集合 $U_1, \ldots, U_n$ の和集合ならばある i に対して $X = U_i$ である」と言い表すこともできる．

6.1 基本群

$I = [0, 1]$ を閉区間とする．X を位相空間とする．

$[0, 1]$ の 0 と 1 を同一視した商位相空間を S^1 と同一視し，0 と 1 の像を基点とする．この空間は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とも同一視する．

定義 6.2 (弧・道・パス，ループ)**.** I から X への連続写像を X 上の**弧**，**道**，**パス** (*path*)，とよぶ．$f(0) = x$, $f(1) = x'$ とおくとき，x のことをパスの始点，x' のことをパスの終点とよぶ．また，f を x から x' へのパスであるという．$f\colon x \rightsquigarrow x'$ と表すこともある．

始点と終点が一致しているパス，または S^1 から X への連続写像，のことを X 上の**ループ** (*loop*) とよぶ．ループの始点＝終点のことは基点とよぶ．

定義 6.3 (弧状連結性)**.** 位相空間 X が**弧状連結** (*path-connected*) であるとは，$X \neq \emptyset$ であり，かつ任意の 2 点 $x, x' \in X$ に対し x から x' へのパスが存在することをいう．2 条件を合わせて「任意の有限部分集合 $F \subset X$ に対し，連続写像 $f\colon I \to X$ であって $\mathrm{Im}(f) \supset F$ なるものが存在する」と言い表すこともできる（同値性の証明には後述のパスの合成を用いればよい）．

定義 6.4 (パスの合成，逆)**.** f, g が X 上のパスで，$f(1) = g(0)$ を満たすとき，合成 $g * f\colon I \to X$ を

$$(g * f)(t) = \begin{cases} f(2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ g(2t - 1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定める．

f が X のパスのとき，逆 $f^{-1}\colon I \to X$ を $f^{-1}(t) = f(1 - t)$ で定める．

$h * (g * f) = (h * g) * f$ は一般に成り立たない（像は一致するが “速度” が異なる）．しかしホモトピー類は等しい（命題 6.9）．

定義 6.5 (ホモトピー)**.** 連続写像 $f_0, f_1\colon Y \to X$ の間の**ホモトピー** (*homotopy*) とは，連続写像 $H\colon Y \times I \to$

X であって $H|_{Y\times\{0\}} = f_0$, $H|_{Y\times\{1\}} = f_1$ を満たすものである．

f_0, f_1 の間にホモトピーが存在するとき $f_0 \sim f_1$ と書き，f_0, f_1 は**ホモトピック** (*homotopic*) であるという．これは同値関係であり，同値類を $[f]$ などと書きホモトピー類とよぶ．

イメージとしては，「f_0 を連続的に変形して f_1 にできる」ということである．

定義 6.6 (端点を保つホモトピー). $Y = I$ とし，連続写像 $f_0, f_1\colon Y \to X$ が $f_0(0) = f_1(0)$ および $f_0(1) = f_1(1)$ を満たすとする．このとき，f_0, f_1 の間の端点を保つホモトピーとは，定義 6.5 の条件に加えて $H(0,s) = f_0(0) = f_1(0)$，$H(1,s) = f_0(1) = f_1(1)$ を満たすものをいう．

同様に，$Y = S^1$ からの連続写像に対する基点を保つホモトピーを定義する．

例 6.7. $X = \mathbb{R}^n$ ならば，任意の f_0, f_1 はホモトピックである．実際，$H(y,t) = (1-t)f_0(y) + tf_1(y)$ は f_0 から f_1 へのホモトピーである．$Y = I$ でパス f_0, f_1 の始点同士と終点同士が等しいときは，このホモトピーは端点を固定する．もう少し一般に X が $\mathbb{R}^n$ の凸集合でも同様である．

例 6.8. X が $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で，f_0 が単位円を一周するパス，f_1 を単位円上の一点から動かないパスとすると，前項のような H は（X への写像にならないので）ホモトピーにならない．実はこの f_0 と f_1 はホモトピックでない．このことは，例えば後述の被覆空間への作用を調べることで証明できる．

命題 6.9. f, g, h が X 上のパスで，$f(1) = g(0)$，$g(1) = h(0)$ を満たすとき，$h*(g*f) \sim (h*g)*f$ である．

f が X 上のパスのとき，$f * c_{f(0)} \sim f \sim c_{f(1)} * f$, $f^{-1} * f \sim c_{f(0)}$, $f * f^{-1} \sim c_{f(1)}$ が成り立つ．ただし c_x は x に値をとる定数写像である．

証明は演習問題とする（問題 6.1）．

命題 6.10. x を基点とするループのホモトピー類全体の集合を $\pi_1(X,x)$ と書く．前述の 2 項演算 $*$（合成），単項演算 $-^{-1}$（逆）は $\pi_1(X,x)$ 上の演算を誘導し（これも $*$ などと書く），定数写像 c_x を単位元とする群構造を定める．

略証. 演算が well-defined であることを示す：難しくない．すると，単位元については明らかで，結合法則と逆は命題 6.9 から従う． □

定義 6.11. この群を X の**基本群** (*fundamental group*) とよぶ．

命題 6.12. c が x から x' へのパスならば，$\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x')\colon f \mapsto c \circ f \circ c^{-1}$ は群の同型を与える．

とくに，X が弧状連結ならば，任意の $x, x' \in X$ に対して，$\pi_1(X,x)$ と $\pi_1(X,x')$ は群として同型である．（同型射は一般にパス c のとり方に依存するので，標準的な同型射があるわけではないが，$\pi_1(X,x)$ の内部自己同型[*46]を除いては標準的に定まる．）

証明. 容易． □

命題 6.13. $g\colon X \to Y$ を連続写像とし，$g(x) = y$ とすると，$[f\colon S^1 \to X] \mapsto [g \circ f\colon S^1 \to Y]$ が群準同型 $g_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ を与える．

[*46] 群 G の**内部自己同型** (*inner automorphism*) とは，ある元 $g \in G$ による共役（すなわち $x \mapsto gxg^{-1}$）の形に書ける自己同型をいう．

証明. well-defined 性はホモトピーと g を合成したものがホモトピーになるのでよい. 準同型になるのは明らか. □

ところで, 基点をわざわざ選ばずに済む定式化もある. 圏論の用語については 7.1 節を参照してください.

定義 6.14 (基本亜群)**.** 次で定める圏 $\Pi_1(X)$ を X の**基本亜群** (*fundamental groupoid*) とよぶ.

- 対象は X の点.
- x から x' への射は, x を始点とし x' を終点とするパスの（端点を固定する）ホモトピー類.
- x の恒等射は定数写像 $c_x\colon I \to \{x\} \subset X$（のホモトピー類).
- 射の合成はパスの合成（のホモトピー類).

命題 6.15. これは実際に圏をなす. さらに, $\Pi_1(X)$ の任意の射は同型射である. また, 各 $x \in X$ に対して, $\mathrm{Aut}_{\Pi_1(X)}(x) = \pi_1(X, x)$ である.

証明. 最初の 2 つの主張は命題 6.10 と同様. 最後の主張は定義から明らか. □

なお, 任意の射は同型射だが, 任意の 2 対象が同型というわけではない（任意の 2 対象が同型であることは, X が弧状連結または空であることと同値である).

例 6.16 (向き付き曲面)**.** X を（実）向き付き閉曲面とする. このときある $g \in \mathbb{N}$ が存在し, X は球面に g 個の "ハンドル" をつけたものに同相であることが知られている.（この空間の俗な表現として "g 人乗り浮き輪" が ある.）適当に（ハンドル上以外から）基点をとり, 各ハンドルについてかくかくしかじかのループ α_i, β_i（$1 \leq i \leq g$）をとると $[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2]\dots[\alpha_g, \beta_g] = 1$ が成り立つ. ただし $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ は交換子である. 実はこの X の基本群は

$$\pi_1(X) = \langle \alpha_i, \beta_i \mid [\alpha_1, \beta_1]\dots[\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$$

であることが知られている. 証明はトポロジーの教科書を見てください. とくに, $g = 0$ ならば自明群, $g = 1$ ならば $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に同型であり, $g \geq 2$ ならば非可換群である.

次に, X' を X から相異なる $r \in \mathbb{N}$ 個の点を除いた空間とする（どの r 点を選んでも同相である). このとき, 各除外点を回るループ γ_j を適切にとると,

$$\pi_1(X') = \langle \alpha_i, \beta_i, \gamma_j \mid [\alpha_1, \beta_1]\dots[\alpha_g, \beta_g]\gamma_1\dots\gamma_r = 1 \rangle$$

であることが知られている. とくに, $r > 0$ ならばこれは階数 $2g + r - 1$ の自由群である.

6.2 被覆空間

定義 6.17. 連続写像 $p\colon Y \to X$ が**被覆写像** (*covering map*) であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して, x の近傍 U と離散空間 S と同相写像 $p^{-1}(U) \to U \times S$ であって U への射影と可換なものが存在することである. Y のことは**被覆空間** (*covering space*, フランス語 *revêtement*) [*47]という.

$p_1\colon Y_1 \to X, p_2\colon Y_2 \to X$ が被覆写像のとき, 被覆空間の射 $f\colon Y_1 \to Y_2$ とは, 連続写像であって $p_2 \circ f = p_1$ を満たすものをいう.

[*47] 「開被覆」などの意味の「被覆」とはそこまで意味が近くないことに注意しましょう. フランス語だと「開被覆」などの方には recouvrement という別単語を使うので違いが分かりやすい.

例 6.18. S を離散空間，X を位相空間とすると，$S \times X \to X$ は（自明な）被覆空間である．

$n \geq 1$ を正整数とする．$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への n 倍写像が誘導する $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ から S^1 への写像は被覆写像である．$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ から $\mathbb{C}^*$ への n 乗写像も被覆写像である．$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への n 乗写像は $n \geq 2$ ならば被覆写像でない．

例 6.19. X を位相空間とし，V を部分集合として埋め込み $i\colon V \to X$ を考えると，これが被覆写像であることは V が開かつ閉であることと同値である．というのは，被覆写像ならば $x \in X$ に対して $x \in V$（resp. $x \in X \setminus V$）ならば i の逆像が 1 個（resp. 0 個）になる x の近傍が存在するはずで，すなわち V と $X \setminus V$ が開であり，逆にこれらが開ならば定義に現れる近傍としてこれらをとれば被覆写像であることが分かる．

いま $Y \to X$ を被覆写像として，Y 上の点 y の像を始点とする X 上のパスが与えられたとき，局所同相性から y を “このパスに沿って動かす” ことで Y 上のパスを作れる．さらに，同様にパスを “ホモトピーに沿って動かす” ことで Y 上のホモトピーを作れる．

命題 6.20 (path lifting property)**.** $p\colon Y \to X$ を被覆写像，$f\colon I \to X$ を x を始点とするパス，$y \in Y$ を $p(y) = x$ を満たす点とすると，y を始点とするパス $\tilde{f}\colon I \to Y$ で $p \circ \tilde{f} = f$ を満たすものが一意に存在する．

証明．トポロジーの教科書を見てください． □

命題 6.21 (homotopy lifting property)**.** $p\colon Y \to X$ を被覆写像, $f_0, f_1\colon I \to X$ を X 上のパス, $H\colon I \times I \to X$ を f_0 と f_1 の間のホモトピーとし，$\tilde{f}_0\colon I \to Y$ を f_0 の lift（命題 6.20）とすると，連続写像 $\tilde{H}\colon I \times I \to Y$ であって $p \circ \tilde{H} = H$ と $\tilde{H}|_{I \times \{0\}} = \tilde{f}_0$ を満たすものが一意に存在する．H が端点を保つならば $\tilde{H}$ も端点を保つ．

証明．トポロジーの教科書を見てください． □

6.3 基本群と被覆空間の関係

定義 6.22 (各種の連結性)**.** X を位相空間とする．

- X が**単連結** (*simply connected*) とは，連結かつ任意のループのホモトピー類が自明であることをいう．後者の条件は任意の $x \in X$ に対して $\pi_1(X, x) = 1$ であることに同値である．
- X が**半局所単連結** (*semi-locally simply connected*) とは，各点 x が $\mathrm{Im}(\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)) = 1$ を満たす U からなる基本近傍系をもつことをいう．（$\pi_1(U, x)$ 自身が自明であるようにとれるときは**局所単連結** (*locally simply connected*) という．）
- X が**局所弧状連結** (*locally path connected*) とは，各点 x が弧状連結な近傍からなる基本近傍系をもつことをいう．

さて，命題 6.20, 6.21 から，次が分かる．

命題 6.23. $p\colon Y \to X$ を被覆写像とする．群 $\pi_1(X, x)$ の $p^{-1}(x)$ への作用で，$\tilde{f}\colon I \to Y$ が $p(\tilde{f}(0)) = p(\tilde{f}(1)) = x$ を満たすとき $[p \circ \tilde{f}] * \tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$ を満たすものが一意に存在する．

また，この作用は X の被覆空間の射と可換である．

すなわち，$\pi_1(X, x)$ の元の作用とは，その元（の代表元であるパス）をリフトする Y 上のパスの始点を終

点にうつすものである．

基本亜群バージョンは：

命題 6.24. $p\colon Y \to X$ を被覆写像とすると，関手 $\Pi_1(X) \to \mathsf{Sets}$ が次で定まる．

- 対象 $x \in X$ に集合 $p^{-1}(x)$ を対応させる．
- 射 $x \to x'$，すなわち x から x' へのパス γ のホモトピー類，に対して次で定める写像 $p^{-1}(x) \to p^{-1}(x')$ を対応させる：$y \in p^{-1}(x)$ に対し，命題 6.20 から定まる γ のリフト $\tilde{\gamma}$ の終点を対応させる．

$\mathrm{Aut}_{\Pi_1(X)}(x) = \pi_1(X, x) \to \mathrm{Aut}(p^{-1}(x))$ が前命題の作用を与える．

命題 6.25. この構成は被覆写像の間の射と可換で，関手 $\mathrm{Fib}\colon \mathsf{Cov}/X \to \mathsf{Sets}^{\Pi_1(X)} = \mathrm{Fun}(\Pi_1(X), \mathsf{Sets})$ が定まる．

ここで $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ は圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手のなす圏（対象は関手，射は関手の間の自然変換）である．

証明. やればできる． $\square$

定理 6.26. X が局所弧状連結かつ半局所単連結ならば，命題 6.25 の関手 $\mathrm{Fib}\colon \mathsf{Cov}/X \to \mathsf{Sets}^{\Pi_1(X)}$ は圏同値である．

略証. 準逆となる関手 $R\colon \mathsf{Sets}^{\Pi_1(X)} \to \mathsf{Cov}/X$ を構成する．$\mathsf{Sets}^{\Pi_1(X)}$ の対象，すなわち関手 $F\colon \Pi_1(X) \to \mathsf{Sets}$ をとる．これは各 $x \in X$ に対し集合 F_x を与え各 $\gamma\colon x \rightsquigarrow x'$ に対し写像 $F_\gamma\colon x \to x'$ を与える．$R(F) = \coprod_{x \in X} F_x$（集合としての直和）とし，写像 $p\colon R(F) \to X$ を $F_x \to \{x\} \subset X$ を合わせたものとする．次を満たす組 (U, y) を考える：$y \in R(F)$ であり，U は半局所単連結の定義中の条件を満たす $p(y)$ の開近傍である．このような組に対し集合 $V(U, y) \subset R(F)$ を，$p(y)$ を始点とする U 内のパス γ に対する $F_\gamma(y)$ $(\in F_{\gamma(1)})$ 全体の集合とする．$R(F)$ に $\{V(U, y)\}_U$ を y の基本近傍系とする位相を入れる：各 y に対しこの族が空でなく，$p\colon R(F) \to X$ が被覆写像になることを示すときに半局所単連結を用いる．

$\mathsf{Sets}^{\Pi_1(X)}$ の射が被覆空間の射を与えることの証明は略.

$R \circ \mathrm{Fib}$ が恒等関手になることを示すときに局所弧状連結を用いる． $\square$

X が弧状連結で $x \in X$ が点のとき，$\mathrm{Fib}(x)$ さえ分かっていれば，この関手による他の各点の行先についても x からのパスとつなぐことで分かるだろう．というわけで次が成り立つ．

定理 6.27. X が弧状連結かつ局所弧状連結かつ半局所単連結ならば，各 $x \in X$ に対し，命題 6.25 の関手に $x \in \Pi_1(X)$ を適用した $\mathsf{Cov}/X \to \pi_1(X, x)$-$\mathsf{Sets}$ は圏同値である．

ここで $\pi_1(X, x)$-Sets は群 $\pi_1(X, x)$ の作用する集合の圏を表す．

ところで，弧状連結の場合には被覆空間の中に最も基本的なものが存在する．

定義 6.28. X を弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とする．X の**普遍被覆空間** (*universal covering space*) とは，X の被覆空間 Y で弧状連結かつ単連結なものをいう．普遍被覆ともいう．

命題 6.29. $\tilde{X} \to X$ が普遍被覆空間ならば，$\pi_1(X)$ は $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$ に同型である．

定理 6.30. X が弧状連結かつ局所弧状連結かつ半局所単連結ならば，普遍被覆空間をもつ．

略証．Cov/X と $\mathsf{Sets}^{\Pi_1(X)}$ の対応において，推移的かつ自由な作用[*48]が弧状連結かつ単連結な被覆に対応することが示せる．点 $x_0 \in X$ をとり，関手 $x \mapsto \mathrm{Hom}(x, x_0)$ を考えると自由かつ（X が弧状連結ゆえ）推移的なので，対応する被覆は普遍被覆である． □

例 6.31. $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ は普遍被覆である．その自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^*)$ は $\mathbb{Z}$ である（$n \in \mathbb{Z}$ が $z \mapsto z + n \cdot (2\pi\sqrt{-1})$ で作用する）．したがって，$\mathbb{C}^*$ の基本群は $\mathbb{Z}$ に同型である．

演習問題

問題 6.1. 命題 6.9 を証明せよ．

問題 6.2. 連続写像の列 $Z \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{p} X$ であって，

(1) p と q は被覆写像だが $p \circ q$ は被覆写像でない例を挙げよ．
(2) p と $p \circ q$ は被覆写像だが q は被覆写像でない例を挙げよ．
(3) q と $p \circ q$ は被覆写像だが p は被覆写像でない例を挙げよ．

（なお，この問題の前提となる定義では，被覆にも X に一切の連結性を課しておらず，また被覆の有限性も課していない．）

問題 6.3. 以下の連続写像が被覆写像か否か判定せよ．（$\mathbb{R}$ などには Euclid 位相を入れる．）

(1) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x$.
(2) $\mathbb{R} \to [-1, 1]\colon x \mapsto \sin(x)$.
(3) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$.
(4) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\sim$, ただし $\sim$ は $(x_1, \ldots, x_n)$ と $(-x_1, \ldots, -x_n)$ を同一視する同値関係.
(5) $S^n \to S^n/\sim$, ただし $\sim$ は $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の対蹠点（$(x_1, \ldots, x_{n+1})$ に対する $(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$）を同一視する同値関係.

問題 6.4. $p\colon Y \to X$ を普遍被覆とし，y, x を $p(y) = x$ を満たす点とする．

$q\colon Z \to X$ を（Z が）連結な被覆写像とし z を $q(z) = x$ を満たす点とすると，被覆空間の射 $\phi\colon Y \to Z$ で $\phi(y) = z$ を満たすものが存在することを示せ．また，$\pi_1(Z, z) \to \pi_1(X, x)$ は単射であることを示せ．

上記のような (q, Z, z) の組の同型類は $\pi_1(X, x)$ の部分群と一対一対応することを示せ．

問題 6.5 (☆一次分数変換)**.** モジュラー群 $G := \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det = 1\}/\{\pm I_2\}$ は上半平面 $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ で作用する．

(1) $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/G$ は被覆写像ではないことを示せ．（$\mathcal{H}/G$ には商位相を入れる．）
(2) G の指数有限部分群 $G' \subset G$ であって，$\mathcal{H} \to \mathcal{H}/G'$ が被覆写像であるものを 1 つ挙げよ．

問題 6.6. $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の普遍被覆を，被覆写像が平面への射影となる形の 3 次元図形として実現してくだ

[*48] $F\colon \Pi_1(X) \to \mathsf{Sets}$ が推移的（resp. 推移的かつ自由）とは，任意の $x, x' \in \mathrm{Obj}(\Pi_1(X))$ と任意の元 $a \in F(x), a' \in F(x')$ に対し，$\gamma \in \mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, x')$ が存在して（resp. 一意的に存在して）$F(\gamma)(a) = a'$ となることをいう．

さい．（といっても $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は非有界だし被覆は無限次で作るのは実際には困難ですので，全体が想像できるような一部のみでかまいません.）本問は画像または動画（もしくは実物）での提出を推奨します.

7 圏論の用語の準備

参考文献：圏論一般については Mac Lane [ML98]（和訳あり）が古典的で，Riehl [Rie16][*49]もよいとか. アーベル圏やホモロジー代数の方向では中岡 [中岡 15] や志甫 [志甫 16] という和書が最近出ています.

7.1 圏，関手，自然変換

定義 7.1 (圏)**.** **圏** (*category*) $\mathcal{C}$ とは，次の 4 つのデータ (1), (2), (3), (4) の集まりであって，条件 (5), (6) を満たすものをいう.

(1) **対象** (*object*) の集まり $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
(2) 各対象 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対し，X から Y への**射** (*morphism*) の集まり $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,
(3) 各対象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対し，X の**恒等射** (*identity morphism*) とよばれる射 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$,
(4) 各対象 $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対し，写像 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. この写像による (f, g) の像を $g \circ f$ と書き，f と g の**合成射** (*composite morphism*) とよぶ.
(5) 対象 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ と射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して，$f = f \circ 1_X = 1_Y \circ f$ が成り立つ.
(6) 対象 X, Y, Z, A と射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, A)$ に対して，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ.

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し，X を**始域** (*domain*)（または *source*），Y を**終域** (*codomain*)（または *target*）という.

注 7.2. 圏 $\mathcal{C}$ の対象の集まり $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ は多くの場合に集合ではない（大きすぎる）. このようなものを不注意に扱うと集合論的逆理（例えばラッセルのパラドックス）を招きかねない. 解決策の 1 つとして，所定の集合論的操作で閉じている集合（**宇宙** (*universe*)）を導入し,（宇宙の存在を保証する公理を追加し,）宇宙 U を 1 つ固定し，実際には U に属する対象のみを扱う（例えば集合の圏だったら対象として U に属する集合のみを考える）というものがある. また,「すべての集合の集まり」などを扱える**クラス**の概念を導入し，ZFC 公理系の拡張でクラスを扱える公理系（例えば von Neumann–Bernays–Gödel の公理系）上で考えるという解決策がある気がする. 本講義ではこれ以上は立ち入らない.

各対象 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対する $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は集合となる圏を**局所小** (*locally small*) であるという. これに加えて $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ が集合となる圏を**小さい** (*small*) という.

よく使う圏は局所小なものが多い気がする. この講義に出てくる圏の多くは局所小になる予定ですがどうなるでしょうか.

余談 7.3. 集合の間の写像 $f \colon X \to Y$ と，$X \times Y$ の部分集合で所定の条件を満たすものを同一視する流儀があり，その場合 f と $f \colon X \to \mathrm{Im}(f)$ は等しいことになるが，上記の圏の定式化（射はその始域と終域の情報を含む）とは両立しない. しないからどうということもありませんが.

[*49] PDF 版が著者のページ `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context/` で配布されています

例 7.4 (圏の例)**.**

(1) 集合の圏：対象は集合，射は集合の間の写像，恒等射は恒等写像，合成射は合成写像．

(2) 点付き集合の圏：対象は点付き集合（集合とその集合の元との組，この元のことを基点とよぶ），射は基点を基点にうつす写像．

(3) 位相空間の圏：対象は位相空間，射は連続写像．同様に，点付き位相空間の圏．

(4) ホモトピー圏：対象は位相空間，射は連続写像のホモトピー類．

(5) パスの圏（定義 6.14 の基本亜群とは異なる）: X を位相空間として，対象は X の元，x から y への射はある非負実数 $r \geq 0$ に対する連続写像 $f\colon [0,r] \to X$ で $f(0) = x, f(r) = y$ なるもの，射 $f\colon [0,r] \to X$ と $g\colon [0,s] \to X$（$f(r) = g(0)$）の合成は

$$g * f\colon [0, r+s] \to X, \quad (g * f)(t) = \begin{cases} f(t) & (t \in [0,r]), \\ g(t-r) & (t \in [r,s]). \end{cases}$$

(6) アーベル群の圏：対象はアーベル群，射はアーベル群の準同型．同様に，A を環として，左 A 加群の圏：対象は左 A 加群で，射は左 A 加群の射．（A が体のときは A ベクトル空間の圏ともよぶ．）

(7) 有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の圏．

(8) 有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の圏もどき：対象は自然数（0 以上），n から m への射は複素数成分 $m \times n$ 行列，合成射は行列の積．

(9) 環の圏．体の圏．

(10) 位相空間 X 上のアーベル群（など）の前層の圏．層の圏．

(11) 集合 S が定める次のような圏：対象は S の元，射は各対象に対する恒等射のみ．

(12) モノイド M が定める次のような圏：対象は 1 つ，射の集合が M で恒等射と合成射はモノイドの単位元と乗法そのもの．

(13) モノイド M が集合 S に作用しているとき，次のような圏：対象は S の元，s から s' への射は $\{m \in M \mid m * s = s'\}$，恒等射と合成射はモノイドの単位元と乗法そのもの．

(14) 前順序集合 $(I, \prec)$ が定める次のような圏：対象は I の元，i から i' への射は $i \prec i'$ のとき 1 つでありそうでないとき 0 個である．

(15) $\mathcal{C}$ を圏，$X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ を対象とする．圏 $\mathcal{C}/X$ を次のように定める：対象は X を終域とする $\mathcal{C}$ の射で，$f\colon Y \to X$ から $f'\colon Y' \to X$ への射とは $\mathcal{C}$ の射 $\phi\colon Y \to Y'$ で図式を可換にする（すなわち $f = f' \circ \phi$ を満たす）ものである．同様に，X を始域とする $\mathcal{C}$ の射を対象とする圏 $X/\mathcal{C}$ を定める．このような圏を $\mathcal{C}$ の *slice category* という[*50]．

定義 7.5 (関手)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**関手** (*functor*) F とは，次の 4 つのデータ (1), (2) の集まりであって，条件 (3), (4) を満たすものをいう．

(1) $\mathcal{C}$ の各対象 $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathcal{D}$ の対象 $F(c) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

(2) $\mathcal{C}$ の各射 $f\colon c \to c'$ に対して，$\mathcal{D}$ の射 $F(f)\colon F(c) \to F(c')$.

(3) 恒等射を保つ，すなわち $F(1_c) = 1_{F(c)}$.

(4) 合成射を保つ，すなわち $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

[*50] [ML98, Section II.6] では $\mathcal{C}/X$ を $(\mathcal{C} \downarrow X)$ と書き $X/\mathcal{C}$ を $(X \downarrow \mathcal{C})$ と書いている．

定義 7.6 (反変関手)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**反変関手** (*contravariant functor*) F とは，定義 7.5 のデータ (2) を

(2)' $\mathcal{C}$ の各射 $f\colon c \to c'$ に対して，$\mathcal{D}$ の（逆向きの）射 $F(f)\colon F(c') \to F(c)$.

に変えて，条件 (4) を

(4)' 合成射を保つ，すなわち $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

に変えたものである．反変関手と区別したいときは定義 7.5 の関手のことは**共変関手** (*covariant functor*) とよぶ．

定義 7.7 (逆圏)**.** 圏 $\mathcal{C}$ に対しその**逆圏** (*opposite category*) （または**反対圏**）$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を，$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ とし，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$ とし，射の合成を $\mathcal{C}$ での射の（逆順での）合成とすることで定める．

反変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と共変関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ は等価な概念である．

例 7.8 (関手の例)**.**

(1) $\mathcal{C}$ が圏，X が $\mathcal{C}$ の対象のとき，$\mathrm{Hom}(X, -)$ は $\mathcal{C}$ から Sets への共変関手であり，$\mathrm{Hom}(-, X)$ は $\mathcal{C}$ から Sets への反変関手である．定理 7.37 も見よ．

(2) 次のようなものを総合して**忘却関手** (*forgetful functor*) という（他にもたくさんある）[*51]．
   (a) スキームの圏から位相空間の圏へ：局所的にアフィンスキームの形に書けることと環の層のことを忘れる．
   (b) 位相空間の圏から集合の圏へ：位相を忘れる．
   (c) 点付き集合の圏から集合の圏へ：基点を忘れる．
   (d) アーベル群の圏から集合の圏へ：演算を忘れる．
   (e) アーベル群の圏から群の圏へ：可換だったことを忘れる．

(3) Spec は，環の圏から，アフィンスキームまたはスキームまたは局所環付き空間または位相空間または集合の圏への反変関手である．

(4) X を位相空間とするとき，アーベル群（など）M に対して X 上の定数層 $\underline{M}$ を対応させる関手.

(5) A を環とするとき，A 加群 M に対して $\mathrm{Spec}\, A$ 上の準連接層 $\tilde{M}$ を対応させる関手.

(6) X を位相空間，U をその開集合とするとき，X 上のアーベル群（など）の層 F に対しアーベル群（など）$F(U) = \Gamma(U, F)$ を対応させる関手.

(7) 例 7.4(8) の圏から例 7.4(7) の圏への，n を $\mathbb{C}^n$ にうつし，$A \in \mathrm{Hom}(n, m) = M_{m \times n}(\mathbb{C})$ を対応する線形写像 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ にうつす関手.

(8) ホモロジー群，ホモトピー群.

(9) 例 7.4(14) の圏からアーベル群（など）の圏への共変関手（resp. 反変関手）は順系（resp. 逆系）に他ならない．前層はこれの特殊な場合である．

(10) 群やモノイドの表現．モノイド（や群）M が例 7.4(12) のように定める圏から例 7.4(6) の k ベクトル空間の圏への関手は，M の表現と同一視できる．

(11) $A \to B$ が環の射のとき，$- \otimes_A B$ は A 加群の圏から B 加群の圏への関手である．

(12) 層の順像や逆像や茎．前層の層化.

[*51] 一口に忘却関手といってもいろいろなものがある．`https://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property` 参照.

定義 7.9 (自然変換)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手 F から G への**自然変換** (*natural transformation*) $\phi\colon F \Longrightarrow G$ とは，次のデータ (1) の集まりであって，条件 (2) を満たすものをいう．

(1) $\mathcal{C}$ の各対象 $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathcal{D}$ の射 $\phi(c)\colon F(c) \to G(c)$.
(2) $\mathcal{C}$ の各射 $f\colon c \to c'$ に対して，$\mathcal{D}$ の射の等式 $\phi(c') \circ F(f) = G(f) \circ \phi(c)$ が成り立つ.

例 7.10 (自然変換の例)**.**

(1) k を体とする．$V \mapsto V^* := \mathrm{Hom}(V, k)$ は k ベクトル空間の圏から自身への反変関手である．自然な射 $V \to V^{**}$ は k ベクトル空間の圏から自身への関手 id から $**$ への自然変換を与える．これは自然同型ではない．一方，有限次元 k ベクトル空間の圏で同様に得られる自然変換は自然同型である．
(2) 例 7.8(9),(10) のように前層（や順系や逆系）や表現を関手とみると，前層（や順系や逆系）や表現の射は関手の自然変換である．
(3) $f\colon Y \to X$ を位相空間の射とするとき，Y 上の層の圏から自身への関手 $f^{-1}f_*$ から id へ自然な自然変換があり，X 上の層の圏から自身への関手 id から f_*f^{-1} へ自然な自然変換がある．（参考：命題 3.40 で見た層の逆像と順像の随伴性との関係を考えよ[*52]．）

定義 7.11 (自然同型)**.** 自然変換 $\phi\colon F \to G$ が**自然同型** (*natural isomorphism*) であるとは, 各 $\phi(c)\colon F(c) \to G(c)$ が同型射であることをいう．これは逆をもつことと同値である．

定義 7.12 (圏同値，準逆)**.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が互いに**準逆** (*quasi-inverse*) であるとは，自然同型 $G \circ F \Longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ と $F \circ G \Longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ が存在することをいう．

準逆をもつ関手 F を**圏同値** (*equivalence of categories*) という．（このとき準逆も圏同値である．）

圏同値が存在するとき $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を**同値** (*equivalent*) であるという．

注 7.13. $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ と $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$ が成り立つとき F, G を *strong inverse* といい，**圏同型** (*isomorphism of categories*) というが，この条件はちょっと強すぎるのであまり登場しない．

定義 7.14 (忠実・充満)**.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**忠実** (*faithful*)，**充満** (*full*) であるとは，それぞれ，各対象 $c, c' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$ が単射，全射であることをいう．

定義 7.15 (本質的全射)**.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**本質的全射** (*essentially surjective*) であるとは，任意の対象 $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ に対し対象 $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ が存在して $F(c)$ と d が（$\mathcal{D}$ で）同型になることをいう．

命題 7.16. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が圏同値であることと，忠実充満かつ本質的全射であることは同値である．

証明. 圏論の教科書を見てください． □

余談 7.17. 命題 7.16 には一見 “単射性” のような条件が見当たりませんが，$\mathrm{Isom}(c, c') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(F(c), F(c'))$ が忠実充満性から従います．というのは，$\mathrm{Isom}(c, c') = \{f \in \mathrm{Hom}(c, c') \mid \exists g \in \mathrm{Hom}(c', c), gf = 1_c, fg = 1_{c'}\}$ であり，この右辺に現れる $\mathrm{Hom}(c, c'), \mathrm{Hom}(c', c), = 1_c, = 1_{c'}$ がすべて F する前と後で変わらないので.

例 7.18. 例 7.8(7) の関手は忠実充満かつ本質的全射なので，圏同値である．一方，片や対象が可算個で片や対象がたくさんあることから，圏同型ではない．

[*52] というより，随伴性を示す際にすでにこれらを使っているはず.

7.2 モノ射とエピ射

定義 7.19 (モノ射)**.** 射 $f\colon X \to Y$ が**モノ射** (*monomorphism*)，**モニック** (*monic*) であるとは，任意の対象 W と射 $e_1, e_2\colon W \to X$ に対し $f \circ e_1 = f \circ e_2 \implies e_1 = e_2$ が成り立つ（すなわち，任意の対象 W に対して $\mathrm{Hom}(W, X) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}(W, Y)$ が単射である）ことをいう．

定義 7.20 (エピ射)**.** 射 $f\colon X \to Y$ が**エピ射** (*epimorphism*)，**エピ** (*epi*) であるとは，任意の対象 Z と射 $g_1, g_2\colon Y \to Z$ に対し $g_1 \circ f = g_2 \circ f \implies g_1 = g_2$ が成り立つ（すなわち，任意の対象 Z に対して $\mathrm{Hom}(Y, Z) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}(X, Z)$ が単射である）ことをいう．

例 7.21. 集合の圏や A 加群の圏の場合，それぞれ単射と全射に同値である．
環の圏の場合，$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ はエピである．
ハウスドルフ位相空間の圏の場合 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$（Euclid 位相）や一般に像が稠密な連続写像はエピである．位相空間の圏の場合はそうではない．

注 7.22. 集合や環や位相空間の圏のように対象の底集合がはっきりしている場合には，モノと単射（resp. エピと全射）が一致するかしないかを考えることができる．一般の圏では対象の底集合は定まらないが，$\mathcal{C}$ から Sets への忠実な関手 ε が与えられている場合にはこれを使って考えることができる．ちなみにこのような関手 ε をそなえた圏のことを**具体圏** (*concrete category*) という．

モノ射・エピ射は集合の圏の単射・全射の概念の 1 つの（一般の圏への）一般化だが，他の一般化も考えられる．例えば定義 7.33 参照．

7.3 図式と（余）極限

定義 7.23 (始対象・終対象・零対象)**.** 圏の対象 I が**始対象** (*initial object*) であるとは，任意の対象 X に対し $\mathrm{Hom}(I, X)$ が 1 元集合であることをいう．
圏の対象 T が**終対象** (*terminal object*) であるとは，任意の対象 X に対し $\mathrm{Hom}(X, T)$ が 1 元集合であることをいう．
始対象かつ終対象である対象を**零対象** (*zero object*) という．

例によって普遍性より，存在すれば一意的な同型を除いて一意である．

例 7.24. 集合の圏では空集合 $\emptyset$ が始対象，1 元集合が終対象である．位相空間の圏でも同様である．
環の圏では $\mathbb{Z}$ が始対象，0 環が終対象である．
前順序集合が定める圏（例 7.4(14)）では始対象（resp. 終対象）であることと最小元（resp. 最大元）であることが同値である．なお，存在するとは限らない．
A 加群の圏では 0 が零対象である．

直積やファイバー積などを包括する概念として（図式に関する）極限がある．

定義 7.25 (図式)**.** 圏 $\mathcal{C}$ 上の図式とは，対象の集まり $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と射の集まり $\{f_\mu\colon X_{s(\mu)} \to X_{t(\mu)}\}_{\mu\in M}$ の組

のことである．ここで $\mu \in M$ に対し $s(\mu), t(\mu) \in \Lambda$ は射の始域と終域[*53]を表す．なお，平行な（i.e. 始域と終域を同じくする）射が複数存在してもよく，また合成可能な射の合成と平行な射が存在する必要はなく，存在しても一致する必要はない．Λ と M が両方有限であるときに有限な図式という．

定義 7.26 (極限)**.** 図式 $(\{X_\lambda\}, \{f_\mu\})$ の**極限** (*limit*) とは，対象 W と射の集まり $\{g_\lambda \colon W \to X_\lambda\}$ の組で，$f_\mu \circ g_{s(\mu)} = g_{t(\mu)}$ を満たし，かつこのようなものの中で普遍的なものをいう．すなわち，任意の対象 V に対して，

$$\mathrm{Hom}(V, W) \xrightarrow{g_\lambda \circ -} \{(h_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}(V, X_\lambda) \mid \forall \mu, f_\mu \circ h_{s(\mu)} = h_{t(\mu)}\}$$

が全単射である．

定義 7.27 (余極限)**.** 図式 $(\{X_\lambda\}, \{f_\mu\})$ の**余極限** (*colimit*) とは，対象 Y と射の集まり $\{g_\lambda \colon X_\lambda \to Y\}$ の組で，$g_{t(\mu)} \circ f_\mu = g_{s(\mu)}$ を満たし，かつこのようなものの中で普遍的なものをいう．すなわち，任意の対象 Z に対して，

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \xrightarrow{- \circ g_\lambda} \{(h_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}(X_\lambda, Z) \mid \forall \mu, h_{s(\mu)} \circ f_\mu = h_{s(\mu)}\}$$

が全単射である．

注 7.28. 図式に登場する f_{μ_1} の終域と f_{μ_2} の始域が一致しているとき，それらの合成である射 $f_{\mu_2} \circ f_{\mu_1}$ を図式に付け加えても，（余）極限の概念は変わらない．したがって，図式は（小さな）圏をなしていると仮定しても一般性を失わない．（ただし，有限な図式から作った圏は有限な圏にならないことがある．）

$\mathcal{C}$ が極限（resp. 余極限）を必ずもつとき，$\mathcal{C}$ は**完備** (*complete*) である，極限をもつ（resp. **余完備** (*cocomplete*) である，余極限をもつ）という．任意の有限図式に関する極限（resp. 余極限）をもつときは，有限極限をもつ（resp. 有限余極限をもつ）という．

余談 7.29. 3.2.2 節で定義した順極限・逆極限と比較して名前付けが逆転していますが，理由はよく知りません．（私は「product/coproduct の一般化になっているのが limit/coilmit」と覚えています．いやわざわざ覚えずに都度調べてもいいのですが．）

例 7.30. 射を 0 個含む図式の極限（resp. 余極限）は直積（resp. 直和）である．その特殊な場合として，対象と射を 0 個ずつ含む図式の極限（resp. 余極限）は終対象（resp. 始対象）である．

図式 $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ の極限はすなわち差核である．

図式 $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ の極限はすなわちファイバー積である．

命題 7.31. $\mathcal{C}$ を圏とする．

(1) 次は同値である．
  (a) $\mathcal{C}$ は極限をもつ．
  (b) $\mathcal{C}$ は直積と差核をもつ．
(2) 次は同値である．
  (a) $\mathcal{C}$ は有限極限をもつ．

[*53] source と target のつもりで記号をふりました．

(b) $\mathcal{C}$ は有限直積と差核（2 本の射に対するもの）をもつ．

(c) $\mathcal{C}$ は終対象とファイバー積（例 7.30 で述べた形のもの）をもつ．

証明. (2) のみ示す（(1) も同様）．

(2)a $\Longrightarrow$ (2)c は自明．

(2)c $\Longrightarrow$ (2)b：終対象を T とする．$X_1, \dots, X_n$ の直積は $(\dots((T \times_T X_1) \times_T X_2) \dots) \times_T X_n$ である．$f, g\colon X \to Y$ の差核は，$X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y$ と $Y \xrightarrow{(1,1)} Y \times Y$ のファイバー積である．

(2)b $\Longrightarrow$ (2)a：有限図式 $(\{X_\lambda\}, \{f_\mu\})$ に対し，2 つの射 $f, g\colon \prod_\lambda X_\lambda \to \prod_\mu X_{t(\mu)}$ を，$\mathrm{pr}_\mu \circ f = \mathrm{pr}_{t(\mu)}$，$\mathrm{pr}_\mu \circ g = f_\mu \circ \mathrm{pr}_{s(\mu)}$ で定めると，f, g の差核がこの図式の極限である． $\square$

双対的に次も成り立つ．

命題 7.32. $\mathcal{C}$ を圏とする．

(1) 次は同値である．
   (a) $\mathcal{C}$ は余極限をもつ．
   (b) $\mathcal{C}$ は直和と余等化子[*54]をもつ．

(2) 次は同値である．
   (a) $\mathcal{C}$ は有限極限をもつ．
   (b) $\mathcal{C}$ は有限直和と余等化子（2 本の射に対するもの）をもつ．
   (c) $\mathcal{C}$ は始対象と $X \leftarrow S \to Y$ の余極限[*55]をもつ．

定義 7.33 (strict epi 射)**.** ファイバー積をもつ圏 $\mathcal{C}$ での射 $u\colon Y \to X$ が *strict epi* **射** (*strict epimorphism*) [*56]であるとは，任意の対象 Z に対して $\mathrm{Hom}(X, Z) \xrightarrow{\circ u} \{f \in \mathrm{Hom}(Y, Z) \mid f \circ \mathrm{pr}_1 = f \circ \mathrm{pr}_2\colon Y \times_X Y \to Z\}$ が全単射であることをいう．言い換えると，$\mathrm{Hom}(X, Z) \xrightarrow{\circ u} \mathrm{Hom}(Y, Z) \underset{\circ\,\mathrm{pr}_2}{\overset{\circ\,\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(Y \times_X Y, Z)$ が差核図式である．

集合の圏ではエピ射（＝全射）と strict epi 射の概念は一致する．

命題 7.34. $p\colon Y \to X$ が被覆写像かつ全射ならば，（位相空間の圏で）strict epi 射である．

証明は演習問題とする（問題 7.4）．

定理 7.35 ([Mil80, Theorem I.2.17], [SP, Tag 023Q])**.** スキームの忠実平坦な射は strict epi 射である．

X, Y, Z がアフィンスキームの場合が基本的で，これは忠実平坦な射 $f\colon A \to B$ に対して

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i_1 - i_2} B \otimes_A B$$

が完全であることに帰着され，これは問題 12.5 である．

[*54] 等化子（差核）と双対的に定義されるもの．

[*55] pushout（訳は「押し出し」でしょうか？）．

[*56] 文献の間で用語に揺れがある気がします．

7.4 表現可能関手

定義 7.36 (関手の圏)**.** $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とするとき，関手の圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ を，対象は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手，射は関手の自然変換として定める．（この圏は一般に局所小と限らない．）

定理 7.37 (米田の補題)**.** [*57] 関手 $Y\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Sets})\colon c \mapsto (h_c = \mathrm{Hom}(-, c)\colon d \mapsto \mathrm{Hom}(d, c))$ は忠実充満である．

反変関手 $Y'\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})\colon c \mapsto (h^c = \mathrm{Hom}(c, -)\colon d \mapsto \mathrm{Hom}(c, d))$ も忠実充満である．

これらの関手を**米田埋め込み** (*Yoneda embedding*) という．

定義 7.38 (表現可能関手)**.** 関手 h_c と h^c を対象 c が**表現する** (*represent*) 関手という．

ある対象により表現される関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Sets}$ または $\mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$ を**表現可能関手** (*representable functor*) という．関手が表現可能なとき，それを表現する対象は一意的な同型を除いて一意である．

例 7.39. 米田の補題より，圏の対象 X の性質は h_X や h^X の性質に完全に反映される．普遍性で定義される対象はこの関手の性質による記述と相性がよい．（その普遍性を満たす対象が存在することとその関手が表現可能であることが同値になる．）

- c が始対象 $\iff$ $h^c = \mathrm{Hom}(c, -)$ が 1 点集合（を恒等的にとる関手）．
- c が終対象 $\iff$ $h_c = \mathrm{Hom}(-, c)$ が 1 点集合（を恒等的にとる関手）．
- 対象の族 $(X_i)_{i\in I}$ の直積とは，$\prod_i h_{X_i} = \prod_i \mathrm{Hom}(-, X_i)$ を表現する関手．$I = \emptyset$ のときこれは終対象である．
- 射 $X \to S$ と $Y \to S$ のファイバー積とは，$h_X \times_{h_S} h_Y = \mathrm{Hom}(-, X) \times_{\mathrm{Hom}(-,S)} \mathrm{Hom}(-, Y)$ を表現する関手.
- 前 2 項の一般化として逆系に対する $\varprojlim$ がある：定義 7.26 参照.
- 双対的に，対象の族 $(X_i)_{i\in I}$ の直和とは，$\prod_i h^{X_i} = \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, -)$ を表現する関手（$I = \emptyset$ のときこれは始対象）である．これの一般化として順系に対する $\varinjlim$ がある：定義 7.27 参照.
- X 上の前層 P の層化 $a(P)$ とは，層の圏上の関手 $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(P, i(-))$ を表現するもの．ただし $i\colon \{\mathrm{Sh}/X\} \to \{\mathrm{Presh}/X\}$ は層を前層とみなす（忘却）関手である．随伴性で定義されるものは同様に記述できる．

また，射の性質の記述にも使える．

- 射 $f\colon X \to Y$ がモニック $\iff$ $h_f = f\circ\colon \mathrm{Hom}(-, X) \to \mathrm{Hom}(-, Y)$ が（各対象に対して）単射.
- 射 $f\colon X \to Y$ がエピ $\iff$ $h^f = \circ f\colon \mathrm{Hom}(Y, -) \to \mathrm{Hom}(X, -)$ が（各対象に対して）単射.

7.5 加法圏，核と余核，アーベル圏

大雑把にいえば，アーベル圏とは，零対象や有限直和（＝有限直積）や核や余核や像があり，これらが A 加群の圏と同じようにふるまい（例えば準同型定理が成り立ち），複体やそのコホモロジーの議論を展開できる

[*57] 似たような主張がいろいろありますがどれが米田の補題なんでしたっけ……

圏です.

定義 7.40 (前加法圏)**.** 圏 $\mathcal{C}$ が**前加法圏** (*preadditive category*) であるとは, 各対象 X, Y に対する $\mathrm{Hom}(X, Y)$ にアーベル群構造が定まっており，各対象 X, Y, Z に対し射の合成が定める写像 $\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ が双線形であることをいう.

定義 7.41 (加法圏)**.** 前加法圏 $\mathcal{C}$ が**加法圏** (*additive category*) であるとは，零対象をもち，かつ任意の 2 対象 X, Y に対しその直和が存在することをいう.

命題 7.42. 加法圏 $\mathcal{C}$ に対し次が成り立つ.

(1) 2 対象 X, Y の直和 $X \sqcup Y$ は同時に直積 $X \times Y$ になる．逆に直積は直和になる．これを X, Y の**複積** (*biproduct*) [*58]といい $X \oplus Y$ と書く.
(2) $\mathrm{Hom}(X, Y)$ の加法構造は次で与えられる．$X \to 0 \to Y$ が単位元である（0 は零対象）．$f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ に対し，$X \xrightarrow{(f,g)} Y \oplus Y \xrightarrow{(1,1)} Y$ が $f + g$ である.
(3) 2 個の場合を繰り返し適用する（または零対象を使う）ことにより,（0 個以上）有限個の対象の複積が得られる.

証明. 圏論の教科書を見てください. □

注 7.43. 無限個の対象の直積や直和が存在するとは限らず，存在するときにも一致するとは限らない.（例えばアーベル群の圏や有限生成アーベル群の圏や有限アーベル群の圏を考えよ.）

定義 7.44 (加法関手)**.** 加法圏の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**加法関手** (*additive functor*) であるとは，任意の対象 X, Y に対して $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ がアーベル群の準同型であることをいう.

このとき F は零対象を零対象にうつす．というのは，零対象は id_X が $0_X\colon X \to 0 \to X$ と一致するという性質で特徴づけられるので.

定義 7.45 (核・余核)**.** $f\colon X \to Y$ を加法圏の射とする.

- f の**核** (*kernel*) とは，X への射であって，f との合成が 0 であるものの中で普遍的なものである．核を $\ker(f)\colon \mathrm{Ker}(f) \to X$ と表す．図式 $X \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} Y$ の極限である.
- f の**余核** (*cokernel*) とは，Y からの射であって，f との合成が 0 であるものの中で普遍的なものである．余核を $\mathrm{coker}(f)\colon Y \to \mathrm{Coker}(f)$ と表す．図式 $X \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} Y$ の余極限である.

余談 7.46. 核（余核）と言って対象と射の都合のよい方をさす.

定義 7.47. 加法圏の射 f に対し,

- f の**像** (*image*) を $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}(f))$ で定める.
- f の**余像** (*coimage*) を $\mathrm{Coim}(f) := \mathrm{Coker}(\ker(f))$ で定める.
- このとき，射 $\mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ を自然に（核や余核の普遍性を用いて）定める方法が 2 つあるが，両者は一致する.

[*58] 直和ともいう．紛らわしいですが.

定義 7.48 (アーベル圏)**.** 加法圏 $\mathcal{C}$ が**アーベル圏** (*abelian category*) であるとは，任意の射 f に対し核と余核が存在し，さらに任意の射 f に対し自然な射 $\mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ が同型射になることをいう．

余談 7.49. 最後の条件を "準同型定理（$X/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$）が成り立つ" と表現することがあります．

ところでアーベル圏の定義をどれにするかが本によって異なったりしますね．

命題 7.50. 前加法圏に対し次は同値である．

- 定義 7.48 の意味でアーベル圏である．
- 零対象をもち，任意の 2 対象の直和と直積をもち，核と余核をもち，任意のモノ射（resp. エピ射）はある射の核（resp. 余核）である．

証明. [中岡 15, 命題 4.1.20]. □

例 7.51. 環 A に対する A 加群の圏はアーベル圏である．直和・核・余核・像は通常の意味のそれと一致する．

とくに，アーベル群（$= \mathbb{Z}$ 加群）の圏はアーベル圏である．（これが語源でしょう．）

余談 7.52. 「性質 P を満たす A 加群の圏 $\mathcal{C}$」を考えて核や余核が存在するかや準同型定理が成り立つかを調べる際に注意することですが，$\mathcal{C}$ の射 $f \colon X \to Y$ の A 加群としての核や余核が性質 P を満たさないからといって $\mathcal{C}$ で核や余核が存在しないとは限りません．例えば階数有限自由 $\mathbb{Z}$ 加群の圏の射 $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ を考えると，($\mathbb{Z}$ 加群としての余核 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は自由ではありませんが,）0 がこの圏での余核になります．

命題 7.53.

(1) X を位相空間とし，A を環とする．X 上の A 加群の前層の圏はアーベル圏になる．
(2) X を位相空間とし，A を環とする．X 上の A 加群の層の圏はアーベル圏になる．
(3) X を局所環付き空間とする．$\mathcal{O}_X$ 加群の層の圏はアーベル圏になる．
(4) X をスキームとする．準連接層の圏はアーベル圏になる．

略証. (1) 容易．$f \colon P \to Q$ の核，余核はそれぞれ $U \mapsto \operatorname{Ker}(f(U))$，$U \mapsto \operatorname{Coker}(f(U))$ であり，準同型定理は各 U ごとの準同型定理から従う．

(2) $f \colon F \to G$ の核は $U \mapsto \operatorname{Ker}(f(U))$ であり，これは層になる；余核は $U \mapsto \operatorname{Coker}(f(U))$ の層化である（これは一般に層化しないと層にならない．例えば例 10.9 を見よ．）．準同型定理は前層の場合の準同型定理と層化の普遍性から従う．

(3) $f \colon P \to Q$ を $\mathcal{O}_X$ 加群の層の射とするとき，アーベル群の層としての核・余核が $\mathcal{O}_X$ 加群の層になっているのでよい．

(4) 同様に，$f \colon P \to Q$ を準連接層の射とするとき，アーベル群の層としての核・余核が準連接層になっていることを確かめればよい．$X = \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームとしてよい．$\operatorname{Spec} A$ 上の準連接層の圏は A 加群の圏と圏同値（系 4.27）であり，とくに核や余核も対応するのでよい． □

7.6 完全性

定義 7.54 (完全列)**.** アーベル圏の射の図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が（B で）**完全** (*exact*) であるとは，（B の部分対象として）$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ であることをいう．もっと長い系列についても同様である．

$0 \to A \to B \to C \to 0$ の形の完全列を**短完全列** (*short exact sequence*) という．

命題 7.55 (関手の完全性・左完全性・右完全性)**.** F をアーベル圏の間の加法関手とする．

(1) 次は同値である．
 (a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が完全ならば，$0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ は完全である．
 (b) $0 \to M' \to M \to M''$ が完全ならば，$0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ は完全である．
 (c) F は核をたもつ（射 f に対し自然な射 $F(\mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Ker}(F(f))$ は同型である）．
(2) 次は同値である．
 (a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が完全ならば，$F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ は完全である．
 (b) $M' \to M \to M'' \to 0$ が完全ならば，$F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ は完全である．
 (c) F は余核をたもつ（射 f に対し自然な射 $\mathrm{Coker}(F(f)) \to F(\mathrm{Coker}(f))$ は同型である）．
(3) 次は同値である．
 (a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が完全ならば，$0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ は完全である．
 (b) $\cdots \to M_{n-1} \to M_n \to M_{n+1} \to \dots$ が完全ならば，$\cdots \to F(M_{n-1}) \to F(M_n) \to F(M_{n+1}) \to \dots$ は完全である．

証明. ホモロジー代数の教科書を見てください． □

定義 7.56 (複体とそのコホモロジー)**.** 系列 $\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \dots$ が**コチェイン複体** (*cochain complex*)（**余鎖複体**）または単に**複体** (*complex*) であるとは，$d^n \circ d^{n-1} = 0$ が成り立つことをいう．この複体を $(X^\bullet, d^\bullet)$ や単に $X^\bullet$ と表す[*59]．このとき，$\mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1})$ のことを n 次のコホモロジーといい $H^n(X^\bullet)$ と表す．X^n の元を n 次のコチェインという．

添字が増えるのではなく減る方向の複体 $(X_\bullet, d_\bullet)$（$d_n\colon X_n \to X_{n-1}$）は**チェイン複体** (*chain complex*)（**鎖複体**）ともいい，これに対する $H_n(X_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$ を n 次のホモロジーという．X_n の元を n 次のチェインという．

一般に加法関手は複体は保っても完全性やコホモロジーは保たない．どれぐらい保つか・ずれはどれぐらいか，を記述するのが次の概念や 9.1 節で定義する導来関手である．

定義 7.57 (完全関手)**.** 命題 7.55(1) の条件を満たす関手を**左完全** (*left exact*) であるという．

命題 7.55(2) の条件を満たす関手を**右完全** (*right exact*) であるという．

命題 7.55(3) の条件を満たす関手を**完全** (*exact*) であるという．

[*59] $\bullet$ に n を代入するイメージ

反変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が左完全・右完全・完全であるとは，対応する共変関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ が同名の性質を満たすことをいう[*60].

導来関手に関係する概念を導入しておく．なお，A 加群の圏を $\{A\text{-mod}\}$ と書き，アーベル群の圏を $\{\mathrm{Ab}\}$ と書く．

例 7.58. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とし，$X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ とすると，関手 $\mathrm{Hom}(X, -)$ は $\mathcal{A}$ から $\{\mathrm{Ab}\}$ への（共変）左完全関手であり，関手 $\mathrm{Hom}(-, X)$ は反変左完全関手である．証明は容易．

他の例は随伴関手を説明した後に挙げる（例 7.67）．

定義 7.59 (入射的対象・射影的対象)**.** I が**入射的対象** (*injective object*) であるとは，関手 $\mathrm{Hom}(-, I)$ が完全関手であることをいう．

P が**射影的対象** (*projective object*) であるとは，関手 $\mathrm{Hom}(P, -)$ が完全関手であることをいう．

余談 7.60. 定義は双対的ですが，扱いやすさが同じとは限りません．A 加群の圏の場合，射影的であることと自由 A 加群の直和因子であることが同値であることが容易に示せますが，入射的対象の記述はもう少しややこしい．

定義 7.61 (入射的対象・射影的対象を十分もつ)**.** アーベル圏 $\mathcal{A}$ が**入射的対象を十分もつ** (*has enough injective objects*) とは，任意の対象 X に対し入射的対象へのモノ射 $X \to I$ が存在することをいう．

アーベル圏 $\mathcal{A}$ が**射影的対象を十分もつ** (*has enough projective objects*) とは，任意の対象 X に対し射影的対象からのエピ射 $P \to X$ が存在することをいう．

$\mathcal{A}$ がこの性質を満たすとき，余核（resp. 核）に繰り返し適用することにより，入射的対象 I^n からなる完全列 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \dots$ （resp. 射影的対象 P_n からなる完全列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$）が存在することが分かる．このような列を**入射的分解** (*injective resolution*) （resp. **射影的分解** (*projective resolution*) ）という．

7.7 随伴関手

定義 7.62 (随伴関手)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，および 2 つの関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Sets}$ の間の自然同型

$$\theta_{c,d}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d)$$

の 3 つ組のことを *adjunction* という．F を G の**左随伴関手** (*left adjoint functor*) , G を F の**右随伴関手** (*right adjoint functor*) といい，互いに**随伴関手** (*adjoint functors*) であるという．$F \dashv G$, $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathcal{D}$ などと書く．

命題 7.63. $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathcal{D}$ のとき，F は余極限を保ち，G は極限を保つ．

証明. G が極限を保つ方だけ示す（もう片方は同様（双対的）である）．

[*60] 共変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ を対応させると左完全と右完全が逆になってしまうことに注意．なぜこれではなく $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ を基準にしているかはよく知りませんが，$\mathrm{Hom}(-, X)$ と $\mathrm{Hom}(X, -)$ のどちらも左完全になり収まりがよいからでしょうか？

$((d_\lambda)_\lambda, (f_\mu)_\mu)$ を $\mathcal{D}$ における図式とし，$(d, (g_\lambda : d \to d_\lambda)_\lambda)$ をその極限とする．すなわち，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(z, d) \xrightarrow[\sim]{g_\lambda \circ} \{(\phi_\lambda) \in \prod_\lambda \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(z, d_\lambda) \mid f_\mu \text{ と可換 }\}$$

が成り立つとする．$z = F(c)$ とし随伴性を適用することで，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)) \xrightarrow[\sim]{G(g_\lambda) \circ} \{(\psi_\lambda \in \prod_\lambda \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d_\lambda)) \mid G(f_\mu) \text{ と可換 }\}$$

を得，これは $(G(d), (G(g_\lambda) : G(d) \to G(d_\lambda))_\lambda)$ が $((G(d_\lambda)_\lambda), (G(f_\mu))_\mu)$ の極限であることを意味する． □

系 7.64. アーベル圏の間の関手が左随伴関手（resp. 右随伴関手）をもつならば，左完全（resp. 右完全）である．

証明. 核（resp. 余核）を保つことを示せばよいが，核（resp. 余核）は極限（resp. 余極限）なので命題 7.63 から従う． □

命題 7.65. アーベル圏の間の関手が随伴 $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ であるとする．

(1) F が完全ならば，G は入射的対象を保つ．
(2) G が完全ならば，F は射影的対象を保つ．

証明. (1) のみ示す．I が $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ の入射的対象ならば，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(I)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), I)$ は完全な関手 F と $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, I)$ の合成なので完全である． □

例 7.66. 随伴の例をいくつか挙げる．アーベル圏でないものも含む．

(1) A 加群 P に対し，$\mathrm{Hom}(M \otimes_A P, N) = \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(P, N))$.
(2) A 代数 B に対し，$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A B, N) = \mathrm{Hom}_B(M, N|_A)$.
(3) 位相空間の射 $f : Y \to X$ に対し，アーベル群の層の間の $\mathrm{Hom}_Y(f^{-1}F, G) = \mathrm{Hom}_X(F, f_*G)$.
(4) 位相空間の開埋め込み $f : U \to X$ に対し，アーベル群の層の間の $\mathrm{Hom}_Y(f_!G, F) = \mathrm{Hom}_X(G, f^{-1}F)$.
(5) 局所環付き空間の射 $f : Y \to X$ に対し，$\mathcal{O}$ 加群の層の間の $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^*F, G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, f_*G)$.
(6) $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Sh}/X\}}(a(P), F) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Presh}/X\}}(P, \iota(F))$, ただし ι は層の圏から前層の圏への忘却関手.
(7) $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{Ab}\}}(G/[G, G], A) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{groups}\}}(G, \iota(A))$, ι は忘却関手.
(8) $\mathrm{Hom}_{\{\mathrm{groups}\}}(F(S), G) = \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{sets}\}}(S, \iota(G))$, ι は忘却関手で $F(S)$ は集合 S が生成する自由群．他にも様々な「自由 $\dashv$ 忘却」がある．

例 7.67. アーベル圏の間の左完全・右完全・完全な関手の例をいくつか挙げる．完全性のいくつかは系 7.64 で説明がつき，いくつかは直接示せて，残りについては，層化の完全性は系 10.4，逆像の完全性は系 10.5 で示す．前層や層はアーベル群のものとする．

(1) A 加群 P に対し，$\mathrm{Hom}(P, -) : \{A\text{-mod}\} \to \{A\text{-mod}\}$ は左完全であり，A 加群 Q に対し，$\mathrm{Hom}(-, Q) : \{A\text{-mod}\}^{\mathrm{op}} \to \{A\text{-mod}\}$ も左完全である．A が非可換（かもしれない）環の場合は，行先は $\{\mathrm{Ab}\}$ になる．
(2) A 加群 P に対し，$\otimes_A P : \{A\text{-mod}\} \to \{A\text{-mod}\}$ は右完全である．A が非可換（かもしれない）環の場合は，$\{\text{mod-}A\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ になる（$\{A\text{-mod}\}$ は左 A 加群の圏，$\{\text{mod-}A\}$ は右 A 加群の圏を表す）．

(3) A 代数 B に対し，$\otimes_A B\colon \{A\text{-mod}\} \to \{B\text{-mod}\}$ は右完全である．
(4) 位相空間の射 $f\colon Y \to X$ に対し，アーベル群の層の間の $f_*\colon \{\mathrm{Sh}/Y\} \to \{\mathrm{Sh}/X\}$ は左完全であり，$f^{-1}\colon \{\mathrm{Sh}/X\} \to \{\mathrm{Sh}/Y\}$ は完全である．
(5) 位相空間 X に対し，$\Gamma(X,-)\colon \{\mathrm{Sh}/X\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ は左完全である．（これは (4) を X から一点集合への連続写像に適用したものでもある．）
(6) 前層を層化する関手は完全である．層を前層とみなす忘却関手は左完全である．
(7) G を群とし, G 加群の圏を $\{G\text{-mod}\}$ と書く．最大 G 不変部分加群をとる関手 $-^G\colon \{G\text{-mod}\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ は左完全である．最大 G 不変商加群をとる関手 $-_G\colon \{G\text{-mod}\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ は右完全である．（実は，それぞれ群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)$, $-\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$ と同一視できるので，前項までで既に扱っているとも言える．）

対応する導来関手は (1): $\mathrm{Ext}^i_A(P,-)$, $\mathrm{Ext}^i_A(-,Q)$, (2): $\mathrm{Tor}^A_i(-,P)$, (5): $H^i(X,-)$. (7): $H^i(G,-)$, $H_i(G,-)$ で表される．

余談 7.68. 集合 X に対し，冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を包含順序により圏とみなす．この圏における極限（resp. 余極限）は，図式に登場する対象たちの共通部分（resp. 和集合）に他ならない．さて，写像 $f\colon X \to Y$ から，次の 3 つの関手が誘導される：像 $f()\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$；逆像 $f^{-1}()\colon \mathcal{P}(X) \leftarrow \mathcal{P}(Y)$；$A$ に対し $f(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ を対応させる $f_*()\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$．これらは $f \dashv f^{-1} \dashv f_*$ を満たす．命題 7.63 から，学部の初歩で扱う次の事実を得る：像は和集合を保ち，逆像は和集合と共通部分を両方保つ．

$f()$ と $f_*()$ の関係としてはこの他に，

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in f^{-1}(y), x \in A\}$$
$$f_*(A) = \{y \mid \forall x \in f^{-1}(y), x \in A\}$$

と対称的に書けることがある．

演習問題

問題 7.1. 例 7.4,7.8,7.10 からいくつか選び，圏・関手・自然変換になることを確認せよ．または，自分の好きな例を挙げてもよい．（本問の配点は 1 つあたり 1 点（最大 5 点）とする．）

（圏であることの確認とは：(射や恒等射が明記されていない場合には与える,）恒等射があること，射の合成が射になること，結合法則を満たすこと．）

問題 7.2. 例 7.8(2) の各例について，忠実性，充満性，本質的全射性を判定せよ．

問題 7.3.

(1) 集合の圏の始対象と終対象を求めよ．
(2) X を位相空間とする．X 上の集合の前層の圏の始対象と終対象を求めよ．
(3) X 上の集合の層の圏の始対象と終対象を求めよ．

問題 7.4. 命題 7.34 を示せ．

問題 7.5 (【難しい】)**.** 核と余核が存在する加法圏で，アーベル圏ではないものの例を挙げよ．

8 ガロア圏とエタール基本群

参考文献：[SGA1]．解説としては [Cad13] などがある．

あらすじ：所定の性質を満たす圏 $\mathcal{C}$ とそこから有限集合の圏への関手 F をガロア圏およびファイバー関手とよぶ（定義 8.12）．簡単な例として副有限群（8.1 節）G に対する G 作用つき有限集合の圏と G 作用を忘れる忘却関手の組（例 8.13）があるが，実は任意のガロア圏はある G に対するこれと圏同値になる（定理 8.14）．ガロア圏の他の例として連結スキーム X 上の有限エタール射の圏があり（定理 8.17），対応する副有限群をエタール基本群とよぶ（定義 8.19）．X が体のとき，エタール基本群は体の絶対ガロア群になる．X が $\mathbb{C}$ 上有限型のとき，対応する複素解析多様体 X^{an} があるが，その位相的基本群の副有限完備化が X のエタール基本群と自然に同型になる（定理 8.21）．一方で $\mathbb{C}$ 以外の代数閉体（正標数でもよい）上の曲線のエタール基本群もある程度記述できるが，p 部分の振る舞いは（とくに曲線が固有でない場合に）難しい．さらに X が一般の体 k 上の曲線 X の場合，基本群は k の絶対ガロア群と代数閉体上の曲線 $X \times_k \bar{k}$ の基本群を合わせた巨大な群になり奥が深い．

8.1 副有限群

定義 8.1 (位相群)**.** G が**位相群** (*topological group*) であるとは，G が群かつ位相空間であって $G \times G \to G\colon (x,y) \mapsto xy$ と $G \to G\colon x \mapsto x^{-1}$ が連続写像であることをいう．

定義 8.2 (連続作用)**.** 位相群 G の位相空間 X への連続な作用とは，群としての集合への作用であって，作用を定める射 $G \times X \to X$ が連続であることをいう．

X の位相が離散ならば，G の X への作用が連続であることは，各 $x \in X$ に対して固定化群 $\mathrm{Stab}(x) \subset G$ が開部分群であることと同値である（問題 8.1）．ここで x の**固定化群** (*stabilizer subgroup*) は $\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G \mid g(x) = x\}$ で定義される（安定化群などともいう）．

命題 8.3. 位相群の開部分群は閉部分群である．

準コンパクトな位相群の開部分群は指数有限である．

略証. 各元 $x \in G$ に対して $G \to G\colon g \to xg$ は同相写像になり，したがって開部分群の傍系も開である．これを用いる． □

定義 8.4 (副有限群)**.** 位相群 G が**副有限群** (*profinite group*) であるとは，離散有限群の射影極限であることをいう．射有限群・射影有限群などともいう．

命題 8.5. 副有限群はハウスドルフ，準コンパクト，全不連結である．

証明は演習問題とする（問題 8.2）．

なお位相空間が**全不連結** (*totally disconnected*) とは，各 1 点集合が連結成分である（2 点以上からなる任意の部分集合が連結でない）ことをいう．

注 8.6. G が副有限群で $N \subset G$ が指数有限部分群だとしても N が開とは限らない．

例えば，G を可算無限個の $\mathbb{F}_p$ の直積とすると，G の $\mathbb{F}_p$ 上の次元は非可算無限なので非可算無限個の指数有限部分群をもつが，開部分群は可算個しかもたない．（もっと具体的な反例があった気もしますが，よく知りません．）．

注 8.7. 実は位相群についてハウスドルフ準コンパクト全不連結と副有限は同値になる．これを示すには，ハウスドルフ準コンパクト全不連結位相群 G に対しすべての開正規部分群 N に関する商 G/N のなす逆系の極限 $\varprojlim_N G/N$ への射を考えてこれが同型になることを示せばよい（省略）．

余談 8.8. 定義 8.4 の位相群をただの位相空間で置き換えることで，副有限空間が定義できる．位相群が副有限群であることと位相空間として副有限であることは実は同値になる（省略）．また，注 8.7 の特徴づけも成り立つ：有限離散空間への全射連続写像すべての極限をとる．

例 8.9. 有限群は副有限である．

$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ は副有限である．

$\hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ （$\mathbb{N}_{\geq 1}$ には整除関係で順序を入れる，すなわち $a \mid b \iff \exists c, b = ac$）は副有限であり，すべての素数 p にわたる $\mathbb{Z}_p$ の直積に同型である．

$\hat{\mathbb{Z}}^* := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ も副有限であり，これもすべての素数 p にわたる $\mathbb{Z}_p^*$ の直積に同型である．

p を素数とし，$\hat{\mathbb{Z}}$ の定義の n を p で割れないものののみ考えた場合の極限を $\hat{\mathbb{Z}}^{(p')}$ で表す．（一般に，何らかの構成を p と素なところで行ったものを $-^{(p')}$ で表すことが多い．）これも副有限である．

d 次正方行列環 $M_d(\hat{\mathbb{Z}})$ や一般線形群 $\mathrm{GL}_d(\hat{\mathbb{Z}})$，特殊線形群 $\mathrm{SL}_d(\hat{\mathbb{Z}})$ なども副有限である．

有限次と限らない体拡大 L/K がガロアのとき，$\mathrm{Gal}(L/K)$ は K 上有限次でガロアな中間体 M/K に対する $\mathrm{Gal}(M/K)$ の極限であり，副有限である．$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$（生成元はフロベニウス射 $x \mapsto x^p$）の極限なので $\hat{\mathbb{Z}}$ に同型である．

定義 8.10. 任意の抽象群[*61]G に対し，すべての指数有限正規部分群 N に対する商 G/N の極限を $\hat{G}$ で表し，G の**副有限完備化** (*profinite completion*) という．標準的な射 $G \to \hat{G}$ の像は稠密である．ただしこの射は単射とは限らない．

もう少し一般に，位相群 G に対し，すべての指数有限正規開部分群 N に対する商 G/N の極限を $\hat{G}$ とおくと標準的な射 $G \to \hat{G}$ は連続になり，やはり像は稠密である．抽象群には離散位相を入れることにすると前段落の定義と一致する．

余談 8.11. ハウスドルフ局所準コンパクト全不連結な位相群を**局所副有限** (*locally profinite*) であるという．p 進数体 $\mathbb{Q}_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ や（$\mathbb{Q}$ の）有限アデール環 $\mathbb{A}_f := \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は副有限でないが局所副有限な位相群の例である．本講義ではあまり出番はない．

8.2 ガロア圏

定義 8.12 (ガロア圏)**.** 次を満たす関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathsf{FinSets}$ が存在する圏 $\mathcal{C}$ を**ガロア圏** (*Galois category*) という．

(1) $\mathcal{C}$ は有限（射影）極限をもつ．（これを示すには，終対象をもち，ファイバー積 $Y \times_S Z$ をもつことを

[*61] 位相が入っていない群のことを位相群と区別して抽象群とよぶ．

確かめれば十分である（命題 7.31).）

(2) $\mathcal{C}$ は有限直和と有限群による商をもつ．

(3) $\mathcal{C}$ の射 $u\colon Y \to X$ は次のような分解 $Y \xrightarrow{u'} X' \xrightarrow{u''} X$ をもつ：u' は strict epi 射で，u'' は mono で X の直和成分への同型である．

(4) F は有限（射影）極限をたもつ（このことを F は左完全であるという)．（これも終対象とファイバー積をたもつことを確かめれば十分である.）

(5) F は有限直和および有限群による商と交換し，strict epi 射を strict epi 射にうつす．

(6) $\mathcal{C}$ の射 u に対し，u が同型射であることと $F(u)$ が同型射であることは同値である．（このことを，F は *conservative* であるという.）

F のことは $\mathcal{C}$ の**ファイバー関手** (*fiber functor*) という．

例 8.13. G を副有限群とする．有限左 G-集合の圏 G-FinSets を考える[*62]：対象は連続な G 作用をそなえた離散有限集合で，射は G 作用を保つ写像である．G 作用を忘れる忘却関手 $\varepsilon\colon G\text{-FinSets} \to \text{FinSets}$ がファイバー関手であり G-FinSets がガロア圏であることは簡単に確かめられる．(例えば，G-FinSets では strict epi 射であることと epi 射であることと集合の写像として全射であることが同値になる.）

なんと任意のガロア圏はある副有限群 G に対するこれと圏同値になってしまう：

定理 8.14 ([SGA1, Théorème V.4.1])**.** $\mathcal{C}$ がガロア圏，F がファイバー関手のとき，ある副有限群 π が存在し，F は圏同値 $\mathcal{C} \to \pi\text{-FinSets}$ を与える（これと FinSets への忘却関手の合成が F になる)．

また，F_1, F_2 がファイバー関手のとき，F_1 から F_2 への自然同型が存在し，対応する副有限群を π_1, π_2 とすると，π_1 から π_2 への同型射が π_2 の内部自己同型を除いて標準的に定まる．

略証．まず $\mathcal{C}$ の対象について，

- 始対象を空であるという．
- 空でなく，空でない対象 2 つの直和に表せない対象を連結であるという．
- X が連結であり，$\mathrm{Aut}(X)$ が $F(X)$ に推移的に作用するとき X をガロアであるという．

任意の対象は連結な対象の（0 個以上有限個の）直和で書けることが分かる．[Gro95, Proposition 3.1] を使って，$\mathcal{C}$ のガロアな対象の逆系 $(P_i \to P_j)_{i \geq j}$ を用いて関手 F を $F(X) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(P_i, X)$ と表せることを示す．（逆系 (P_i) を用いてこのように表せる関手 F は *strictly pro-representable*[*63]であるという.）さらに各推移写像 $P_i \to P_j$ はエピ射であるようにできる．$\pi := \varprojlim_i \mathrm{Aut}(P_i)$ と定める（副有限群である)．π が各 $F(X)$ に作用するので，関手 F の行先を π-FinSets とみなせる．逆関手 $\pi\text{-FinSets} \to \mathcal{C}$ は次のように作る．推移的な有限 π 集合 E に対し，π 作用が $\mathrm{Aut}(P_i)$ を経由するような i をとり，$P_i \times_{\pi_i} E$ を対応させる（この対象は P_i の適切な有限群による商なので存在する)． □

[*62] ところで，ガロア圏関連の文献では有限集合の圏を単に Sets（またはフランス語の ensemble に由来する Ens）と書く文献をけっこう見ます，理由はよく分かりません．

[*63] この pro は projective system に由来する．なお representable の訳は表現可能だが pro がつくときの定訳は分かりません．

8.3 ガロア圏の例：有限エタール被覆

定義 8.15 (幾何学的点，幾何学的ファイバー)**.** スキーム X の**幾何学的点** (*geometric point*) とは，分離閉体のスペクトルから X への射のことをいう．$\bar{x} \to X$ のような記号を使うことが多い．幾何的点ともいう．

点 $x \in X$ に対し，$k(x)$ の分離閉包や代数閉包のスペクトルを使うことが多いが，これに限らない（超越拡大でもよい）．

スキームの射 $f\colon X \to S$ の**幾何学的ファイバー** (*geometric fiber*) とは，S の幾何学的点 $\bar{s} \to S$ とのファイバー積のことをいい，$X_{\bar{s}}$ とも書く．

なにが「点」なのかについては命題 13.2 や余談 13.5 を参照してください．

以降 8 節の終わりまで，スキームは局所ネーターとする．

X をスキームとし，$\mathcal{C} = \mathsf{FinEt}/X$ を次のような圏とする：対象は X 上有限エタールなスキーム，射は X 上のスキームの射．（すると，射は自動的に有限エタールになる（命題 5.24, 5.61））．

例 8.16. $X = \operatorname{Spec} \bar{k}$，$\bar{k}$ は分離閉体，とすると，FinEt/X の対象はすべて $\operatorname{Spec} \bar{k}$ の有限個の直和なので，結局 FinEt/X は有限集合の圏 $\mathsf{FinSets}$ に圏同値になる．

X の幾何学的点 $\bar{x}$ に対し，関手 $F_{\bar{x}}\colon \mathsf{FinEt}/X \to \mathsf{FinEt}/\bar{x} = \mathsf{FinSets}$ を $F_{\bar{x}}(Y) = Y_{\bar{x}} := Y \times_X \bar{x}$ で定める．

定理 8.17. X を連結スキーム，$\bar{x}$ を X の幾何学的点とすると，$\mathsf{FinEt}/X, F_{\bar{x}}$ はガロア圏とそのファイバー関手である．

略証．(1) 終対象は存在する（X である）．スキームとしてのファイバー積がこの圏でのファイバー積になる．

(2) 有限直和の条件を満たすのは明らか．

有限群による商について考える．G が有限エタール被覆 $\coprod_n X \to X$ に $\mathfrak{S}_n$ を経由して作用している場合は，商もまた $\coprod_{n'} X$ の形なので，明らかに X 上有限エタールである．補題 8.18（後で証明する）より，この場合に帰着できるのでよい．

(3) X' を u の像とするとこれは開閉集合なので直和成分であり，strict であることは定理 7.35 から従う．

(4) 終対象（X）は終対象（1 点集合）にうつる．ファイバー積については，一般にスキームのファイバー積に関して $(Y_1 \times_S Y_2) \times_S T \cong (Y_1 \times_S T) \times_T (Y_2 \times_S T)$ が成り立つのでよい．

(5) 有限直和と strict epi 射については容易．

有限群による商については，(2) のようにして，$\coprod_n X \to X$ の場合に帰着でき，この場合は明らかである．

(6) 被覆の間の射 $u\colon Z \to Y$ を考える．これも有限エタールである．$u_* \mathcal{O}_Z$ は Y 上の局所自由層[*64]であり，$F(u)$ が同型射という仮定よりその階数は Y の各連結成分上 1 でなければならず，ここから u が同型射であることが従う． □

補題 8.18. $f\colon Y \to X$ がアフィンな全射のとき，次は同値である．

(a) f は有限エタールである．

(b) 有限エタール全射 $h\colon X' \to X$ で，f の h による底変換が $\coprod_n X \to X$ に同型であるものが存在する．

[*64] スキーム Y 上の準連接層 F が**局所自由** (*locally-free*) であるとは，開被覆 $Y = \bigcup_i U_i$ と同型 $F|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus A_i}$ が存在することをいう．

証明. (a) $\implies$ (b)：$f_*\mathcal{O}_Y$ は（f が有限で平坦なので）局所自由層である．（X の連結成分ごとに示せばよいので）階数 n は一定だとしてよい．n に関する帰納法で示す．

$n = 0, 1$ ならばよい．

$n > 1$ だとして，f の f による底変換を考えると，$Y \times_X Y \to Y$ はセクション $\Delta = (1, 1)$ をもち，Δ は開閉埋め込みなので $Y \times_X Y = Y \sqcup Z$ と分解する．$f' \colon Z \to Y$ の次数（$= f'_*\mathcal{O}_Z$ の階数）は $n-1$ なので，帰納法の仮定を適用すればよい．

(b) $\implies$ (a)：[Cad13, Step 1-1 of proof of Lemma 5.12] を見てください． □

定義 8.19. このガロア圏に定理 8.14 を適用して得られる副有限群を $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ と書き，X の**エタール基本群** (*étale fundamental group*) とよぶ．

同定理より，群の同型類はファイバー関手のとり方によらずに定まる．

例 8.20. $X = \operatorname{Spec} k$，$k$ は体，とすると，FinEt/X の対象は k の有限次分離拡大体のスペクトル有限個の直和である．連結な対象とは有限次分離拡大体のスペクトルであり，そのうちガロアな対象とはガロア拡大に他ならない．エタール基本群は有限次ガロア拡大のガロア群の極限であり，絶対ガロア群に一致する．（とくに，k が分離閉体ならばエタール基本群は自明な群である．）

すなわち，エタール基本群の理論はガロア理論を包含する*65．

一般にガロア圏の間の適切な関手は対応する群の間の射に対応する．$f \colon X \to Y$ が連結スキームの間の射のとき，f で引き戻すことで関手 $\mathsf{FinEt}/Y \to \mathsf{FinEt}/X$ が得られ，X の幾何的点 $\bar{x} \colon \operatorname{Spec} \Omega \to X$ を固定すると群の射 $f_* \colon \pi_1(X, \bar{x}) \to \pi_1(Y, f \circ \bar{x})$ が得られる．

8.4 $\mathbb{C}$ 上の多様体のエタール基本群と位相的基本群

X を局所有限型 $\mathbb{C}$ スキームとする．これに対応する複素解析多様体 X^{an} が定義される（11 節）；ひとまずは底位相空間が集合 $X(\mathbb{C}) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} \mathbb{C}, X)$ に Euclid 位相*66を入れたものであることだけおさえておけばよい．$X(\mathbb{C})$ の位相空間としての基本群 $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$ が定義される．これの基本群と X のエタール基本群の比較を与えるのが次の定理である：

定理 8.21 ([SGA1, Corollaire XII.5.2])**.** X を局所有限型 $\mathbb{C}$ スキームとすると，

$$\pi_1^{\text{ét}}(X) = (\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C})))^\wedge$$

が成り立つ．ここで右辺は位相的基本群 $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$ の副有限完備化である．

$\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$ は有限次と限らない $X(\mathbb{C})$ の被覆空間を統制するものだった．（なお，$X(\mathbb{C})$ の被覆空間には自然に複素解析多様体構造が入るので，$X(\mathbb{C})$ の被覆空間と X^{an} の被覆空間は等価な概念である．）有限次被覆のみの圏は，$\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$ 作用をもつ有限集合の圏と同値になるが，これは $\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$ の副有限完備化 $(\pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C})))^\wedge$ の作用をもつ有限集合の圏とも同値になる．したがって，証明において本質的なのは，X のエタール被覆に対し $-^{\mathrm{an}}$（または $-(\mathbb{C})$）するという操作が X^{an} の有限次エタール被覆（$X(\mathbb{C})$ の有限次被覆

*65 ガロア理論を勉強せずに済むという意味ではありません．エタール基本群に関して何かを示す際に体上の場合すなわちガロア理論に関する命題に帰着されるかもしれませんよ．

*66 Zariski 局所的に $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]/I \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ であり，$X(\mathbb{C}) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ に Euclid 位相からの誘導位相を入れる．これは well-defined になる．

空間）の圏への圏同値を与えることであり，その中でも本質的全射性すなわち X^{an} の有限次エタール被覆がスキームから得られるという部分（Grauert-Remmert（定理 11.18））である．証明は略.

例 8.22. $X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]$ とすると，$X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ は単連結である．このとき $X(\mathbb{C})$ の位相的基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))$ は 0 であり X のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ も 0 である.

$X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ とすると，$X(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ である．$X(\mathbb{C})$ の普遍被覆 $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ に対応するスキームでの被覆は存在しないが，有限次被覆 $n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ は有限エタール被覆 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t^{1/n}, t^{-1/n}] \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の $^{\mathrm{an}}$ として得られる．エタール基本群は位相的基本群 $\mathbb{Z}$ の副有限完備化 $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である.

8.5 正標数の代数曲線の基本群

固有な射 $f\colon X \to S$ は固有なスキームの族とみなせるが，S の点の間の特殊化関係（$s_0 \in \overline{\{s_1\}}$ のとき s_0 を s_1 の**特殊化** (*specialization*) という）とファイバーの基本群について次が成り立つ.

定理 8.23 ([SGA1, Corollaire X.2.4, Corollaire X.3.9])**.** S は連結で局所ネーター，$f\colon X \to S$ は固有で，$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ だとする[*67]．$s_0, s_1 \in S$ は $s_0 \in \overline{\{s_1\}}$ を満たすとする．$\overline{x}_i$ を X_{s_i} 上の幾何学的点とする．このとき specialization map $\mathrm{sp}\colon \pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{s}_1}, \overline{x}_1) \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{s}_0}, \overline{x}_0)$ が，像の内部自己同型を除いて標準的に，定義される.

さらに f が *separable*（平坦かつ，$X_s \to \operatorname{Spec} k(s)$ が分離拡大）ならば sp は全射である.

さらに f が滑らかならば,

- $\mathrm{char}(k(s_0)) = 0$ ならば，sp は同型である.
- $\mathrm{char}(k(s_0)) = p > 0$ ならば，sp は p と素な部分では同型，すなわち $\mathrm{sp}\colon \pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{s}_1}, \overline{x}_1)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{s}_0}, \overline{x}_0)^{(p')}$ である．ここで $G^{(p')}$ は G の指数が（有限で）p と素な開部分群による商の逆極限である.

これを用いると，体上の固有滑らかな曲線[*68]の基本群について次が分かる.

定理 8.24. k を体，X を k 上の固有滑らかな曲線とし，種数を g とおく.

- $\mathrm{char}(k) = 0$ ならば，$\pi_1^{\text{ét}}(X)$ は $\langle \alpha_i, \beta_i\ (1 \le i \le g) \mid [\alpha_1, \beta_1] \ldots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$ の副有限完備化である.
- $\mathrm{char}(k) = p > 0$ ならば，$\pi_1^{\text{ét}}(X)$ は標数 0 の場合の群の商であり，p と素な部分では同型である.

略証．$k = \mathbb{C}$ ならば，定理 8.21 と例 6.16 から従う.

k が一般の標数 0 の体ならば，$\mathbb{C}$ の場合と定理 8.23 から従う.

k が一般の標数 > 0 の体ならば，X を混標数離散付値環上の曲線に持ち上げて，定理 8.23 を用いて標数 0 側と比較することで従う. □

注 8.25. p 部分はややこしい．例えば**楕円曲線** (*elliptic curve*) （種数 1 の固有曲線）E については,

---

[*67] 例えば，$f'\colon X \to S'$ が固有で S' がネーターならば $f\colon X \to S := \mathcal{S}pec\, f'_*\mathcal{O}_X$ は条件を満たし $S \to S'$ は有限射になります．ここで，スキーム T 上の $\mathcal{O}_T$ 代数の層 $\mathcal{B}$ に対し，$\mathcal{S}pec\,\mathcal{B}$ とはアフィン開集合 $U \subset T$ 上のスキーム $\operatorname{Spec}\mathcal{B}(U)$ を張り合わせてできるスキームである.

[*68] 体上の曲線の定義は有限型・1 次元・整にしておきます.

- （$k=\mathbb{C}$ の場合，E^{an} は複素トーラスであり，$(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ と同相であり，位相的基本群は $\mathbb{Z}^2$ である．）
- $\mathrm{char}(k)=0$ ならば，$\pi_1^{\text{ét}}(E)=\hat{\mathbb{Z}}^2$.
- $\mathrm{char}(k)=p>0$ ならば，$\pi_1^{\text{ét}}(E)=(\hat{\mathbb{Z}}^{(p')})^2\times\mathbb{Z}_p^i$ であり，$i\in\{0,1\}$ である．$i=1$（resp. $i=0$）なる楕円曲線を**通常** (*ordinary*)（resp. **超特異** (*supersingular*)）という．

ちなみに，標数 p の楕円曲線は通常と超特異のどちらも存在し（超特異の方が珍しい），被覆以外にもさまざまな性質（p 分点，自己同型群，l 進表現（例 13.55）など）と関係する．

一方で，固有でない曲線（すなわちアフィン曲線）だと p 冪次数のエタール被覆がたくさん存在する．**暴分岐** (*wild ramification*)（分岐指数が p で割れるもの）は**馴分岐** (*tame ramification*)（分岐指数が p で割れないもの）と比べて制御しづらい．

例 8.26. $f\in k[x]$ とする．$\mathrm{Spec}\,k[x][y]/(y^p-y-f(x))$ は $\mathrm{Spec}\,k[x]$ のエタール被覆である．もし $y^p-y-f(x)=0$ を満たす $y\in k[x]$ が存在すればこれは $\mathrm{Spec}\,k[x]$ の p 個の直和だが，そうでない限りこれは既約であり自己同型群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ をもつ（$y\mapsto y+1$）．

つまり，$\mathrm{Spec}\,k[x]$ は p 次エタール被覆を山ほどもつ．

これは次の定理の特別な場合（$g=0,r=1$）である

定理 8.27 (Abhyankar の予想／ Harbater [Har94] により証明された)**.** k を標数 $p>0$ の代数閉体とする．X を k 上の種数 g の固有曲線とし，$U=X\setminus\{q_1,\dots,q_r\}$ を $r>0$ 個の相異なる閉点を抜いた曲線とする．このとき，有限群 G に対し次は同値である．

- G は $\pi_1^{\text{ét}}(U)$ の商群として現れる．言い換えると，ガロア群が G である U のエタール被覆が存在する．
- $G/p(G)$ は $\langle\alpha_i,\beta_i\ (1\le i\le g)\mid[\alpha_1,\beta_1]\dots[\alpha_g,\beta_g]=1\rangle$ の副有限完備化の商である．ここで $p(G)$ は G の p 部分群で生成される（正規）部分群である．（p 部分群とは位数が p 冪である部分群である．）

なお，$G/p(G)$ が高々 $2g+r-1$ 元で生成されるならば明らかに後者を満たす．したがって，任意の有限 p 群は U のエタール被覆のガロア群として実現できる．

8.6 余談：遠アーベル幾何

k を（代数閉と限らない）体とし，$\overline{k}$ をその代数閉包とする．X を k スキームで $X_{\overline{k}}=X\otimes_k\overline{k}$ が連結で固有滑らかな曲線なものとする．基点を適当にとる．このとき，射 $X_{\overline{k}}\to X$ と $X\to\mathrm{Spec}\,k$ から誘導される系列

$$1\to\pi_1(X_{\overline{k}})\to\pi_1(X)\to\pi_1(\mathrm{Spec}\,k)\to 1$$

は群の完全列になる [SGA1, Corollaire X.2.2][*69]．右側は k の絶対ガロア群であり，左側については前小節からある程度分かっている．このとき，真ん中の群（および右の群への射）から X をどれだけ復元できるか？という問題を考えることができる．

一般に，基本群からもとの図形の情報をどれだけ復元できるか，という問題を扱うのが**遠アーベル幾何学** (*anabelian geometry*) である．これが有効である対象を**遠アーベル** (*anabelian*) であるという……というのは厳密な定義にはなっていないが，1 次元の場合は諸々の結果を見るに双曲的曲線（$2g-2+r>0$ を満たす

[*69] よく考えると完全列をアーベル圏でしか定義していませんでした．完全とは左が単射で右が全射で左の像と右の核が一致することです．

曲線）がそれにあたる（あたらないのは $(g,r)=(0,0),(0,1),(0,2),(1,0)$ すなわち $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^1$ 引く一点，楕円曲線の場合）と考えられる．

遠アーベル幾何は**宇宙際タイヒミュラー理論** (*inter-universal Teichmüller theory*) [*70]において重要な役割を果たす．というのは，宇宙際タイヒミュラー理論においては文字通り[*71]複数の宇宙[*72]の間を行き来することになるが，そのときに環論的な対象の性質はそこまで保たれないのに対し基本群のような群論的な対象の性質はよく保たれる[*73]からである[*74]．

8.7 余談：プロエタール基本群

例 8.13 において G を副有限でない位相群としてもガロア圏が得られるが，そこから得られる副有限群は（G ではなく）G の副有限完備化 $\hat{G}$（定義 8.10）になる（問題 8.3 も見よ）．

[BS15, Section 7] では，もう少し広いクラスの群を扱える定式化である *infinite Galois category* を用いて，スキームの *pro-étale fundamental group* $\pi_1^{\text{proét}}(X)$ を導入している．$\pi_1^{\text{proét}}(X)$ の副有限完備化は $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ になる．

動機としては，通常のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ は lisse $\mathbb{Z}_l$ 層[*75]を記述する[*76]が lisse $\mathbb{Q}_l$ 層での同様の記述は成立しないところ，$\pi_1^{\text{proét}}(X)$ に置き換えれば lisse $\mathbb{Q}_l$ 層の方の記述も成立するようになるらしい．

演習問題

問題 8.1. 位相群 G が離散位相空間 X に作用しているとする．この作用が連続であることと，各 $x \in X$ に対し $\mathrm{Stab}(x)$ が開部分群であることが同値であることを示せ．

問題 8.2. 命題 8.5 を示せ．

問題 8.3. 例 8.13 で G を副有限でない位相群とするとどうなるか検討せよ．というより，実は例 8.13 自体は何事もないのですが，定理 8.14 を適用すると現れるはずの副有限群は何でしょうか．

問題 8.4. L/K を体の 3 次拡大とする．$L \otimes_K L$ はどのような環か述べよ．具体的には：連結な環の直積に分解できることを確認し，各成分がどのような環か述べよ．

9 ホモロジー代数

参考文献：Weibel [Wei94], 中岡 [中岡 15], 志甫 [志甫 16] のほか，10 節の冒頭に書いたものを参考にしてください．（Gelfand–Manin [GM03] や Hilton–Stammbach [HS97] も有名な気がしますが私は読んだことがありません．）

[*70] *abc* 予想という分かりやすい（？）予想への応用があることから一般社会でも話題になりました．
[*71] 「国際 (inter-national)」が複数の国の間の行き来や関係をいうように．
[*72] むろん数学用語としての宇宙である．
[*73] という印象を受けました．
[*74] という印象を受けました．
[*75] $\mathbb{Z}_l$ 層，$\mathbb{Q}_l$ 層の定義は 13.8 節を見よ．lisse の定義は省略する．
[*76] lisse $\mathbb{Z}_l$ 層の圏が，エタール基本群の連続作用付き階数有限自由 $\mathbb{Z}_l$ 加群の圏と同値になる．（参考：通常の位相空間上の局所系と基本群の関係）

9.1 導来関手

定義 9.1 (δ 関手)**.** $\mathcal{C},\mathcal{D}$ をアーベル圏とする.

$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への（コホモロジカルな）δ **関手** (δ-*functor*) とは，次のデータ (1),(2) であって，条件 (3),(4) を満たすものをいう.

(1) 関手 F^i（$i \in \mathbb{N}$).
(2) $\mathcal{C}$ での短完全列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{D}$ での射 $d^i\colon F^i(M'') \to F^{i+1}(M')$. これを**連結準同型** (*connecting homomorphism*) などという.
(3) 短完全列に対し，
$$0 \to F^0(M') \to F^0(M) \to F^0(M'') \to F^1(M') \to F^1(M) \to F^1(M'') \to F^2(M') \to \dots$$
は完全列である．ただし各射はもとの短完全列中の射に F^i を適用したものと (2) の連結準同型である．（これを長完全列という.）
(4) 短完全列の間の射から長完全列の間の射が誘導される（すなわち，短完全列の項の間の射に F^i を適用したものと連結準同型が交換する).

とくに，F^0 は左完全になる.

定義 9.2 (普遍的 δ 関手)**.** δ 関手の自然変換とは，自然変換の族 $F^i \Longrightarrow G^i$ であって連結準同型と可換なものをいう．δ 関手 F^i が**普遍的** (*universal*) であるとは，任意の δ 関手 G^i と関手の自然変換 $F^0 \Longrightarrow G^0$ に対しこれを延長する δ 関手の自然変換 $F^i \Longrightarrow G^i$ が一意的に存在することをいう.

命題 9.3. $\mathcal{C}$ を入射的対象を十分もつ（定義 7.61）アーベル圏とし，F を $\mathcal{C}$ からアーベル圏 $\mathcal{D}$ への左完全関手とする．対象 M に対し，$0 \to M \to I^\bullet$ を入射的分解（定義 7.61）とし，複体 $F(I^\bullet)$ のコホモロジー $H^i(F(I^\bullet))$ を $(R^iF)(M)$ とすると，これは $I^\bullet$ のとり方によらず定まり，R^iF は関手になり，さらに連結準同型が自然に定まって R^iF は普遍的 δ 関手をなす．また，$R^0F = F$ となる.

証明. ホモロジー代数の教科書を見てください. □

定義 9.4 (導来関手)**.** この R^iF を F の**右導来関手** (*right derived functors*) という[*77].

双対的に，（ホモロジカルな）δ 関手や，右完全関手の**左導来関手** (*left derived functors*) も定義される．本講義ではあまり扱わない.

定義 9.5. 対象 N が $i > 0$ に対し $R^iF(N) = 0$ を満たすとき，N は F-**非輪状** (*acyclic*) であるという.

命題 9.6.

(1) I が入射的対象ならば，I は F-非輪状である.
(2) 逆に，$N^\bullet$ は F-非輪状な対象からなる複体で，$0 \to M \to N^\bullet$ が完全であるとする．このとき，$R^iF(M) = H^i(F(N^\bullet))$ である．（このことを，「F-非輪状な対象による分解を用いて R^iF を計算できる」という.）

[*77] 正確に表現すると，族 (R^iF) が δ 関手で，各関手 R^iF が導来関手です.

証明. (1): 構成より明らか. (2): ホモロジー代数の教科書を見てください. □

例 9.7. 例 7.67 に登場した左（resp. 右）完全な関手の右（resp. 左）導来関手を考えられる.

(1) の $\mathrm{Hom}_A(P,-)\colon \{A\text{-mod}\} \to \{A\text{-mod}\}$ （resp. $\mathrm{Hom}_A(-,Q)\colon \{A\text{-mod}\} \to \{A\text{-mod}\}$）の右導来関手を $\mathrm{Ext}^i_A(P,-)$（resp. $\mathrm{Ext}^i_A(-,Q)$）と書く. こうすると $\mathrm{Ext}^i_A(P,Q)$ の解釈が 2 通り考えられるが, 自然に同型であることが証明できる（省略).

(2) の $-\otimes_A P$ の左導来関手を $\mathrm{Tor}^A_i(-,P)$ と書く. $\mathrm{Tor}^A_i(P,Q)$ と $\mathrm{Tor}^A_i(Q,P)$ は自然に同型であることが証明できる（省略).

(4) の $f_*\colon \{\mathrm{Sh}/Y\} \to \{\mathrm{Sh}/X\}$ の右導来関手 $R^i f_*$, (5) の $\Gamma(X,-)\colon \{\mathrm{Sh}/X\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ の右導来関手（$H^i(X,-)$ と書く）を 10.2 節以降で詳しく扱う.

(7) の $-^G$（resp. $-_G$）の右（resp. 左）導来関手を $H^i(G,-)$（resp. $H_i(G,-)$）と書き, 群コホモロジー（resp. 群ホモロジー）とよぶ.

命題 9.8. $A, B \in \mathcal{C}$ をアーベル圏の対象とする. A の B による**拡大** (*extension*) とは, $0 \to B \to M \to A \to 0$ の形の完全列をいう. 2 つの拡大が同値であるとは, 完全列の間に同型射があることをいう. $\mathcal{C}$ が入射的対象を十分もつまたは射影的対象を十分もつとき, A の B による拡大の同型類全体がなす群と $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ が自然に同型になる.

証明. 拡大の間の加法の定義を含めて, ホモロジー代数の教科書を見てください. □

9.2 スペクトル系列

スペクトル系列というややこしいものを導入します. ややこしくて手に負えないという人は, 余談 9.13 を参考にするか, 導来圏（9.3 節）でのすっきりした定式化（本稿では紹介しない）を使いましょう.

以下, 本小節の終わりまでアーベル圏で考える.

定義 9.9 (スペクトル系列). a を正整数とする.（E_a から始まる）**スペクトル系列** (*spectral sequence*) $E_r^{p,q}$ は次のデータからなる.

- 各整数 p, q, r $(r \geq a)$ に対し, 対象 $E_r^{p,q}$.
- 各整数 p, q, r $(r \geq a)$ に対し, 射 $d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ で, $d_r \circ d_r = 0$ を満たすもの.
- d_r に関する複体の (p,q) でのコホモロジー $\mathrm{Ker}\, d_r^{p,q}/\,\mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1}$ から $E_{r+1}^{p,q}$ への同型射.

$E_r^{\bullet,\bullet}$ のことを “r-th sheet” のように表現する.

$p < 0$ または $q < 0$ のとき $E_r^{p,q} = 0$ となるものを第 1 象限スペクトル系列という.

定義 9.10 (スペクトル系列の収束). 簡単のため第 1 象限スペクトル系列についてのみ述べる.

スペクトル系列 $E_a^{p,q}$ が H^{p+q} に**収束する** (*converge*)（または *abut*）($E_a^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}$ と書く）とは次を意味する. H^n の減少フィルトレーション*78$(F^p H^n)_{p\in\mathbb{Z}}$ であって $F^p H^n = 0$ $(p \gg 0)$ と $F^p H^n = H^n$ $(p \ll 0)$ を満たすものが与えられており, $E_r^{p,q}$ の “$r \to \infty$ での極限” $E_\infty^{p,q}$ から $\mathrm{gr}^p_F H^{p+q} = F^p H^{p+q}/F^{p+1} H^{p+q}$ への同型が与えられている.（実はもう少し条件があるが, 第 1 象限スペクトル系列では必ず成り立つ条件なの

*78 すなわち, H^n の部分対象の包含列 $\cdots \supset F^p H^n \supset F^{p+1} H^n \supset \ldots$.

で省略する.）なお，固定した p,q に対して，$r \gg 0$ に対し $d_r^{p,q} = 0$, $d_r^{p-r,q+r-1} = 0$ ゆえ $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \dots$ となる[*79]ので，これを $E_\infty^{p,q}$ と書いている．

スペクトル系列 $(E_r^{p,q}, \dots)$ から $(F_r^{p,q}, \dots)$ への射とは，各 p,q,r に対する射 $E_r^{p,q} \to F_r^{p,q}$ の族であって，スペクトル系列の定義に現れるほかの射と可換なものをいう．

定義 9.11 (スペクトル系列の退化)**.** スペクトル系列が E_a で**退化する** (*degenerate*) とは，$r \geq a$ で $d_r^{p,q} = 0$ である（したがって $E_\infty^{p,q} = E_a^{p,q}$ である）ことをいう．

注 9.12. 収束する第 1 象限スペクトル系列 $E_r^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}$ があると，以下のようなことが分かる．

射 $E_r^{p,0} \to H^p$（$r \geq 2$）と $H^q \to E_r^{0,q}$（$r \geq 1$）が定まる．これらを *edge morphisms* という．

低次の項に関しては同型 $E_2^{0,0} \xrightarrow{\sim} H^0$ および完全列 $0 \to E_2^{1,0} \to H^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2$ を得る．

ある $r \geq 2$ で，任意の $q > 0$ に対し $E_r^{p,q} = 0$ ならば，この時点で退化し，$E_r^{p,0} \xrightarrow{\sim} H^p$ である．

ある $r \geq 1$ で，任意の $p > 0$ に対し $E_r^{p,q} = 0$ ならば，この時点で退化し，$H^q \xrightarrow{\sim} E_r^{0,q}$ である．

余談 9.13. 弱小ユーザとしてのスペクトル系列への向き合い方として次のようなものがあります．誰かが作ってくれたスペクトル系列をありがたく用いる．一刻も早く退化してくれることを祈る（誰かが示してくれた退化のための十分条件が満たされることを祈る）．退化したときに 0 の項が多いことを祈る．そうすれば何らかの同型，あるいは少なくとも何らかの完全列が得られる．

本講義の範囲では次のスペクトル系列がとくに重要です．証明はホモロジー代数の教科書を見てください．

定理 9.14 (Grothendieck スペクトル系列)**.** $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ がアーベル圏の左完全関手の列で，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は入射的対象を十分もち，また $\mathcal{A}$ の入射的対象の F による像は G 非輪状であると仮定する．このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = R^pG(R^qF(-)) \Longrightarrow R^{p+q}(G \circ F)(-)$$

が存在する．

注 9.15. コホモロジースペクトル系列についてのみ述べた．射の向きを逆にする（すなわち $d_{p,q}^r\colon E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$ となる）ホモロジースペクトル系列も分野によっては扱う．

9.3 余談：導来圏

$\mathcal{A}$ をアーベル圏とする．$\mathcal{A}$ 上の複体の圏もまたアーベル圏になる（複体の射とは，図式が可換になるような射の列である）．この圏を，ホモトピーで割り，さらに**擬同型** (*quasi-isomorphism*)（コホモロジー間に誘導する射が同型であるもの）を可逆にするという**局所化** (*localization*) を施して得られる圏 $D(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の**導来圏** (*derived category*) という．

この他に，上に有界・下に有界・有界な複体の圏から出発して得られる圏 $D^-(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ も考えられる（b は bounded の頭文字）．

左完全関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し，一定の条件下で，右導来関手 RF が誘導される（どの圏を使うかはホモロジー代数の教科書を見てください）．一定の条件下で，Grothendieck スペクトル系列（定理 9.14）は $(RG)(RF) = R(GF)$ という単純な形になる．右完全関手の左導来関手についても同様である．

[*79] 具体的には，$p - r < 0$ かつ $q - r + 1 < 0$ ならば，$d_r^{p,q}$ は終域が 0 なので 0 であり， $d_r^{p-r,q+r-1}$ は始域が 0 なので 0 である．

演習問題

問題 9.1. 次の例が，定理 9.14 の「$\mathcal{A}$ の入射的対象の F による像は G 非輪状である」という仮定を満たさず，結論も満たさないことを確認せよ．p は素数，$\mathcal{A} = \{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\text{-mod}\}$, $\mathcal{B} = \{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\text{-mod}\}$, $\mathcal{C} = \{\mathrm{Ab}\}$, F は（環準同型 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を通じて）$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 加群を $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 加群とみなす関手，$G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, -)$.

10　層係数コホモロジー

参考文献：Serre [Ser55a], Godement [God73], Hartshorne [Har77, Chapter III], Liu [Liu02, Chapter 5], 志甫 [志甫 16].

（柏原–Schapira [KS06] や Iversen [Ive86] も有名な気がしますが私は読んだことがありません．）

10.1　層の圏

本小節では，前層や層はアーベル群の前層や層とする．前層の層化は茎を保つ（命題 3.44）ことを思い出しておく．

命題 10.1 (前層の完全列の特徴付け)**.** X を位相空間とし，$(P^\bullet, \phi^\bullet)$ を X 上の前層の複体とする．

(1) X の各開集合 $U \subset X$ に対し，$H^n(P^\bullet, \phi^\bullet)(U) = H^n(P^\bullet(U), \phi^\bullet(U))$ である．とくに，$\bullet = n$ で完全であることと各 U に対して $\bullet = n$ で完全であることは同値である．とくに，前層の射が同型射（resp. モノ射，resp. エピ射）であることと各 U に対してそうであることは同値である．

(2) $(P^\bullet, \phi^\bullet)$ が完全ならば，各 $x \in X$ に対して $(P^\bullet_x, \phi^\bullet_x)$ も完全である．

証明. (1) 最初の主張は核と余核の記述（命題 7.53(1)）から明らか．同型射・モノ射・エピ射については，$0 \to X \xrightarrow{f} Y$ が完全なことと f がモノ射なことが同値なことなどから従う．

(2) 順極限は完全性を保つ．□

命題 10.2 (層の完全列の切断を用いた特徴付け)**.** X を位相空間とし，$\phi\colon F \to G$ を X 上の層の射とする．

(1) ϕ がモノ射であることと，任意の開集合 U に対し $\phi(U)\colon F(U) \to G(U)$ が単射であることは同値である．

(2) ϕ がエピ射であることと，任意の開集合 U と任意の元 $g \in G(U)$ に対し，開被覆 $U = \bigcup_i U_i$ と元 $f_i \in F(U_i)$ が存在し，$\phi(f_i) = g|_{U_i}$ であることは同値である．

(3) ϕ が同型射であることと，任意の開集合 U に対し $\phi(U)\colon F(U) \to G(U)$ が同型射であることは同値である．

略証. 核・余核の構成と同様にしてできる．□

命題 10.3 (層の完全列の茎を用いた特徴付け)**.** 層の複体 $(F^\bullet, \phi^\bullet)$ が完全であることと，各 $x \in X$ に対して $(F^\bullet_x, \phi^\bullet_x)$ が完全であることは同値である．とくに，射がモノ射やエピ射や同型射であることは，各茎でそうであることと同値である．

証明. 核や余核の構成が茎をとる操作と交換することを確かめればよい. 順極限が完全なことと, 前層が層化が茎を保つことから従う. □

系 10.4. 前層を層化する関手は完全である.

証明. 層化は茎を保つ（命題 3.44）ので, 命題 10.1(2) と命題 10.3 から従う. □

系 10.5. 層の逆像をとる関手は完全である.

証明. 完全性は各点での茎で確かめられる（命題 10.3）が, 逆像の茎はもとの層の茎である（系 3.43）のでよい. □

命題 10.6. X を位相空間, $Z \subset X$ を閉集合, $U = X \setminus Z$ とする（U は開集合である）. 包含写像を $i\colon Z \hookrightarrow X$, $j\colon U \hookrightarrow X$ と書くとき, 任意のアーベル群の層 F に対し, 随伴から定まる射の列 $0 \to j_!j^{-1}F \to F \to i_*i^{-1}F \to 0$ は完全である.

証明. 各茎で確かめればよい.

$$(j_!j^{-1}F)_x = \begin{cases} F_x & (x \in U), \\ 0 & (x \notin U), \end{cases} \qquad (i_*i^{-1}F)_x = \begin{cases} F_x & (x \in Z), \\ 0 & (x \notin Z) \end{cases}$$

である（零延長の茎については命題 3.48 を見よ）ので, $x \in U$ に対しては $0 \to F_x \to F_x \to 0 \to 0$ であり, $x \in Z$ に対しては $0 \to 0 \to F_x \to F_x \to 0$ なので, よい. □

命題 10.7. $j\colon U \to X$ を位相空間の開埋め込みとし, F を U 上のアーベル群の層とするとき, 自然に定まる前層の射 $j_{!\mathrm{p}}F \to j_*F$ から定まる層の射 $j_!F \to j_*F$ は $j_!F$ から層 $V \mapsto \{s \in (j_*F)(V) \mid \forall x \in V \setminus U, s_x = 0\}$ への同型を与える.

証明. 主張の最後に書いた層を G とおく. まずこれが層になることは簡単に確かめられる. $j_{!\mathrm{p}}F \to j_*F$ は, 各開集合 $V \in \mathrm{Open}(X)$ に対して, $V \subset U$ ならば $F(V) \xrightarrow{\mathrm{id}} F(V \cap U = V)$, $V \not\subset U$ ならば $0 \to F(V \cap U)$ から定まる射である. 像は明らかに G に含まれるので, 射 $j_{!\mathrm{p}}F \to G$ が得られ, 層化の普遍性から $\phi\colon j_!F \to G$ が定まる. 各点 $x \in X$ での茎を計算すると $\phi_x\colon (j_!F)_x \to G_x$ が同型であることが確かめられ, したがって命題 10.3 より ϕ も同型である. □

10.2 層係数コホモロジーの一般論

引き続きアーベル群の層を考える. さて, 例 7.67 で見たように次の左完全関手がある.

命題 10.8. (1) $U \subset X$ を開集合とする. U での切断をとる関手 $\Gamma(U, -)\colon \{\mathrm{Sh}/X\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ は左完全である.

(2) $f\colon Y \to X$ を連続写像とする. 順像をとる関手 $f_*\colon \{\mathrm{Sh}/Y\} \to \{\mathrm{Sh}/X\}$ は左完全である.

一般には完全でない.

例 10.9. $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし, $\underline{\mathbb{Z}}$ を X 上の定数層とし, $\mathcal{O}$ を X 上の（複素）正則関数のなす層とし, $\mathcal{O}^*$ を非

零な正則関数のなす（乗法アーベル群の）層とする．

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi\sqrt{-1}} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

の大域切断をとった系列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi\sqrt{-1}} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(X) \to 0$$

は（アーベル群の）完全列ではない．実際，恒等関数 $z \in \mathcal{O}^*(X)$ に対し，$z = \exp(f(z))$ を満たす X 上の正則関数 $f(z)$ は存在しない．一方，もともとの層の系列は完全である．これを確かめるには，任意の開集合 U と $g \in \mathcal{O}^*(U)$ に対して，U の開被覆 $U = \bigcup_i U_i$ と切断 $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ であって U_i 上で $\exp(f_i(z)) = g(z)$ を満たすものを見つければよいが，U_i を g の偏角があまり変動しない開集合とする（または単連結とする）ことで各 U_i 上で $\log(g|_{U_i})$ が定義でき，$f_i = \log(g|_{U_i})$ とすればよい．

同様に，$0 \to \underline{\mu_n} \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{n} \mathcal{O}^* \to 0$ も，大域切断は完全列にならないが層としては完全である．ここで $\underline{\mu_n}$ は 1 の n 乗根全体のなす群 μ_n が定める定数層である．

これらの左完全関手の右導来関手を導入したい．まず次を示そう．

命題 10.10. X を位相空間とすると，$\{\mathrm{Sh}/X\}$ は入射的対象を十分もつ．

補題 10.11. $\{\mathrm{Ab}\}$ は入射的対象を十分もつ．

証明. 例えば [志甫 16, 命題 1.99] を見てください． □

補題 10.12. 位相空間の連続写像による順像は（左完全であり）入射的対象を保つ．

証明. 左随伴である逆像が完全なのでよい（命題 7.65）． □

命題 *10.10* の証明. F を X 上の層とする．各点 $x \in X$ に対し，$i_x\colon \{x\} \to X$ とおく．補題 10.11 より，$i_x^{-1}(F) \hookrightarrow I_x$ なる入射的アーベル群 I_x をとれる．補題 10.12 より，これの i_x による順像 $(i_x)_* i_x^{-1}(F) \hookrightarrow (i_x)_* I_x$ も入射的対象へのモノ射であり，さらにこれを $x \in X$ に関して直積した $\prod_{x\in X}(i_x)_* i_x^{-1}(F) \hookrightarrow \prod_{x\in X}(i_x)_* I_x$ も入射的対象へのモノ射である．モノ射 $F \hookrightarrow \prod_{x\in X}(i_x)_* i_x^{-1}(F)$ と合成することで F を入射的対象へ埋め込めた． □

定義 10.13. $\Gamma(U, -)$ の右導来関手を**層係数コホモロジー** (*sheaf cohomology*) とよび $H^p(U, -)$ と書く．f_* の右導来関手を**高次順像** (*higher direct image*) とよぶ（$R^p f_*$ と書く）．

命題 10.14. 連続写像 $f\colon Y \to X$ と層 $F \in \{\mathrm{Sh}/Y\}$ に対し，$R^q f_* F$ は前層 $U \mapsto H^q(f^{-1}(U), F)$ の層化である．

証明. 層の順像をとる関手 f_* は $f_* = a \circ f_{\mathrm{p}} \circ \iota\colon \{\mathrm{Sh}/Y\} \xrightarrow{\iota} \{\mathrm{Presh}/Y\} \xrightarrow{f_{\mathrm{p}}} \{\mathrm{Presh}/X\} \xrightarrow{a} \{\mathrm{Sh}/X\}$ と分解する．ただし ι は層を前層とみなす忘却関手であり，f_{p} は前層としての順像（区別のために記号を変えた）であり，a は前層の層化である．f_{p} と a は完全である（したがって複体のコホモロジーをとる操作と交換する）ことに注意する．層 F の入射的分解 $F \to I^\bullet$ をとると，$R^q f_* F = H^q(f_* I^\bullet) = H^q(a f_{\mathrm{p}} \iota(I^\bullet)) = a f_{\mathrm{p}} H^q(\iota(I^\bullet))$ であり，$H^q(\iota(I^\bullet))$ は前層 $V \mapsto H^q(\Gamma(V, I^\bullet)) = H^q(V, F)$ なので求める等式を得る． □

とりあえず次を書いておく．

定理 10.15 (Leray スペクトル系列)**.** $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ が位相空間の射の列のとき，アーベル群の層に対するスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = R^p g_*(R^q f_*(-)) \Longrightarrow R^{p+q}(g \circ f)_*(-)$$

が存在する．とくに，X として一点集合をとることで，または $H^0(Y,-) \circ f_* = H^0(Z,-)$ に対するスペクトル系列を考えることで，Leray スペクトル系列[*80]

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(-)) \Longrightarrow H^{p+q}(Z, (-))$$

を得る．

証明. Grothendieck スペクトル系列（定理 9.14）の仮定である「I が X 上の入射的な層ならば f_*I は g_*-非輪状である」を確かめる必要があるが，より強く f_*I が入射的であることが補題 10.12 から従う． □

層係数コホモロジーは入射分解を使って定義されているが，具体的な層に対して入射分解を求めて計算するのは大変である．計算しやすいコホモロジーとして次節で述べるチェックコホモロジーがあり，位相空間や層にしかるべき仮定を課すと層係数コホモロジーと同型になる．

話は逸れるが，位相空間や層にしかるべき仮定を課すと，層係数コホモロジーと他のコホモロジーとの同型を示せるので，結果だけ紹介する．

定理 10.16.

(1) M をアーベル群，X を局所可縮な距離空間（例えばパラコンパクト位相多様体）とするとき，X 上の定数層 $\underline{M}$ の層係数コホモロジーと特異コホモロジー $H^n(X, M)$ は同型である．
(2) X をパラコンパクト C^∞ 多様体とすると，X 上の定数層 $\underline{\mathbb{R}}$ の層係数コホモロジーと de Rham コホモロジー $H^n_{\mathrm{dR}}(X)$ は同型である．

証明. 例えば [志甫 16, 定理 4.86, 4.89] を見てください． □

10.3 脆弱層のコホモロジー

この小節では $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とし，$\mathcal{O}_X$ 加群の層を考える．

注 10.17. 任意の位相空間 X 上のアーベル群の層は，環の層 $\mathcal{O}_X$ として定数層 $\underline{\mathbb{Z}}$ をとったときの環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層と同一視できるので，環付き空間上の層に関する命題は適切な意味でアーベル群の層に関する命題にもなります．

定義 10.18. 位相空間 X 上の層 F が**脆弱** (*flabby*, フランス語 *flasque*) （英語でも *flasque* とも言う）であるとは，任意の開集合の包含 $V \subset U$ に対し $F(U) \to F(V)$ が全射であることをいう．（この条件は任意の開集合 V に対し $F(X) \to F(V)$ が全射であることと同値である．）

層 F が**軟弱** (*soft*, フランス語 *mou*) であるとは，任意の閉集合 Z に対し $F(X) \to F(Z)$ が全射であることをいう．（任意の部分集合 $S \subset X$ に対する $F(S)$ は，F の層空間（問題 3.4）の S 上のセクションとして定義される．）

[*80] Leray スペクトル系列とは後の方のみをいうのか前のものも含めるのかよく分かっていません．そもそも，Leray 自身の結果は導来関手やスペクトル系列ができるより前の時代なので，もっと違った定式化だったはずですね．

余談 10.19. この辺の用語は文献によって揺れがあるので要注意です．例えば [志甫 16] では flasque を軟弱と訳している．

命題 10.20. flasque 層の高次コホモロジー[*81]は消滅する．

証明. 次の性質（問題 10.2）を使う．

(1) 入射的層は flasque である．
(2) $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ が層の完全列で F' が flasque ならば，任意の開集合 U に対して $0 \to F'(U) \to F(U) \to F''(U) \to 0$ も完全である．
(3) $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ が層の完全列で F', F が flasque ならば F'' も flasque である．

さて F を flasque 層とする．入射的分解 $F \to I^\bullet$ をとり，$F^0 = F$, $F^1 = \mathrm{Coker}(F \to I^0) = \mathrm{Ker}(I^0 \to I^1)$ とおき，$i \geq 2$ に対して $F^i = \mathrm{Coker}(I^{i-2} \to I^{i-1}) = \mathrm{Ker}(I^{i-1} \to I^i)$ とおく（$0 \to F^i \to I^i \to F^{i+1} \to 0$ が完全列である）．上記の性質より I^i, F^i も flasque になり $(I^\bullet(U))$ が $\bullet > 0$ で完全であることが分かる．

または，I^i が入射的なので $H^{j-1}(U, F^i) \xrightarrow{\sim} H^j(U, F^{i-1})$ が分かり，帰納的に $H^1(U, F^i) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}(U, F)$ なので，flasque 層 F に対し $H^1(U, F) = 0$ を示せばよく，長完全列より $F^1(U) \xrightarrow{0} H^1(U, F) \to H^1(U, I^0) = 0$ なのでよい． □

命題 9.6 より，flasque 層による分解を用いてコホモロジーを計算できる．

10.4 チェックコホモロジー

開被覆 $\mathcal{U}$ ごとに**チェックコホモロジー** (*Čech cohomology*) [*82] $\check{H}^p(\mathcal{U}, F)$ が定義され，開被覆の細分に関する順極限としてチェックコホモロジー $\check{H}^p(X, F)$ が定義される．

まず開被覆に関するチェックコホモロジーを定義する．

定義 10.21 (（開被覆に関する）チェックコホモロジー)**.** X を位相空間，F を X 上の（アーベル群の）前層，$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とする．$p \geq 0$ に対し，$C^p(\mathcal{U}, F) := \prod_{(i_0,\dots,i_p) \in I^{p+1}} F(U_{i_0 \dots i_p})$ とおく．ただし $U_{i_0 \dots i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ という略記を用いる．

アーベル群の準同型 $d = d^p \colon C^p(\mathcal{U}, F) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, F)$ を，

$$(f \colon (i_0, \dots, i_p) \mapsto f_{i_0,\dots,i_p}) \mapsto \left(df \colon (i_0, \dots, i_{p+1}) \mapsto \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f_{i_0,\dots,i_{j-1},\widehat{i_j},i_{j+1},\dots,i_{p+1}} \right)$$

で定める．ただし $\widehat{i_j}$ は「i_j を除外する」を意味する：したがって $i_0, \dots, i_{j-1}, \widehat{i_j}, i_{j+1}, \dots, i_{p+1}$ は $p+1$ 個の元からなる列である．また，部分集合への制限はいちいち書かないことにする．このとき，$(C^\bullet(\mathcal{U}, F), d^\bullet)$ は複体になる．$\check{H}^p(\mathcal{U}, F) := H^p(C^\bullet(\mathcal{U}, F))$ を，（$\mathcal{U}$ に関する）F の p 次チェックコホモロジーという．

次に開被覆の細分との関係を述べる．

[*81] 1 次以上のことをさします．（同じ言い方で 0 次も含めることもありそうですが……．）

[*82] ちなみに，チェック（Čech）はチェコの数学者の名前で，そのためかチェックコホモロジーの記号としてよく $\check{H}$ が使われる（LaTeX で出すには `\check{H}`）．なお Č に使われているダイアクリティカルマークの名前は英語でキャロン（caron），チェコ語でハーチェク（háček）．

定義 10.22 (細分). 開被覆 $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ が開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ の**細分** (*refinement*) である，または $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ を**細分** (*refine*) するとは，写像 $\sigma\colon J \to I$ であって，$V_j \subset U_{\sigma(j)}$ なるものが存在することをいう．このとき $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ と書く．

定義 10.23 (チェックコホモロジー). $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分のとき，細分の定義に現れる σ を用いて，準同型 $\rho = \rho(\sigma)\colon C^p(\mathcal{U}, F) \to C^p(\mathcal{V}, F)$ を，

$$f \mapsto (\rho(f)\colon (j_0, \ldots, j_{p+1}) \mapsto f_{\sigma(j_0)\ldots\sigma(j_{p+1})})$$

と定める（要は，I^{p+1} 上の写像を σ で引き戻して J^{p+1} 上の写像にした）と，これは複体の射になり，さらに，コホモロジーの間に誘導する準同型 $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) \to \check{H}^p(\mathcal{V}, F)$ は写像 σ のとり方によらない（細分関係にある $\mathcal{V}$,$\mathcal{U}$ のみに依存する）．

被覆 $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ は $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}' \prec \mathcal{U}$ のとき同値ということにする．上述のことから，$\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ が同値ならば $\check{H}^p(\mathcal{U}, F)$ と $\check{H}^p(\mathcal{U}', F)$ は自然に同型になることが分かる．

また，任意の被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}, \mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ に対し，共通の細分が存在する．実際，$\{U_i \cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ は明らかに共通の細分である．

そこで，開被覆 $\mathcal{U}$ の "同値類" に関する順極限[*83]としてチェックコホモロジーを $\check{H}^p(X, F) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, F)$ と定める．

実はチェックコホモロジーもある関手の導来関手である．

命題 10.24. X 上のアーベル群の前層の圏 $\{\mathrm{Presh}/X\}$ は入射的対象を十分もつ．

証明. 層コホモロジーの教科書を見てください． □

命題 10.25. $\check{H}^0(\mathcal{U}, -)\colon \{\mathrm{Presh}/X\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ は左完全であり，その右導来関手は $\check{H}^q(\mathcal{U}, -)$ である．

$\check{H}^0(X, -)\colon \{\mathrm{Presh}/X\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ は左完全であり，その右導来関手は $\check{H}^q(X, -)$ である．

略証. $\mathcal{U}$ の方のみ示す（X の方も同様）．入射的対象 I に対して $\check{H}^q(\mathcal{U}, I) = 0$ であることを示せばよい（ことの説明は省略する：導来関手の特徴づけを調べてください）．

開集合 $V \subset X$ に対し V 上の定数層 $\mathbb{Z}$ の $V \to X$ による零延長（定義 3.45）を $\mathbb{Z}_V$ と書く．$C^p(\mathcal{U}, F) = \prod_{i_0,\ldots,i_p} F(U_{i_0,\ldots,i_p}) = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i_0,\ldots,i_p} \mathbb{Z}_{U_{i_0,\ldots,i_p}}, F)$ であり，p 番目を $\bigoplus_{i_0,\ldots,i_p} \mathbb{Z}_{U_{i_0,\ldots,i_p}}$ とするチェイン複体が $p > 0$ で完全なこと（証明略）から，F が入射的ならば複体のコホモロジーは消える． □

チェックコホモロジーと層係数コホモロジーの比較を考える．

命題 10.26. 忘却関手 $\iota\colon \{\mathrm{Sh}/X\} \to \{\mathrm{Presh}/X\}$ は左完全であり，入射的対象を保つ．

証明. ι の左随伴関手（前層の層化）が完全（系 10.4）なので，系 7.64 と命題 7.65 から従う． □

定義 10.27. この ι の右導来関手 $R^q\iota$ を $\mathscr{H}^q$ または $\underline{H}^q$ と書く[*84]．すると，$\mathscr{H}^q$ は $\mathscr{H}^q(F)(U) = H^q(U, F)$ で定まる前層である（これは，前層に対して U での切断をとる関手が完全であることから従う）．

[*83] 開被覆全体は集合をなさない（いくらでも濃度の大きい開被覆を作れる）が，任意の開被覆は $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ の部分集合に同値なので，"同値類" 全体は集合をなす．

[*84] 脚注*35 と同様の記法である．

定理 10.28. 位相空間 X，開被覆 $\mathcal{U}$，層 F に対し，次のスペクトル系列を得る．

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, F)$$
$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(X, \mathscr{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, F)$$

証明. Grothendieck スペクトル系列（定理 9.14）を $\check{H}^0(\mathcal{U}, -)\circ\iota = H^0(X, -)$ または $\check{H}^0(X, -)\circ\iota = H^0(X, -)$ に適用する．（入射的対象の像に関する条件は命題 10.26 より満たされる．） □

なんらかの仮定を用いて $q > 0$ の部分の消滅を示せたならチェックコホモロジーと層係数コホモロジーの同型が従う．例えば次や後述の命題 10.35 が成り立つ．

定理 10.29. X がパラコンパクトハウスドルフ位相空間のとき，X 上のアーベル群の層に対する層係数コホモロジーとチェックコホモロジーは自然に同型になる．

証明. 例えば [志甫 16, 定理 4.81] を見てください． □

10.5 準連接層のコホモロジー

トポロジーにおいて，コホモロジーが消える空間の代表的な例として可縮な空間があった．スキーム上の準連接層のコホモロジーについては，アフィンスキームがこれと似た役割をもつ．

注 10.30. 環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層や，スキーム上の準連接層に対しても，アーベル群の層の圏への関手を施してからアーベル群の層としてコホモロジーをとる（これは a priori には $\mathcal{O}_X$ 加群の層の圏や準連接層の圏上の関手の導来関手とは異なる）．

一方で，$\mathcal{O}_X$ 加群の層については，

- $\{\mathcal{O}_X\text{-mod}\}$ は入射的対象を十分もつ，
- $\{\mathcal{O}_X\text{-mod}\}$ の入射的対象は flasque である（したがって命題 10.20 より層コホモロジーは消滅する），

が成り立つことから，$\{\mathcal{O}_X\text{-mod}\}$ での入射的対象による分解を用いて層コホモロジーを計算でき（命題 9.6），すなわち層コホモロジーは $\Gamma(X, -)\colon \{\mathcal{O}_X\text{-mod}\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ の右導来関手と一致する．詳しい証明は [Har77, Section III.2] を見てください．

以下，準連接層について考える．

命題 10.31. X をアフィンスキーム，$0 \to F \to G \to H \to 0$ を X 上の準連接層の完全列とすると，$0 \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G) \to \Gamma(X, H) \to 0$ も完全列である．

証明. アフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ 上の準連接層の圏と A 加群の圏は（$\Gamma(X, -)$ により）圏同値であり（系 4.27），とくに完全列は完全列と対応する． □

命題 10.32. X をアフィンスキーム，F を X 上の準連接層，$p > 0$ とすると，$H^p(X, F) = 0$ である．

略証. これは命題 10.31 からすぐに従うわけではない．というのは，準連接層の圏からの関手 $\Gamma(X, -)$ は確かに完全なのでその（高次の）導来関手は消滅するが．層コホモロジーは一般の（アーベル群の）層の圏からの関手の導来関手であり，両関手を比較する議論が必要となる．Grothendieck スペクトル系列（定理 9.14）か

ら，準連接層の圏から層の圏への忘却関手による入射的対象の行先の（高次の）コホモロジーが必ず消えていれば十分であり，[Har77, Section III.3] ではネーター性の仮定の下でこの方針で証明が行われている．

[EGA3-1, Théorème III.1.3.1] では別の方針で（ネーター性を仮定せずに）命題 10.32 を証明している．鍵となるのは，アフィンスキーム X の principal open からなる被覆 $\mathcal{U}$ と準連接層 F と $p > 0$ に対し $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) = 0$ となること（直接計算で確かめられる，例えば [Liu02, Lemma 5.2.17] を見よ）と，次の定理（$\mathscr{B}$ を principal open 全体として適用する）である． □

定理 10.33 ([God73, Théorème 5.9.2])**.** X を位相空間，$\mathscr{B}$ を 2 個の共通部分で閉じた開基，F を層とし，任意の $q > 0$ と $U \in \mathscr{B}$ に対し $\check{H}^q(U, F) = 0$ ならば，任意の n に対し $\check{H}^n(X, F) \to H^n(X, F)$ は同型である．

系 10.34. $f\colon Y \to X$ をアフィン射，F を Y 上の準連接層，$p > 0$ とすると，$R^p f_* F = 0$ である．

証明. 命題 10.14 より $R^p f_* F$ は前層 $U \mapsto H^p(f^{-1}(U), F)$ の層化だが，これは U がアフィン開集合のとき命題 10.32 から消滅し，したがって層化も消滅する． □

次に，一般の分離スキーム上のコホモロジーはアフィン開被覆に対するチェックコホモロジーと一致することを述べる．これを使って具体的に計算できるようになる（こともある）．

命題 10.35. X を分離的なスキーム，$\mathcal{U}$ を X のアフィン開集合からなる開被覆，F を X 上の準連接層とすると，$\check{H}^p(\mathcal{U}, F) \to H^p(X, F)$ は同型である．

証明. $\mathcal{U} = \{U_i\}$ とおくと，X が分離的なので $U_{i_0 \cdots i_p}$ はアフィンである（分離性はここでしか使わないので，分離性の仮定を「($\mathcal{U}$ に属する）アフィン開集合有限個の共通部分はアフィンである」で置き換えてもよい）．定理 10.28 のスペクトル系列において，$q > 0$ のとき，$C^p(\mathcal{U}, \mathscr{H}^q(F)) = \prod_{i_0, \ldots, i_p} H^q(U_{i_0 \cdots i_p}, F)$ はアフィンスキームでの F の q 次コホモロジーの直積なので命題 10.32 より 0 であり，したがって $E_2^{p,q} = 0$ である． □

系 10.36. X を分離的なスキームとし，$n+1$ 枚のアフィン開集合による被覆をもつとする．このとき任意の $p > n$ に対し，準連接層の p 次のコホモロジーは消滅する．

証明. ここまで述べていなかったが，チェックコホモロジーを定義する複体 $C^p(\mathcal{U}, F)$ の代わりに，交代的なコチェインからなる複体 $C'^p(\mathcal{U}, F)$ を考えても同じコホモロジーが得られる（複体の射 $C^\bullet \to C'^\bullet$ と，自然な射 $C'^\bullet \to C^\bullet$ との合成と id との間のホモトピーが構成できる）．ここで $f \in C^p(\mathcal{U}, F)$ が**交代的** (*alternating*) とは，$i_0, \ldots, i_p$ のうちに等しいものがあれば $f_{i_0, \ldots, i_p} = 0$ であり，また $\{0, \ldots, p\}$ の置換 σ に対して $f_{i_{\sigma(0)}}, \ldots, f_{i_{\sigma(p)}} = \mathrm{sgn}(\sigma) f_{i_0, \ldots, i_p}$ が成り立つことをいう．

$|\mathcal{U}| = n + 1$ のとき，$p > n$ に対して $C'^p(\mathcal{U}, F) = 0$ なので $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) = 0$ であり，命題 10.35 から $H^p(X, F) = 0$ である． □

ちなみに実は命題 10.32 の性質はアフィンスキームを（ネータースキームの中で）特徴づける．すなわち：

定理 10.37 (Serre の判定法)**.** X をネータースキームとする．次は同値である．

(1) X はアフィンスキームである．
(2) 任意の準連接層 F と $p > 0$ に対し，$H^p(X, F) = 0$ である．
(3) 任意の連接イデアル層 $I \subset \mathcal{O}_X$ に対し，$H^1(X, I) = 0$ である．

証明. 例えば [Har77, Theorem 3.7] を見てください． □

余談 10.38. これの複素解析空間（cf. 11 節）での類似として，Stein 空間は連接層のコホモロジーの消滅で特徴づけられるという Serre の判定法があるらしいです．

10.6 連接層

まず連接層の概念を導入する．

定義 10.39 ([EGA1, 0.5.1–0.5.3])**.** $(X, \mathcal{O})$ を環付き空間とする（局所環付き空間とは限っていない）．F を $\mathcal{O}$ 加群の層とする．

- 局所的に，ある集合 A, B を用いて $\mathcal{O}_X^{\oplus A} \to \mathcal{O}_X^{\oplus B} \to F \to 0$ という完全列がとれるとき，F は**準連接** (*quasi-coherent*) であるという．
- 局所的に，ある非負整数 p を用いて $\mathcal{O}_X^{\oplus p} \to F \to 0$ という完全列がとれるとき，F は**有限型** (*of finite type*) であるという．
- 有限型であり，かつ任意の開集合 $U \subset X$ と任意の非負整数 p と任意の射 $u\colon \mathcal{O}_X^{\oplus p} \to F$ に対し $\operatorname{Ker} u$ も有限型であるとき，F は**連接** (*coherent*) であるという．

注 10.40. 例えば，A が局所環で $I \subset A$ が有限生成でないイデアルのとき，$\operatorname{Spec} A$ 上の準連接層 $(A/I)^\sim$ は有限型だが連接でない．

一般の環付き空間上では，$\mathcal{O}$ すら連接と限らない[*85]．

命題 10.41. スキーム上で，定義 10.39 での準連接層の定義と定義 4.25 での準連接層の定義は同値である．

局所ネータースキーム上の準連接層に対し，有限型と連接は同値になり，各アフィン開部分スキーム上で有限生成加群に対応することとも同値である．

証明. 難しくない．（後半は，ネーター環上の有限生成加群の部分加群もまた有限生成であることを用いる．□

定理 10.42 (岡の連接定理 [Oka50][*86])**.** 複素解析空間の構造層 $\mathcal{O}_X$ は連接である．

命題 10.43.

- 連接層の有限型な部分層は連接である．
- 層の短完全列 $0 \to F \to G \to H \to 0$ があり，F, G, H のうち 2 つが連接ならばもう 1 つも連接である．
- 連接層の間の射の核・余核・像は連接である．
- F, G が連接ならば $\mathcal{H}om(F, G)$ は連接である．
- $\mathcal{O}$ が連接ならば，層 F が連接であることとある射 $\mathcal{O}^{\oplus p} \to \mathcal{O}^{\oplus q}$ の余核であることは同値である．

証明. [Ser55a, Section 2] を見てください（順に，Proposition 3, Théorème 1, Théorème 2, Proposition 6, Proposition 2)．□

話が飛ぶが，次の定理を引用しておく．

[*85] と聞いたような気がします．

[*86] この論文では，（現代のわれわれに馴染み深い）層ではなく**不定域イデアル** (フランス語 *idéal de domaines indéterminés*) の言葉で議論が行われている．

定理 10.44 (dévissage [EGA3-1, Théorème III.3.1.2])**.** [*87] X をネータースキームとする．K を $\mathrm{Obj}(\mathrm{Coh}/X)$ の部分クラスとする．K が次の条件を満たせば，K は $\mathrm{Obj}(\mathrm{Coh}/X)$ 全体に一致する．

(1) $0 \in K$.
(2) $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ が (Coh/X) の短完全列で，F', F, F'' のうち 2 つが K に属するならば，3 つめも K に属する．
(3) X の各点 x（閉点と限らない）に対し，$F \in K$ であって $\dim_{\kappa(x)} F_x = 1$ なるものが存在する．

また，条件 (3) の代わりに，「X の各点 x（閉点と限らない）に対し，$F \in K$ であって $\dim_{\kappa(x)} F_x \neq 0$ なるものが存在する」かつ「K に属する対象の直和因子も K に属する」を課してもよい．

10.7 射影空間上の連接層のコホモロジー

定義 10.45 (次数付き加群)**.** （次数付き環の定義は定義 4.14 を見よ．）I をモノイドとし，B を I-次数付き環とする．(I-) 次数付き B 加群とは，B 加群 M とそのアーベル群としての直和分解 $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ であって，$b \in B_i$ と $m \in M_j$ に対し $bm \in M_{i+j}$ を満たすものをいう．

定義 10.46. （$\mathrm{Proj}\, B$ の定義は定義 4.14 を見よ．）$\mathbb{N}$-次数付き環 B と，$\mathbb{Z}$-次数付き B 加群 M に対し，$\mathrm{Proj}\, B$ 上の準連接層 $\tilde{M}$ を次で定める．斉次元 $b \in B$ に対し，$\tilde{M}(D_+(b)) = M_{(b)}$ とする．ただし $M_{(b)}$ は B 加群の局所化 M_b（これには自然に $\mathbb{Z}$-次数付き B 加群の構造が入る）の 0 次部分である．

層になることと準連接になることの確認は省く．

注 10.47. $\mathrm{Spec}\, A$ 上の準連接層と A 加群の対応の場合とは異なり，圏同値ではない．例えば，B 加群 B とその部分 B 加群 $B_+ \subset B$ は同じ準連接層を定める．

定義 10.48 ($\mathcal{O}(n)$)**.** $n \in \mathbb{Z}$ とする．B 加群 B の次数付けを n ひねった B 加群を $B(n)$ と書く：すなわち，$B(n)_i = B_{n+i}$．$\mathrm{Proj}\, B$ 上の準連接層 $B(n)^\sim$ のことを $\mathcal{O}(n)$ と書く．

典型例として，$B = A[x_0, \ldots, x_N]$（各変数の次数を 1 とする）の場合に $\mathrm{Proj}\, B = \mathbb{P}^N_A$ 上の準連接層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_A}(n) = \mathcal{O}(n)$ を得る．その大域切断 $\Gamma(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{O}(n))$ は B の斉次 n 次式全体（$n < 0$ のときは 0）である．

注 10.49. 以降，B は B_0 上 B_1 で生成されていると仮定する．この仮定抜きでは $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(n+m)$ などが成立しなくなる（例えば $B = k[x_0, \ldots, x_N]$ で各 x_i が斉次 2 次元である場合を考えよ）．

定義 10.50. $\mathbb{P}^N_A (= \mathrm{Proj}\, A[x_0, \ldots, x_N])$ 上の準連接層 F に対し，$F(n) := F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$ と定める．

余談 10.51. $\mathcal{O}(n)$ またはそれをかける操作のことを *Serre twist* とも言うそうです．

$\mathcal{O}(n)$ を相対的な場合に（すなわち，スキームの射影的な射に対して）も自然に定められる．次の命題から分かるように，この $\mathcal{O}(n)$ をかけるという操作は便利である．

命題 10.52. X をネータースキームとし，$f\colon Y \to X$ を閉埋め込み $Y \to \mathbb{P}^N_X$ と自然な射 $\mathbb{P}^N_X \to X$ の合成とする．F を Y 上の連接層 (定義 10.39) とする．このとき，各 $q \geq 0$ に対し $R^q f_* F$ は連接層である．また，あ

[*87] フランス語 dévissage は「ネジを緩める」のような意味だそうです．数学用語としては専らこの定理の類の帰納法的議論をさします．

る整数 n が存在して次を満たす：自然な $f^*f_*F(n) \to F(n)$ は全射であり，$q>0$ に対しては $R^qf_*F(n)=0$ である．

$X=\operatorname{Spec} A$ のとき主張は次を意味する：各 $q \geq 0$ に対し $H^q(Y,F)$ は有限 A 加群である．また，ある整数 n が存在して次を満たす：$F(n)$ は大域切断 $H^0(Y,F(n))$ で生成され，$q>0$ に対しては $H^q(Y,F(n))=0$ である．

略証．主張はすべて X に関して局所的なので，$X=\operatorname{Spec} A$ と仮定してよい．また，閉埋め込みを $i\colon Y \to \mathbb{P}^N$ と書くとき，(Y,F) に関する主張と $(\mathbb{P}^N, i_*F)$ に関する主張は同じなので，$Y=\mathbb{P}^N_A$ と仮定してよい．

$\mathbb{P}^N_A$ を $N+1$ 枚のアフィン開集合で覆えるので，$q>N$ に対するコホモロジーはいつでも消滅する．

$f^*f_*F(n)$ に関する主張は，$F(n)$ が大域切断 $H^0(\mathbb{P}^N,F(n))$ で生成されることを意味する．これは $N+1$ 枚（有限個）の各アフィン開集合への制限の（有限な）生成系をとりそれらをすべて持ち上げられるだけ大きい n をとればよい．

R^qf_*F（$q=0$ の場合命題 4.31 から，$q>0$ の場合 [Har77, Corollary III.8.6] から準連接である）の連接性すなわち $H^q(\mathbb{P}^N,F)$ の有限性については，まず $F=\mathcal{O}(n)$ の場合を具体的な計算で倒しておき，一般の場合は，$F(n)$ が大域切断で生成される n をとり，そこから誘導される完全列 $0 \to K \to \mathcal{O}(-n)^{\oplus k} \to F \to 0$ を用いて降下帰納法で示す．

$q>0$ に対する $R^qf_*F(n)$ すなわち $H^q(\mathbb{P}^N,F(n))$ の消滅についても前段落と同様の方法で示す． □

演習問題

問題 10.1 (☆)**.** $X=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ とし，$Z=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset X$ とし，F を $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}$ に対応する X 上の準連接層とする．命題 10.6 の $j_!j^{-1}F$ と $i_*i^{-1}F$ を考え，X の各開集合 $V=D(a)$（$a \in X$）での切断を答えよ．また，これらは準連接ではないことを示せ．

問題 10.2 (【かなり難しい】flasque 層のコホモロジー)**.** 命題 10.20 の (1), (2), (3) を証明せよ．

問題 10.3. チェックコホモロジーの定義（定義 10.21, 10.23）で証明を省略した部分を確認せよ（複体になること，細分が誘導する射が複体の射になること，それがコホモロジーに誘導する射が写像 $J \to I$ によらないこと）．

問題 10.4. k を代数閉体とする．$\mathbb{P}^1_k$ 上の構造層 $\mathcal{O}$ のコホモロジーを求めよ．

11 GAGA

本節ではスキームは分離的とする．

$\mathbb{C}$ 上の代数幾何と複素解析幾何との関係やそれに関する諸定理を Serre の論文 *Géométrie algébrique et géométrie analytique* [Ser55b][*88] のタイトルから GAGA とよぶ．また，この論文では射影スキームに関して示されているものを [SGA1, Exposé XII] では固有射に一般化している．

きわめて大雑把に言うと，固有な多様体に関してはいろいろと一致する．

[*88] 英語に直訳すると：algebraic geometry and analytic geometry.

11.1　複素解析空間と関手 an

$\mathbb{C}$ 上の局所有限型スキーム X に対し，自然に解析空間 X^{an} が対応し性質もそれなりに保たれるという話をしたいので，まず解析空間を定義しよう．

定義 11.1. 局所環付き空間で，構造層 $\mathcal{O}$ に $\mathbb{C}$ 代数構造が入っているものを局所 $\mathbb{C}$ 代数付き空間[*89]とよぶ．

複素解析空間 (*complex analytic space*) とは，局所 $\mathbb{C}$ 代数付き空間であって，次のように構成される局所環付き空間からなる開被覆をもつものをいう．$n \in \mathbb{N}$ とし，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ を $\mathbb{C}^n$ 上の（多変数）複素正則関数のなす層とし，$U \subset \mathbb{C}^n$ を（Euclid 位相での）開集合とし，$f_1, \ldots, f_r$ を U 上の複素正則関数とし，$X = \{z \in U \mid f_j(z) = 0\}$ を共通零点の集合（に誘導位相を入れた位相空間）とし，$\mathbb{C}$ 代数の層 $\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/\langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ で定めると，$(X, \mathcal{O}_X)$ は環付き空間である．

命題 11.2. $\mathbb{C}$ 上の局所有限型スキーム X に対し，次を満たす解析空間 X^{an} および $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{LR}/\mathbb{C}}(X^{\mathrm{an}}, X)$ が存在する：解析空間 Y に対し，$\mathrm{Hom}_{\{\text{analytic spaces}\}}(Y, X^{\mathrm{an}}) \xrightarrow[\sim]{\phi\circ-} \mathrm{Hom}_{\{\mathrm{LR}/\mathbb{C}\}}(Y, X)$ は全単射．ここで $\mathrm{LR}/\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 上の局所環付き空間の圏である．

X^{an} の底位相空間 $|X^{\mathrm{an}}|$ は $X(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, X)$ に等しく（このことは上の全単射に $Y = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ を代入すると従う），各点 $x \in X^{\mathrm{an}}$ に対し茎の間の射 $\phi_x \colon \mathcal{O}_{X,\phi(x)} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ が完備化に誘導する射 $\hat{\mathcal{O}}_{X,\phi(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{X^{\mathrm{an}},x}$ は同型である．とくに，ϕ は平坦射[*90]である．

略証. 以下を示せばよい（省略）：

位相空間 $\mathbb{C}$ に正則関数の層を乗せた解析空間が $(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}}$ を与える．

X^{an} と Y^{an} が存在するとき，$X^{\mathrm{an}} \times Y^{\mathrm{an}}$ が $(X \times Y)^{\mathrm{an}}$ を与える．

X^{an} が存在するとき，開部分スキーム $X' \subset X$ に対し，$\phi^{-1}(X') \subset X^{\mathrm{an}}$ が $(X')^{\mathrm{an}}$ を与える．

X^{an} が存在するとき，イデアルの層 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ で定まる閉部分スキーム $X' \subset X$ に対し，$\mathcal{I}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \subset \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ で定まる X^{an} の閉部分空間が $(X')^{\mathrm{an}}$ を与える．

張り合わせができる．□

命題 11.3. X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層 F に対し，$F^{\mathrm{an}} := \phi^* F$ は $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ 加群の層である．この関手は完全，忠実，conservative であり，連接層を連接層にうつす．

証明. 最初の主張は明らか．残りの主張は，点 $x \in X^{\mathrm{an}}$ に対し $\mathcal{O}_{X,\phi(x)} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ は平坦で完備化すると同型であることから従う．□

普遍性から，有限型 $\mathbb{C}$ スキームの射 $f\colon X \to Y$ は自然に解析空間の射 $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ を誘導する．

命題 11.4. $f\colon X \to Y$ を有限型 $\mathbb{C}$ スキームの射とする．

(1) X が P を満たすことと X^{an} が P を満たすことは同値である，ここで P は連結，被約，正規，正則など．
(2) $f\colon X \to Y$ が P を満たすことと $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ が P を満たすことは同値である，ここで P は固有，閉埋め込み，開埋め込み，エタールなど．

[*89] という言い方が一般的なのか分かりませんが……．
[*90] 各点での局所環の射が平坦という意味で．

証明. [SGA1, Propositions XII.3.1, XII.3.2] を見てください．一部の性質は局所環の完備化やそこに誘導される射を見て判定できることから従う．もう少し議論が必要なものもある． $\square$

命題 11.5. X^{an} の底集合は $X(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, X)$ に一致する．

証明. これは X^{an} の定義のときに述べた普遍性で $Y = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ とすればよい． $\square$

任意の複素正則多様体が X^{an} の形に書けるかというとそんなことは全然なく，また X^{an} 上の層が X 上の層の $-^{\mathrm{an}}$ の形に書けるかというとそんなことは全然ないのだが，しかし，X^{an} が固有ならばどちらも正しいということを 11.2 節で示す．

例 11.6. $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$，$Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ とすると，$X^{\mathrm{an}} = \mathbb{C}$，$Y^{\mathrm{an}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$（に Euclid 位相を入れて正則関数の層を乗せたもの）である．

$\Gamma(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O})$ の元 $\sin z$ は $\Gamma(X, \mathcal{O})$ からの像に属さない．というのは，$\sin z$ は零点を無限個もつが $\Gamma(X, \mathcal{O})$ にはそのような元は（0 以外に）ない．同様に，$\sin z$ が生成する $\mathcal{O}$ の部分層も X 上の層の an の形に書けない．

$\exp \in \mathrm{Hom}(X^{\mathrm{an}}, Y^{\mathrm{an}})$ は $\mathrm{Hom}(X, Y)$ からの像に属さない．

余談 11.7. 上の例は代数的な関数が「少ない」ことを表しています．といっても解析的な関数もそんなに多くはなく，例えば $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ は定数以外にない（Picard の大定理）わけですが．

11.2 固有多様体上の連接層に関する GAGA

参考文献：[SGA1, XII.4]，[Ser55b, Section 3].

まず一般に base change を定義する．

定義 11.8 (base change)**.** 可換図式

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

に対し，関手 $\{\mathcal{O}_Y\text{-mod}\} \to \{\mathcal{O}_X\text{-mod}\}$ の自然変換 $\phi^* R^p f_* \Longrightarrow R^p g_* \psi^*$ が次で定まり，これを *base change* という．逆像と順像の随伴により $R^p f_* \to \phi_* R^p g_* \psi^*$ を定めればよく，

$$R^p f_* \Longrightarrow R^p f_* \psi_* \psi^* \Longrightarrow R^p (f \circ \psi)_* \psi^* = R^p (\phi \circ g)_* \psi^* \Longrightarrow \phi_* R^p g_* \psi^*$$

と定める．ただし 1 つめは逆像と順像の随伴に伴う $1 \Longrightarrow \psi_* \psi^*$ から得られる自然変換であり，2 つめと 4 つめは Leray スペクトル系列の edge morphism である．

注 11.9. 定義するだけなら可換図式でできますが，実際にはカルテジアン図式の場合（すなわちファイバー積になっている場合）のみをいうのかもしれません．

何らかの仮定の下でこの base change が自然同型である，という形の base change 定理がいろいろあります．

注 11.10. 注 10.17 で述べたように，環付き空間上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層の理論は位相空間上のアーベル群の層の理論を含む．

さて，局所有限型 $\mathbb{C}$ スキームの射とするとき $f\colon Y \to X$ に対するカルテジアン図式

$$\begin{array}{ccc} Y^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{an}}} & X^{\mathrm{an}} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

に対する base change を $\theta_p\colon (R^p f_* F)^{\mathrm{an}} \to R^p f^{\mathrm{an}}_* F^{\mathrm{an}}$ と書く．次が本小節の主結果である．

定理 11.11. $f\colon Y \to X$ を局所有限型 $\mathbb{C}$ スキームの射とし，f は固有とする．このとき，Y 上の任意の連接層 F に対し，$\theta_p\colon (R^p f_* F)^{\mathrm{an}} \to R^p f^{\mathrm{an}}_* F^{\mathrm{an}}$ は同型である．

系 11.12. X が $\mathbb{C}$ 上の固有スキームならば，任意の連接層 F に対し $H^p(X, F) \cong H^p(X^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$ である．

証明. 定理 11.11 を $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ に適用する． □

ただし，これだけ証明したいとしても，射影的な場合へ帰着する際に相対的な（すなわち，コホモロジーだけでなく高次順像 $R^p g_*$ に関する）議論がおそらく必要になる．

系 11.13. X が $\mathbb{C}$ 上の固有スキームならば，任意の $q \geq 0$ と任意の連接層 F, G に対し，$\operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(F, G) = \operatorname{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}}, G^{\mathrm{an}})$ である．とくに，$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, G) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}}, G^{\mathrm{an}})$ である．

系 11.14. X が $\mathbb{C}$ 上の固有スキームならば，X 上の連接層の圏と X^{an} 上の連接層の圏は（$-^{\mathrm{an}}$ により）圏同値である．

系 11.13, 11.14 は定理 11.11 の後で証明する．

定理 *11.11* の証明. まず θ_p の両辺とも短完全列を長完全列にうつすことに注意する（ϕ_X, ϕ_Y が平坦なのでそれらによる引き戻しは完全である）．したがって，短完全列をなす 3 つの層のうち 2 つについて θ_p が同型ならば 3 つめについても同型である．

$f = f_2 \circ f_1$ で f_1, f_2 が定理の主張を満たすならば f も満たす．実際，収束スペクトル系列の間の射

$$\begin{array}{ccc} (R^p(f_2)_* R^q(f_1)_* F)^{\mathrm{an}} & \Longrightarrow & (R^{p+q} f_* F)^{\mathrm{an}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^p(f_2^{\mathrm{an}})_* R^q(f_1^{\mathrm{an}})_* F^{\mathrm{an}} & \Longrightarrow & R^{p+q} f^{\mathrm{an}}_* F^{\mathrm{an}} \end{array}$$

において左の射が（f_2 と f_1 に関する base change の合成なので）同型なので右の射も同型である．

f が閉埋め込みのとき，高次順像は 0 なので θ_p（$p > 0$）は自明に同型であり，θ_0 が同型であることは簡単に示せる．

$f\colon Y \to X$ が射影的な場合を示そう．上述のことから，$Y = \mathbb{P}^N_X$ の場合を考えればよい．まず構造層 $\mathcal{O}_Y$ に対して

$$f_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X, \quad R^p f_* \mathcal{O}_Y = 0 \ (p > 0), \qquad f^{\mathrm{an}}_* \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}} = \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}, \quad R^p f^{\mathrm{an}}_* \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}} = 0 \ (p > 0)$$

である（とくに定理の θ_p は同型である）：代数的な方（resp. 解析的な方）ではこれは X がアフィン（resp. polydisc など Stein）の場合に帰着され，$\mathbb{P}^N$ の標準的な（$N+1$ 枚の $\mathbb{A}^N$ による）被覆に関するチェックコホモロジーの計算により示せる：被覆に登場する開集合がアフィン（resp. Stein）なのでコホモロジーが消えることを使っている（命題 10.32，余談 10.38）．次に，$\mathcal{O}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ に対しても θ は同型である：層の完全列

$0 \to \mathcal{O}(n-1) \to \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}_H(n) \to 0$ のコホモロジー長完全列をとり（$H \subset \mathbb{P}^N$ は超平面で，とくに $\mathbb{P}^{N-1}$ に同型），$|n|, N$ に関する帰納法を使う．

一般の連接層 F に対して，命題 10.52 より全射 $G := \mathcal{O}(n)^{\oplus k} \to F$ をとることができ，その核を K とおく（これも連接層である）．主張を p に関する降下帰納法で示す．p が大きい場合はよい：$p > N$ の場合はコホモロジーが消える（前述の $N+1$ 枚による被覆があるので）．図式

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & (R^p f_* K)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{p,K}"] & (R^p f_* G)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & (R^p f_* F)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{p,F}"] & (R^{p+1} f_* K)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{p+1,K}", "\sim"'] & (R^{p+1} f_* G)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & R^p f^{\mathrm{an}}_* K^{\mathrm{an}} \arrow[r] & R^p f^{\mathrm{an}}_* G^{\mathrm{an}} \arrow[r] & R^p f^{\mathrm{an}}_* F^{\mathrm{an}} \arrow[r] & R^{p+1} f^{\mathrm{an}}_* K^{\mathrm{an}} \arrow[r] & R^{p+1} f^{\mathrm{an}}_* G^{\mathrm{an}} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

（左から 2,5 番目は前段落から同型であり，左から 3 番目は降下帰納法の仮定より同型である）に五項補題を適用すると $\theta_{p,F}$ は全射であり，F は任意なので $\theta_{p,K}$ も全射であり，再び五項補題より $\theta_{p,F}$ は単射である．

一般の（f が固有的な）場合を考える．X はネーターと仮定してよく，このとき Y もネーターである．Y 上の連接層で定理の主張が成立するもの全体の集合を K とおき，これが定理 10.44 の仮定を満たすことを確認すればよい．完全列に関する条件は θ_p の構成が関手的なことと五項補題から簡単に分かるので，各点 y に対し y での茎が消えない対象の存在を確かめればよいが，（Y を y の閉包で置き換えることで，）Y は既約かつ y がその生成点と仮定してよい．Chow の補題（定理 5.44）を用いて，$g\colon Y' \to Y$ であって，g と $fg\colon Y' \to X$ が両方射影的であり g はさらに双有理であるものをとる．

まず命題 10.52 より，$n \geq 0$ であって，$q > 0$ に対しては $R^q g_* \mathcal{O}_{Y'}(n) = 0$ であるものがとれる．$F = g_* \mathcal{O}_{Y'}(n)$ とおくと，（g が双有理なので）$\dim_{\kappa(y)} F_y = 1$ である．F が定理の主張を満たすことを示そう．Grothendieck スペクトル系列（定理 9.14）

$$E_2^{p,q} = R^p f_* R^q g_* \mathcal{O}_{Y'}(n) \Longrightarrow R^{p+q}(fg)_* \mathcal{O}_{Y'}(n)$$

において $q > 0$ の部分は消えているので，同型 $R^p f_* F \xrightarrow{\sim} R^p(fg)_* \mathcal{O}_{Y'}(n)$ が得られる．これに $-^{\mathrm{an}}$ した同型射と，$\mathcal{O}_{Y'}(n)^{\mathrm{an}}$ で同じ議論[*91] をして得られる同型射を比較して，図式

$$\begin{tikzcd}
(R^p f_* F)^{\mathrm{an}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\theta"] & (R^p (fg)_* \mathcal{O}_{Y'}(n))^{\mathrm{an}} \arrow[d, "\theta"] \\
R^p f^{\mathrm{an}}_* F^{\mathrm{an}} \arrow[r, "\sim"] & R^p (fg)^{\mathrm{an}}_* \mathcal{O}_{Y'}(n)^{\mathrm{an}}
\end{tikzcd}$$

を得る．右の射は（fg が射影的ゆえ）同型なので，左の射も同型である．□

系 11.13 の証明. $U \subset X$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F|_U, G|_U)$ を対応させる層を $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ とおき，$\mathcal{E}xt^q(F, -) := R^q\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, -)$ とおく．$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ は連接であり（[EGA3-1, Proposition 0.12.3.3]），またこの構成は平坦射 $X' \to X$ による引き戻しと可換（$q = 0$ に対しては [EGA1, 0.6.7.6], $q \geq 0$ に対しては [EGA3-1, Proposition 0.12.3.5]））なので，とくに平坦射 $X^{\mathrm{an}} \to X$ に対し適用することで $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(F, G)^{\mathrm{an}} = \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}}, G^{\mathrm{an}})$ を得る．

[*91] 正確には，代数側と解析側の両方で条件を満たすように n をとる必要がありそうです．

次に，local-to-global Ext スペクトル系列（補題 11.15）

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(F,G)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(F,G)$$
$$E_2^{p,q} = H^p(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}},G^{\mathrm{an}})) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}},G^{\mathrm{an}})$$

は base change と可換であり，系 11.12 より左辺の各項で base change は同型なので，右辺も同型である． □

補題 11.15 (local-to-global Ext スペクトル系列)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間，F, G を $\mathcal{O}_X$ 加群の層とするとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(F,G)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(F,G)$$

がある．

証明. $\Gamma(X,-) \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F,-)\colon \{\mathcal{O}_X\text{-mod}\} \to \{\mathrm{Ab}\}$ に対する Grothendieck スペクトル系列をとりたいので，入射的層 I に対して $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,I)$ のコホモロジーが消えることを確かめればよい．$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,I)$ が flasque（定義 10.18）であることを確かめればよい（命題 10.20）が，開集合 $U \subset X$ に対し包含写像を j とおくと，

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,I)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F|_U, I|_U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(F|_U), I)$$

であり（$j_!$ は零延長（定義 3.45）），$j_!(F|_U) \to F$ は単射（命題 10.6 参照）なので $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,I)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F,I)$ からここへの射は全射である． □

系 *11.14* の証明. 忠実充満性は系 11.13 から従うので，あとは本質的全射性を示せばよい．

まず射影的な場合，解析的な連接層 F は命題 10.52 の解析版よりある $(\mathcal{O}(m)^{\oplus l})^{\mathrm{an}} \to (\mathcal{O}(n)^{\oplus k})^{\mathrm{an}}$ の余核として表せるので，$\mathcal{O}(m)^{\oplus l} \to \mathcal{O}(n)^{\oplus k}$ の余核に an したものと同型である．

一般の（固有射の）場合，ネーター帰納法を用いる：すなわち，X の真の閉部分集合に台をもつ連接層は代数的だとしてよい[*92]．定理 11.11 のときと同様に Chow の補題を用いて，$g\colon X' \to X$ であって，g と X' が両方射影的であり g はさらに双有理（X の稠密開集合 U 上で同型）であるものをとる．$\mathcal{F}$ を X^{an} 上の連接層とする．$\mathcal{F} \to g^{\mathrm{an}}_* g^{\mathrm{an}*}\mathcal{F}$ の核と余核を $\mathcal{K}, \mathcal{C}$ とすると，（g は U 上同型なので）$\mathcal{K}, \mathcal{C}$ は $X \setminus U$ 上に台をもち，したがって帰納法の仮定から X 上の連接層を用いて $K^{\mathrm{an}}, C^{\mathrm{an}}$ と書ける．また X' は射影的なので $g^*\mathcal{F}$ も G^{an} と書ける．そこで $L = \mathrm{Ker}(g_*G \to C)$ とおくと $0 \to K^{\mathrm{an}} \to \mathcal{F} \to L^{\mathrm{an}} \to 0$ となる．系 11.13 より $\mathrm{Ext}^1(L,K) \to \mathrm{Ext}^1(L^{\mathrm{an}}, K^{\mathrm{an}})$ は同型なので，命題 9.8 の対応より，これはある $0 \to K \to F \to L \to 0$ に $-^{\mathrm{an}}$ したものである． □

系 11.16. X が $\mathbb{C}$ 上の固有スキームならば，X 上有限なスキームの圏と X^{an} 上有限なスキームの圏は（$-^{\mathrm{an}}$ により）圏同値である．また「有限」を「有限エタール」に置き換えたものも圏同値である．

証明. 有限射 $f\colon Y \to X$ は連接層 $f_*\mathcal{O}_Y$ および乗法が定める射 $f_*\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_Y$ の組と対応し，X^{an} 上でも同様である．このことから前半が従う．

f がエタールなことと f^{an} がエタールなことは同値（命題 11.4）なので後半も従う． □

[*92] ネーターなので，閉部分集合の無限減少列は存在しない（命題 5.29）．

11.3 特異コホモロジーに関する GAGA

複素解析空間においては $\mathbb{Z}$ 係数などの特異コホモロジーも重要である．これは定数層のコホモロジーと同型である（定理 10.16(1)）．一方スキーム上では，（準）連接層ではなく通常のアーベル群が定める定数層の Zariski 位相に関するコホモロジーはあまり面白い結果を与えない．一つの要因は Zariski 位相では開集合が少なすぎることである（既約スキーム上の定数層は flasque になってしまいコホモロジーは消える（命題 10.20））．これを，エタール射を用いて，通常の位相空間ではなく Grothendieck 位相の枠組みで（少なくとも有限アーベル群に対しては）解決するのがエタールコホモロジーである：有限アーベル群係数の特異コホモロジーはエタールコホモロジーと一致する（定理 13.46）．

11.4 基本群に関する GAGA

定理 11.17 (定理 8.21 の再掲)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の局所有限型スキームとすると

$$\pi_1^{\text{ét}}(X) \cong \pi_1^{\text{top}}(X^{\text{an}})^\wedge$$

が成り立つ．ここで右辺は $\pi_1^{\text{top}}(X^{\text{an}})$ の副有限完備化である．

前述のように，証明において本質的なのは次の Grauert–Remmert による結果である．

定理 11.18 ([GR58])**.** X を $\mathbb{C}$ 上有限型スキームとする．X 上有限エタールなスキームの圏と X^{an} 上の有限エタールな空間の圏は $-^{\text{an}}$ により圏同値である．

12 サイトと層

参考文献：[SGA4], [Vis05].

12.1 導入

エタール射を用いてエタール位相を定義しその位相に関する層のコホモロジーとしてエタールコホモロジーを導入するのだが，まずエタールコホモロジーを導入する動機を説明する．

スキーム上の準連接層のコホモロジーは 10.5 節で述べた．$\mathbb{C}$ 上固有で滑らかなスキーム X とその解析化 X^{an} に対して，X 上の連接層のコホモロジーと X^{an} 上の対応する層のコホモロジーは一致する（11.2 節）．とくに，複素多様体 X^{an} の正則関数の層や接束・余接束のコホモロジーは X 上の対応する（Zariski 位相に関する）層のコホモロジーと一致する，一方，$\mathbb{Z}$ などを係数とする特異コホモロジーは，複素多様体 X^{an} 上の定数層 $\mathbb{Z}$ などのコホモロジーに一致するが，スキーム X 上の定数層 $\mathbb{Z}$ のコホモロジーとは全く一致しない[*93]．スキーム側での対応物（層，コホモロジー）を見つけたい．さらに，$\mathbb{C}$ 上と限らない，正標数の場合も含めた広い範囲のスキームで同様のコホモロジーが定義できて良い性質が成り立つと嬉しい．これに対する回答の一つがエタール位相・エタールコホモロジーである．

エタール位相においては開集合（開埋め込み）の一般化としてエタール射を使うのだが，これは通常の位相

[*93] 既約スキーム X 上でアーベル群 Λ の定める定数層 Λ は flasque になり，したがって高次コホモロジーは消滅する（命題 10.20）．

空間（開集合系）とその上の層の枠組みにはあてはまらず，「Grothendieck（前）位相」をそなえた圏（サイト）という一般的な枠組みを考える必要がある．本節ではこれを解説し，その例としてのエタール位相については次節で説明する．

なお，Grothendieck 前位相と Grothendieck 位相の間の関係は通常の位相空間の開基と開集合系の関係に似る：前位相（resp. 開基）から位相（resp. 開集合系）が定まるが，相異なる前位相（resp. 開基）が同じ位相（resp. 開集合系）を定めることもあり，層の概念は位相（resp. 開集合系）から定まるが前位相（resp. 開基）を使って層になるかを確かめることもできる．Grothendieck 位相は Grothendieck 前位相に比べて初見ではややこしいので，ひとまず前位相だけ勉強する方針でもよいと思う．

12.2 Grothendieck 前位相

層の概念について再考する（必要なら 3.3 節を復習せよ）．まず位相空間 X 上のアーベル群（，……）の前層とは，X の開集合ごとにアーベル群が定まっており，X の開集合の包含関係ごとに制限写像が定まっており，制限写像の合成が関手的なものであった．開集合系 $\mathrm{Open}(X)$ を包含関係により順序集合とみなしそれを例 7.4(14) の方法で圏とみなす（すなわち，対象は X の開集合で，U から V への射の集合は $U \subset V$ のとき 1 元で $U \not\subset V$ のとき 0 元だとし，射の合成は自明な方法で定める）と，前層とは結局反変関手 $F\colon \mathrm{Open}(X) \to \{\mathrm{Ab}\}$ のことに他ならない．これは任意の圏へ一般化できる．

層の定式化は一般の圏では言葉が足りないので，例えば *Grothendieck* **位相** (*Grothendieck topology*) をそなえた圏を考える必要がある．本小節ではもう少し記述が簡単な概念である *Grothendieck* **前位相** (*Grothendieck pretopology*) を紹介する．

前層 F が層になるための張り合わせ条件について考える．「2 つの開集合 U_i, U_j の交わり」という概念と「開集合 U の開被覆」という概念が登場する．前者を一般の圏で定義される概念で言い換えるとファイバー積 $U_i \times_X U_j$ になる（一般の圏でファイバー積が存在するとは言っていない）．後者はもう少し複雑である．

定義 12.1 (Grothendieck 前位相, [SGA4, Définition II.1.1], [Vis05, Definition 2.24][*94])**.** $\mathcal{C}$ を 2 つの対象のファイバー積をもつ圏とする．$\mathcal{C}$ の各対象 X に対して，X への射の族 $(X_i \to X)_{i\in I}$ からなるクラス $\mathsf{Cov}(X)$ が定まっており（これに属する族のことを X の**被覆** (*covering*) とよぶ)[*95]，次の条件を満たすときこのデータを $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck 前位相とよぶ．

- 同型射 1 つからなる族は被覆である．
- $\emptyset$（始対象）への 0 個の射からなる族は被覆である．[*96]
- 底変換で保たれる．すなわち，$(X_i \to X)_{i\in I}$ が被覆で $Y \to X$ が射ならば，$(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ も被覆である．
- 合成で保たれる．すなわち，$(X_i \to X)_{i\in I}$ が被覆で $(X_{ij} \to X_i)_{j\in J_i}$ も被覆ならば，$(X_{ij} \to X)_{i\in I, j\in J_i}$ も被覆である．

定義 12.2 (サイト)**.** Grothendieck 前位相（が定める Grothendieck 位相）をそなえた圏を**サイト** (*site*, フランス語 *site*) （または**景**）とよぶ．

[*94] [Vis05] は出版版を確認していないので定理番号がずれるかもしれません…….
[*95] 記号が被覆空間の圏と重なってしまいました．当分被覆空間は出てこないと思うので誤解はないでしょう．
[*96] この条件を課さない文献もあるようです．

定義 12.3 (層)**.** $\mathcal{C}$ 上の（集合またはアーベル群または……の）前層 F が Grothendieck 前位相に関して層であるとは，任意の対象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ と任意の被覆 $(X_i \to X)_{i \in I}$ に対して

$$F(X) \to \prod_{i \in I} F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(X_i \times_X X_j)$$

が完全になることをいう．射 $F(X) \to \prod_{i \in I} F(X_i)$ の単射性のみ保証されている前層を**分離的** (*separated*) であるという．

12.3 前位相の例

例 12.4. S を位相空間とする．

(1) $\mathcal{C} = \mathrm{Open}(S)$ とし，$\mathsf{Cov}(X) = \{(X_i \to X)_{i \in I} \mid \bigcup_{i \in I} X_i = X\}$ とする．このとき層は通常の位相空間上の意味の層と一致する．

(2) $\mathscr{B}$ を S の開基で，有限個の元の共通部分で閉じているものとし，$\mathcal{C} = \mathscr{B}$ とし，$\mathsf{Cov}(X) = \{(X_i \to X)_{i \in I} \mid \bigcup_{i \in I} X_i = X\}$ は前項と同様に定める（もちろん各 X, X_i は $\mathscr{B}$ に属するもののみを考える）．このサイト上の層は $\mathscr{B}$ 層（定義 3.49）に他ならず，$\mathscr{B}$ 層は通常の層と等価なのだった（命題 3.50）．

(3) 前 2 項で，被覆として I が有限集合であるもののみをとることもできる．この場合層は何になるでしょうか？

(4) $\mathcal{C} = \mathcal{P}(S)$（冪集合）とし，$\mathsf{Cov}(X) = \{(X_i \to X)_{i \in I} \mid \bigcup_{i \in I} X_i = X$ かつ $X_i \subset X$ は開集合 $\}$ とする．参考：問題 12.4.

スキームに関する例を挙げよう．

定義 12.5. $\mathcal{C}$ をスキームの圏の部分圏で，有限ファイバー積で閉じているものとする．P を，$\mathcal{C}$ の射からなる集まりで，同型射を含み，合成と底変換で閉じているものとする．このとき，$(f_i \colon X_i \to X)_{i \in I}$ が P 被覆であるとは，各 f_i が P に属し，かつ $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Im}(f_i) = X$ であることをいう．P 被覆が定める $\mathcal{C}$ の前位相を P 位相とよぶ.

定義 12.6. S をスキームとし，P を開埋め込み（resp. エタール射）からなる集まりとし，$\mathcal{C}$ を S 上 P なスキームのなす圏とし，$\mathcal{C}$ に P 位相を入れたサイト S_{Zar}（resp. $S_{\text{ét}}$）を，S 上の *Zariski* **サイト** (*Zariski site*)（resp. **エタールサイト** (*étale site*) ）という.（正確には，small Zariski site などという.）

定義 12.7. 次のような被覆を考えることもある.

- fppf（fidèlement plat + présentation fini の略[*97]）：$(f_i \colon X_i \to X)_{i \in I}$ が fppf 被覆であるとは，各 f_i が平坦かつ局所有限表示であり，かつ $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Im}(f_i) = X$ であることをいう.
- fpqc（qc は quasi-compact の略）：$(f_i \colon X_i \to X)_{i \in I}$ が fpqc 被覆であるとは，各 f_i が平坦であり，また，任意のアフィン開集合 $U \subset X$ に対して有限個の添字 $i_1, \ldots, i_n$ とアフィン開集合 $V_j \subset U_{i_j}$ が存在して，$\bigcup_{j=1}^{n} f_{i_j}(V_j) = U$ であることをいう.

注 12.8. 同じ圏上の前位相 E, E' に対し，E での被覆がすべて E' での被覆でもあるときに E' は E より強

[*97] 英語に直訳すると faithfully flat + finite presentation です，名前の割に有限表示でなく局所有限表示を課していますが…….

い[*98]ということにする．このとき E' に関する層は E に関しても層である．Zariski 被覆はエタール被覆であり，エタール被覆は fppf 被覆であり，fppf 被覆は fpqc 被覆である（有限性の証明は，平坦かつ局所有限表示ならば開写像である（定理 5.53）ことを使う）ので，この順に強弱関係がある．

注 12.9. 位相空間の場合と違い，圏が小さくないので，後ほど（チェックコホモロジーや層化で）被覆に関する極限をとるときに集合論的困難が生じる．Zariski, étale, fppf 位相においては次が成り立つ（被覆は "あまり多くない"）ので集合論的困難を回避できる：任意のスキーム X に対し，X の被覆からなる集合 $\mathcal{F}$ が存在し，任意の被覆 $\mathcal{U}$ に対し，ある $\mathcal{V} \in \mathcal{F}$ が存在し，$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ を細分する．

fpqc 被覆に関してはこの条件が成り立たないので，この方法では困難を回避できない．Stacks Project [SP, Tag 022A] ではそのため「fpqc サイト」は導入せず，前層が「fpqc 被覆に関して層の条件を満たす」という言い方にとどめている．

さて，任意のエタール被覆に関して層の条件を満たすことを確かめるには，次の 2 種類の被覆について考えれば十分である．

命題 12.10. 前層 P がエタール位相（resp. fpqc 位相）に関し層であることは次の 2 条件を満たすことと同値である．

(1) Zariski 被覆（各 $V_i \to U$ が開埋め込みである被覆 $(V_i \to U)$）に対し層の条件を満たす．
(2) アフィンスキームの間のエタール（resp. 平坦）な全射 1 つからなる被覆 $(V \to U)$ に対し層の条件を満たす．

証明. エタール位相に関しては例えば [Mil80, Proposition 1.5] を，fpqc 位相に関しては例えば [SP, Tag 022H] を見てください． □

例 12.11. 前層 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_U(U)$（右辺の $\mathcal{O}_U$ はスキームの通常の構造層）で定めると，これは fpqc 位相に関して（したがってエタール位相などに関しても）層をなす．実際，Zariski 被覆に関する条件は明らかに成り立ち，アフィンスキームの間の平坦射に関する条件は問題 12.5 で示される．

より一般に次が成り立つ（下で $Z = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t]$ とすれば，$\operatorname{Hom}(U, Z) = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[t], \mathcal{O}_U(U)) = \mathcal{O}_U(U)$（命題 4.17）なので例 12.11 を得る）．

定理 12.12 ([SP, Tag 023Q])**.** fpqc 被覆は strict epi 射である．すなわち，任意のスキーム Z と任意の fpqc 被覆 $(U_i \to U)$ に対し，

$$\operatorname{Hom}(U, Z) \to \prod_i \operatorname{Hom}(U_i, Z) \rightrightarrows \prod_{i,j} \operatorname{Hom}(U_{ij}, Z)$$

は差核図式である．したがって，任意のスキーム Z に対し，前層 $Z = \operatorname{Hom}(-, Z)\colon U \mapsto Z(U) = \operatorname{Hom}(U, Z)$ は fpqc 被覆に関して層の条件を満たし，とくに，fppf サイトやエタールサイト上の層になる．

[*98] 等号を含めた不等号の意味だと思ってください．

12.4 Grothendieck 位相

定義 12.13 (**篩** (*sieve*, フランス語 *crible*) , [SGA4, Définition I.4.1]). 圏 $\mathcal{C}$ の篩とは，$\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{D}$ であって，次の条件を満たすものをいう：$c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ に対し，射 $c \to d$ が存在するならば $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$.

$\mathcal{C}$ の対象 X の篩とは，圏 $\mathcal{C}/X$ の篩をいう（したがって，X の篩は X への射の集まりである）[*99].

定義 12.14 (篩). $\mathcal{C}$ 上の集合の前層の圏を $\hat{\mathcal{C}}$ で表す.（定理 7.37 より，$\mathcal{C}$ の対象 X に前層 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ を対応する関手（米田埋め込み）は忠実平坦だった.）$\mathcal{C}$ の対象 X の篩とは，$\hat{\mathcal{C}}$ における X の部分対象である.

定義 12.13 と定義 12.14 は同値である（問題 12.1：篩 R に前層 $V \mapsto \{f\colon V \to X \mid V \in R\}$ が対応する.）

例 12.15. 射の族 $\mathcal{U} = \{U_i \to X\}$ に対し，$X \in \hat{\mathcal{C}}$ の部分対象 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}(V) := \{f\colon V \to X \mid \exists i,\ f$ は U_i を経由する $\}$ で定める．これにより射の族（とくに射）を篩とみなす.

射 $\mathrm{id}\colon X \to X$ が与える篩を単に X と書き，これを最大篩とよぶ.

定義 12.16 (篩の引き戻し). R を X の篩とし，$f\colon Y \to X$ を射とするとき，$\hat{\mathcal{C}}$ におけるファイバー積 $R \times_X Y$ は Y の篩となり，これを R の Y への引き戻しという．射の集まりとしては，$R \times_X Y$ は $\{g\colon V \to Y \mid f \circ g \in R\}$ に等しい.

定義 12.17 (Grothendieck 位相，[SGA4, Définition II.1.1]). $\mathcal{C}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ 上の Grothendieck 位相とは，各対象 X に対して X の篩からなる集合 $J(X)$ が定まっており，次の条件を満たすことをいう.

- 底変換で保たれる．すなわち，任意の対象 X と，任意の篩 $R \in J(X)$ と，任意の射 $Y \to X$ に対し，篩 $R \times_X Y$ は $J(Y)$ に属する.
- 局所性．すなわち，X の篩 R, R' に対し，$R \in J(X)$ でありかつ任意の対象 Y と任意の射 $Y \to R$ に対し $R' \times_X Y \in J(Y)$ ならば，$R' \in J(X)$ である.
- $X \in J(X)$.

$J(X)$ の元のことを X の *covering sieve* とよぶ.

なお,「R に属する射 $Y \to X$」のことを「$Y \to R$」と書いている.

命題 12.18. covering sieve を部分圏／部分対象として含む sieve は covering sieve である.

証明は演習問題とする（問題 12.2).

定義 12.19. $\mathcal{C}$ は 2 つの対象のファイバー積をもつ圏とし，$\mathsf{Cov}(X)$ を前位相（定義 12.1）とする．前位相から位相が次のように定まる：被覆 $\mathcal{X} = (X_i \to X)_{i \in I} \in \mathsf{Cov}(X)$ から例 12.15 により得られる篩を $R(\mathcal{X})$ とおく．$J(X) = \{R \mid \exists \mathcal{X} \in \mathsf{Cov}(X), R(\mathcal{X}) \subset R\}$ と定める.

命題 12.20. これは実際に位相を定める．さらに，前層 $\mathcal{C}$ 上の前層に対し，前位相に関して層（定義 12.3）になることと位相に関して層（定義 12.21）になることは同値である（すなわち，層の概念は一致する).

[*99] 圏 $\mathcal{C}/X$ の定義は例 7.4(15) を見てください.

証明は演習問題とする（問題 12.3）．

定義 12.21. 前層 $F \in \hat{\mathcal{C}}$ が位相 $\mathcal{T}$ に関して層であるとは，任意の対象 X と covering 篩 $R \in J_{\mathcal{T}}(X)$ に対し $F(X) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(R, F)$ が全単射であることをいう．

単射のみ保証されている前層を**分離的** (*separated*) であるという．

例 12.22. $\mathcal{C}$ を通常の位相空間 S の開集合系から定まる圏 $\mathrm{Open}(S)$ とし，$\mathcal{T}$ として通常の被覆篩のなす族（$R \in J_{\mathcal{T}}(X) \iff \bigcup_{U \in R} U = X$）を考えると，条件は「各 $U \in R$ に対して $F(U)$ の元が定まっており包含写像と可換ならば，$F(X)$ の元を一意的に誘導する」ことであり，通常の意味の層と一致する．

定義 12.2 で述べたように，Grothendieck 位相をそなえた圏をサイトとよぶ．

定義 12.23. サイト上の集合の層の圏（に同値な圏）を**トポス** (*topos*) という．

余談 12.24. 一点位相空間上の集合の層の圏は集合の圏に他ならない．トポスは集合の圏の一般化と思える．と聞きました．

演習問題

問題 12.1. X を圏 $\mathcal{C}$ の対象とする．X の篩 R（定義 12.13）に対し，$V \mapsto \{f \colon V \to X \mid f \in R\}$ は X の篩（定義 12.14）になることを示し，この対応により両定義が同値であることを示せ．

問題 12.2 (【難しい】)**.**

(1) R' を X の篩とする．任意の射 $Y \to R'$ に対し，篩 $R' \times_X Y$ は最大篩 Y に一致することを示せ．
(2) $\mathcal{T} = (J_{\mathcal{T}}(X))$ を圏 $\mathcal{C}$ の Grothendieck 位相とする．R, R' が X の篩で，$R \subset R'$ であり，$R \in J_{\mathcal{T}}(X)$ のとき，$R' \in J_{\mathcal{T}}(X)$ であることを示せ．

問題 12.3 (☆【難しい】)**.** 定義 12.19 により，前位相が位相を定めることを確認せよ．また，前層が前位相に関して層になることと位相に関して層になることが同値であることを示せ．

問題 12.4. X を位相空間とし，F を X 上の集合やアーベル群の（通常の意味の）層とする．冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を包含順序で圏とみなし，$\mathcal{P}(X)$ 上の前層 F' を $U \in \mathcal{P}(X)$ に対して $F'(U) = \varprojlim_{V \in \mathrm{Open}(X), V \subset U} F(V)$ とすることで定める．

(1) 圏 $\mathcal{P}(X)$ 上の前位相を次で定める：$\mathcal{P}(X)$ の射の族 $(U_i \to U)_{i \in I}$ が被覆であるとは，$\bigcup_{i \in I} U_i = U$ を満たすことである．このとき，一般に F' はこの前位相に関して層にならないことを示せ．
(2) 次に，圏 $\mathcal{P}(X)$ 上の前位相を次で定める：$\mathcal{P}(X)$ の射の族 $(U_i \to U)_{i \in I}$ が被覆であるとは，各 U_i が U の開集合であり，かつ $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ を満たすことである．ただし U には位相空間 X の部分空間としての誘導位相を入れる．このとき F' が層であることを示せ．

この例が示唆するように，単に集合論的被覆であることより強い条件を被覆に課すと都合がよいことが多い．

問題 12.5 (☆忠実平坦降下)**.** 環の射 $f \colon A \to B$ は忠実平坦だとする．A 加群の複体 $0 \to A \xrightarrow{d_0} B \xrightarrow{d_1} B \otimes_A B$ を，$d_0 = f, d_1 = i_1 - i_2$ で定める．（i_1, i_2 は $i_1(b) = b \otimes 1$, $i_2(b) = 1 \otimes b$ で定める．）この複体が完

全であることを示したい．

(1) f がセクション（A 加群の射 $s\colon B \to A$ で $s \circ f = 1_A$ を満たすもの）をもつという仮定の下で，完全性を示せ．
(2) 環の忠実平坦な射 $g\colon A \to C$ で，$f_C := 1_C \otimes f\colon C \to C \otimes_A B$ がセクションをもつものが存在することを示せ．
(3) 完全性を示せ．

13 エタールコホモロジー

参考文献：[SGA4], [SGA4 1/2], [Mil80], [FK88], [斎佐 12], あと日本語の解説として [三枝 09].（読んだことがないですが最近 [Fu15] というのも出たらしいです.）

13.1 動機

（この段落は 11.3 節の再掲です：)（準）連接層ではなく通常のアーベル群が定める定数層の Zariski 位相に関するコホモロジーはあまり面白い結果を与えない．一つの要因は Zariski 位相では開集合が少なすぎることである（既約スキーム上の定数層は flasque になってしまいコホモロジーは消える（命題 10.20)）．これを，エタール射を用いて，通常の位相空間ではなく Grothendieck 位相の枠組みで（少なくとも有限アーベル群に対しては）解決するのがエタールコホモロジーである：有限アーベル群係数の特異コホモロジーはエタールコホモロジーと一致する（定理 13.46)．

一方で，体上のエタール代数とは分離拡大体の直積に他ならないため，体上のガロア理論・ガロアコホモロジーの一般化にもなっている（13.5 節)．すでに 8 節でエタール基本群が位相空間の基本群（の副有限完備化）と体の絶対ガロア群両方の一般化になっていることを見ましたね．さらに，体 k 上の代数多様体 X に対し，$X \times_{\operatorname{Spec} \bar{k}} \operatorname{Spec} k$ のエタールコホモロジーには k の絶対ガロア群が作用する．すなわち**ガロア表現** (*Galois representation*) を得，このような表現を調べることで Weil 予想（13.9 節）をはじめとしたさまざまな応用がある．

13.2 エタール層の順像や逆像

本小節のあらすじ：位相空間上の層の順像や逆像とだいたいパラレルに話が進む．

定義 13.1. エタールサイト $X_{\text{ét}}$（定義 12.6）上のアーベル群の層の圏 $\mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ の対象をスキーム X 上の**エタール層** (*étale sheaf*) という．同様にエタール前層の圏 $\mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ を定める．

以下，単に（前）層といったらアーベル群のエタール（前）層をいう．

命題 13.2. Ω が分離閉体で $X = \operatorname{Spec} \Omega$ のとき，$\mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ はアーベル群の圏に同値である．X 上の集合のエタール層の圏は集合の圏に同値である．

証明. $\operatorname{Spec} \Omega$ へのエタールな射は $\operatorname{Spec} \Omega$ の直和しかない．したがってエタール層はその大域切断から定まる． □

定義 13.3. X の幾何的点 $\bar{x} = \operatorname{Spec}\Omega \to X$（定義 8.15）の**エタール近傍** (*étale neighborhood*) とは，$X_{\text{ét}}$ の対象 $U \to X$ とスキームの射 $\operatorname{Spec}\Omega \to U$ の合成への分解をいう．

$F \in \mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ をエタール前層とする．$\bar{x}$ のエタール近傍 U にわたる順極限 $\varinjlim_U F(U)$ を $F_{\bar{x}}$ と書き F の**茎** (*stalk*) という．

注 13.4. 任意の（スキームとしての）点 $x \in X$ に対し，それを像とする幾何的点が存在する．実際，x での剰余体の分離閉包をとればよい．

余談 13.5. 一般にトポスに対して**点** (*point*) が定義され，命題 13.2 より，幾何的点はエタールトポス（エタール層の圏）における点になっている．トポスが「射 f が同型 $\iff$ 任意の点 x に対して f_x が同型」を満たすとき *has enough points* といい，エタールトポスはこの条件を満たす．点をもたない非自明なトポスも存在すると聞きました．

注 13.6. （本講義では直接登場しないが,）局所環付き空間における点での局所環の類似として，幾何的点での**強ヘンゼル環** (*strictly Henselian ring*) がある．

定義 13.7 (順像)**.** $f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．f による順像 $f_*\colon \mathscr{P}(Y_{\text{ét}}) \to \mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ を $f_*F(U) = F(U \times_X Y)$ で定める．

命題 13.8. エタール層の順像はエタール層になり，順像は関手 $f_*\colon \mathscr{S}(Y_{\text{ét}}) \to \mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ を定める．

証明. 位相空間上の場合と同様. □

定義 13.9 (チェックコホモロジー)**.** （cf. 定義 10.21, 10.22, 10.23）

エタール前層 F，対象 U，U の被覆 $\mathcal{U} = (U_i \to U)_{i\in I}$ に対し，位相空間の場合と同様に $C^p(\mathcal{U}, F)$, $\check{H}^p(\mathcal{U}, F)$ を定める．

U の被覆 $\mathcal{U} = (U_i \to U)_{i\in I}$, $\mathcal{V} = (V_j \to U)_{j\in J}$ に対し，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{U}$ への射とは，写像 $\sigma\colon J \to I$ と射の族 $(\alpha_j\colon V_j \to U_{\sigma(j)})_{j\in J}$ の組であって，合成 $V_j \to U_{\sigma(j)} \to U$ が $V_j \to U$ に一致するものをいう．（位相空間の開被覆の場合は σ を決めれば射の族は高々一意に定まるわけだが，一般のサイトでは射のとり方も一意でないことがある．）射 $\sigma = (\sigma, (\alpha_j))$ に対して $\sigma^*\colon C^p(\mathcal{U}, F) \to C^p(\mathcal{V}, F)$ が自然に定まり，射 σ_1, σ_2 に対し σ_1^* と σ_2^* がホモトピー同値であることが分かり，とくにコホモロジー間の射 $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) \to \check{H}^p(\mathcal{V}, F)$ は（射が存在すれば）射のとり方によらずに定まる．両方向に射が存在する被覆を同値であるということにする．ここまでは一般のサイトで成立する．

U 上のエタール射の同型類の全体は集合をなし，任意のエタール被覆はこの集合の部分集合の形をした被覆と同値になるので，被覆の "同値類" 全体 $\overline{\mathsf{Cov}}(U)$ は集合をなす．そこで被覆の "同値類" に関する極限として $\check{H}^p(U, F) = \varinjlim_{\mathcal{U}\in\overline{\mathsf{Cov}}(U)} \check{H}^p(\mathcal{U}, F)$ を定める．

注 13.10. 位相空間上の前層のチェックコホモロジーと異なる点がいくつかある．

- 位相空間上では U' から U への射はつねに高々 1 つであったが，一般のサイト上ではこれは成り立たない．とはいえこれについては，（対象ではなく射の方に名前をつけるようにすれば）混乱する心配は少ない．
- 位相空間上では 2 つの射 $U_i \cap U_i \rightrightarrows U_i$ は一致し同型射だが，一般のサイト上では $U_i \times_U U_i \rightrightarrows U_i$ は一般に一致せず同型射でもない．

- 位相空間上の前層においては交代的コチェインを用いてチェックコホモロジーを計算できた．この証明（中のホモトピーの構成：問題 10.3 の略解参照）では前項の同型を使っているので，これは一般のサイト上では成り立たない．

定義 13.11 (層化)**.** 前層 P に対し，定義 3.35 と同様の普遍性を満たす層 $a(P)$ を P の層化という．言い換えると，層を前層とみなす忘却関手の左随伴を層化という．

命題 13.12. 層化は存在する．

証明. 証明を 2 つ与える．

1 つめの証明（[Art62, Theorem II.1.1] による）：被覆全体に関する集合論的困難を解決できるような Grothendieck 位相に適用できる．

関手 $+\colon \mathscr{P}(X_{\text{ét}}) \to \mathscr{P}(X_{\text{ét}})\colon P \mapsto P^+$ を，$P^+(U) := \check{H}^0(U,P) = \varinjlim_{\mathcal{U}\in\mathsf{Cov}(U)} \check{H}^0(\mathcal{U},P)$ で定める．自然変換 $\mathrm{id} \Longrightarrow +$ つまり自然な射 $P \to P^+$ があり，P が層ならばこの射は同型である．したがって，P から層への射はこの射を経由することが分かる．次を示せる（省略）ので，$P \to P^+ \to (P^+)^+ =: a(P)$ が層化である．

(1) P が前層ならば P^+ は分離的な前層である．
(2) P が分離的な前層ならば P^+ は層である．

2 つめの証明：命題 3.36 の証明で書いたものの一般化であり，エタール位相の場合（もう少し一般に，適切な点の概念および性質がある場合）に適用できる．

各点 $x \in X$ に対しその上の幾何的点 $i_x\colon \bar{x} \to X$ をとっておく．$P \to \prod_{x\in X}(i_{\bar{x}})_* P_{\bar{x}}$ が層への射になる．この射の像を含む最小の層をとればよい． □

定義 13.13 (逆像)**.** $f\colon Y \to X$ をスキームの射とする．順像の左随伴 $f^{\mathrm{p}}\colon \mathscr{P}(X_{\text{ét}}) \to \mathscr{P}(Y_{\text{ét}})$, $f^*\colon \mathscr{S}(X_{\text{ét}}) \to \mathscr{S}(Y_{\text{ét}})$ を逆像という．（すなわち，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}(Y_{\text{ét}})}(f^*F, G) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}(X_{\text{ét}})}(F, f_*G)$ が成り立つ．）

命題 13.14. エタール前層の逆像は存在する[*100]．

証明. $Q \in \mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ と $V \in Y_{\text{ét}}$ に対し，$f^{\mathrm{p}}Q(V)$ を，可換図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

を与える $U \in X_{\text{ét}}$ と射 $g\colon V \to U$ との組に対する $\varinjlim_{(U,g)} Q(U)$ として定める．これが随伴性を満たすことの証明は位相空間の場合（命題 3.40(1)）と同様である．

（エタールサイトの場合，$X_{\text{ét}}$ の対象の同型類は集合をなすので集合論的困難は生じないが，一般のサイトではもう少し注意が必要である．） □

命題 13.15. 前層としての逆像の層化が層の逆像を与える．

[*100] ちなみにこれは（左）Kan 拡張の例らしいです．

証明．位相空間の場合と同様． □

命題 13.16 (cf. 例 3.41，系 3.43，命題 3.44，系 10.5)．スキームの射 $f\colon Y \to X$ と Y の幾何的点 $\bar{y} \to Y$ に対し，X の幾何的点 $f(\bar{y})$ を合成射 $\bar{y} \to Y \xrightarrow{f} X$ として定める．X 上の層 F に対し，$(f^*F)_{\bar{y}} = F_{f(\bar{y})}$ である．前層についても同様である．

層の逆像は完全性を保つ．

X の幾何的点 $\bar{x}$ とエタール前層 P に対し，$P_{\bar{x}} \to (aP)_{\bar{x}}$ は同型である．

証明．位相空間の場合と同様．完全性は茎で判定できること（命題 13.20）を用いる． □

前層や層の射の核や余核，複体の完全性について，位相空間の場合と同様に次が成り立つ．

命題 13.17 (cf. 命題 10.1)．$\mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ はアーベル圏であり，核と余核は各 $U \in X_{\text{ét}}$ ごとに核と余核をとって並べたものである．$\mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ の射が同型射・モノ射・エピ射であることは，各 $U \in X_{\text{ét}}$ に対してそうであることと同値である．

命題 13.18 (cf. 命題 10.2)．$\phi\colon F \to G$ を $\mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ の射とする．

(1) ϕ がモノ射であることと，任意の $U \in X_{\text{ét}}$ に対し $\phi(U)\colon F(U) \to G(U)$ が単射であることは同値である．
(2) ϕ がエピ射であることと，任意の $U \in X_{\text{ét}}$ と任意の元 $g \in G(U)$ に対し，エタール被覆 $(U_i \to U)$ と元 $f_i \in F(U_i)$ が存在し，$\phi(f_i) = g|_{U_i}$ であることは同値である．
(3) ϕ が同型射であることと，任意の $U \in X_{\text{ét}}$ に対し $\phi(U)\colon F(U) \to G(U)$ が同型射であることは同値である．

略証．位相空間の場合と同様に，すなわち，核・余核の構成と同様にしてできる． □

命題 13.19 (cf. 命題 7.53(2))．$\mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ はアーベル圏であり，核は各 $U \in X_{\text{ét}}$ ごとに核と余核をとって並べたものであり，余核は $U \mapsto \operatorname{Coker}(f(U))$ の層化である．

証明．位相空間の場合と同様にできる． □

命題 13.20 (cf. 命題 10.3)．$\mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ の複体 $(F^\bullet, \phi^\bullet)$ が完全であることと，各幾何的点 $\bar{x}$ に対して $(F^\bullet_{\bar{x}}, \phi^\bullet_{\bar{x}})$ が完全であることは同値である．とくに，射がモノ射やエピ射や同型射であることは，各茎でそうであることと同値である．

証明．位相空間の場合と同様にできる． □

命題 13.21. $\mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ は入射的対象を十分もつ．

証明．幾何的点を用いて，位相空間上の層の圏と同様の証明ができる．各点 $x \in X$ に対しその上の幾何的点 $i_x\colon \bar{x} \to X$ をとっておく．

補題 10.11 より，$F_{\bar{x}} \hookrightarrow I_x$ なる入射的アーベル群 I_x をとれる．これの i_x による順像 $(i_x)_*F_{\bar{x}} \hookrightarrow (i_x)_*I_x$ も入射的対象へのモノ射であり，さらにこれを $x \in X$ に関して直積した $\prod_{x\in X}(i_x)_*F_{\bar{x}} \hookrightarrow \prod_{x\in X}(i_x)_*I_x$ も入射的対象へのモノ射である．モノ射 $F \hookrightarrow \prod_{x\in X}(i_x)_*F_{\bar{x}}$ と合成することで F を入射的対象へ埋め込めた． □

命題 13.22. 層の順像は入射的対象を保つ．

証明. 左随伴である逆像が完全なのでよい（命題 7.65）. □

命題 13.23. $\mathscr{P}(X_{\text{ét}})$ は入射的対象を十分もつ.

証明. エタールコホモロジーの教科書を見てください. □

最後に，スキームを閉集合とその補集合たる開集合の和集合で書いたときの層の “分解” について述べる.

命題 13.24. $i\colon Z \to X$ が閉埋め込みで，$x \in X$ が点，$\bar{x}$ が x の上にある X の幾何的点ならば，$(i_*F)_{\bar{x}} = \begin{cases} F_{\bar{x}} & (x \in Z), \\ 0 & (x \notin Z) \end{cases}$ である．とくに，i_* は完全である.

証明. $x \notin Z$ の場合は明らか．$x \in Z$ とすると，$\bar{x}$ は Z の幾何的点ともみなせる．$\bar{x}$ の X でのエタール近傍は i で引き戻すと Z でのエタール近傍になる．この形のエタール近傍が共終なことを示せばよい．エタール近傍 $U \to Z$ をとる．開部分スキームに制限することで，$U \to Z \to X$ は $\operatorname{Spec}(A/I)[x]/(P(x)) \to \operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ の形と仮定してよい．$P(x) \in (A/I)[x]$ のリフト $\tilde{P}(x) \in A[x]$ をとり $\tilde{U} = \operatorname{Spec} A[x]/(\tilde{P}(x))$ とおくと，$\tilde{U}$ は X でのエタール近傍であり $U = \tilde{U} \times_X Z$ である. □

定義 13.25 (エタール層の零延長，cf. 定義 3.45)**.** X をスキーム，$U \subset X$ を開部分スキーム，F を U 上の層とする．埋め込み写像を $j\colon U \to X$ と書く．X 上の層 $j_!F$ を，前層

$$(\phi\colon V \to X) \mapsto \begin{cases} F(V) & (\phi(V) \subset U) \\ 0 & (\phi(V) \not\subset U) \end{cases}$$

の層化として定義し，これを F の j による**零延長** (*extension by zero*) という.

命題 3.47 と同様の随伴性，命題 3.48 と同様の茎の記述が得られる．なお，もう少し一般の射に対して零延長を定義することもできるが，ここでは触れない.

命題 13.26 (cf. 命題 10.6)**.** X をスキーム，$Z \subset X$ を閉部分スキーム，$U = X \setminus Z$ とする（U は開部分スキームである[*101]）．包含写像を $i\colon Z \hookrightarrow X$, $j\colon U \hookrightarrow X$ と書くとき，任意の層 F に対し，随伴から定まる射の列 $0 \to j_!j^*F \to F \to i_*i^*F \to 0$ は完全である.

証明.（幾何的点での茎の挙動が同様なので）位相空間の場合と同様である. □

13.3 エタール層の例

例 13.27. 定理 7.35 で見たように，X 上のスキーム Y が表現する集合の前層 $\operatorname{Hom}_X(-, Y)$ はエタール層である.

集合 Λ に対し $\coprod_\Lambda X$ が表現する層は定数層 $\underline{\Lambda}$ である（単に Λ とも書く）．Λ がアーベル群ならば $\underline{\Lambda}$ はアーベル群の層である.

例 13.28. Y が X 上の群スキームならば $\operatorname{Hom}_X(-, Y)$ はアーベル群の層になる．（群スキームの定義は省略する.）基本的な例として次がある.

[*101] 開部分スキームは底集合のみから定まる一方，閉部分スキームはそうではないので，この順で定義すると紛れがない.

- $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} = X \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t]$ が表現する層 $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.
- $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} = X \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ が表現する層 $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$.
- $\mu_n := \operatorname{Ker}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{n} \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ が表現する層 $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)[n] = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*) \mid f^n = 1\}$.

$X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ の像が $\mathbb{Z}[1/n]$ に含まれるとき，n は X の標数と素であるという．（X が体 k 上の空でないスキームのときは，n が k の標数で割れないことと同値である[*102]．）

n が X の標数と素のとき，μ_n は定数層 $\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ とエタール局所的に同型である．実際，1 の原始 n 乗根があれば同型が作れるので，$X' = X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/n]} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/n][t]/(t^n - 1)$ まで行くと同型であり，$X' \to X$ はエタール被覆である．

命題 13.29. n が標数と素ならば，$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{n} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to 0$ は完全である．

証明. n の全射性を示す（それ以外は定義から明らか）．$U \in \operatorname{Obj}(X_{\text{ét}})$ と $f \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = \mathcal{O}_U(U)^*$ をとる．$U' := \mathcal{S}pec\, \mathcal{O}_U[t]/(t^n - f)$ とすると，n が標数と素で f が可逆なので $U' \to U$ はエタール被覆であり（例 5.59），$t \in \Gamma(U', \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ の n による像は $f|_{U'}$ である． □

注 13.30. $n \neq 0$ が標数と素でない場合（このとき上記の射 $U' \to U$ はエタールでない），上記の複体で n は一般にエピ射にならない（例えば，$U = X$ が代数閉でない分離閉体 k のスペクトルで $f \in k$ が p 乗根をもたない元のとき，エタール被覆としてとれるのは k の直積のスペクトルのみなので，どんな被覆でも n 乗の像にならない．）一方，上記の $U' \to U$ は平坦射ではあるので，fppf 位相の意味では完全になる．

13.4 エタールコホモロジー

定義 13.31. $U \in X_{\text{ét}}$ に対し，左完全関手 $\Gamma(U, -)\colon \mathscr{S}(X_{\text{ét}}) \to \{\mathrm{Ab}\}$ の右導来関手を $H^p_{\text{ét}}(U, -)$ で表し**エタールコホモロジー** (*étale cohomology*) とよぶ.

射 $f\colon Y \to X$ に対し，左完全関手 $f_*\colon \mathscr{S}(Y_{\text{ét}}) \to \mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ の右導来関手 $R^p f_*$ を**高次順像** (*higher direct image*) とよぶ.

位相空間の場合と同様に，次が成り立つ.

定理 13.32 (Leray スペクトル系列)**.** $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ がスキームの射の列のとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = R^p g_*(R^q f_*(-)) \Longrightarrow R^{p+q}(g \circ f)_*(-)$$

が存在する．

また，$f\colon Y \to X$ がスキームの射のとき，Leray スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_*(-)) \Longrightarrow H^{p+q}(Y, -)$$

を得る．

[*102] 「体の標数と素」という言い方にすると標数 0 のときほとんどの整数が該当しなくなってしまうので注意が必要です．……気にしない・別の解釈をする人も多いですが.

定理 13.33. スキーム X，エタール被覆 $\mathcal{U}$，エタール層 F に対し，次のスペクトル系列を得る．

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(\mathcal{U}, \mathscr{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, F)$$
$$E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \mathscr{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, F)$$

命題 13.34 (cf. 命題 10.14)**.** スキームの射 $f\colon Y \to X$ と層 $F \in \mathscr{S}(Y_{\text{ét}})$ に対し，$R^q f_* F$ は前層 $U \mapsto H^q_{\text{ét}}(U \times_X Y, F)$ の層化である．

13.5 エタールコホモロジーとガロアコホモロジー

分離閉体上のエタール層については簡潔な表示（アーベル群の圏との圏同値）があった．一般の体の場合を考える．K を体とし，$\bar{K}$ を分離閉包とし，$G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ とし，$X = \operatorname{Spec} K$ とする．

命題 13.35. このとき，$F \in \mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ に対し，有限次分離拡大 L/K にわたる $\varinjlim_L F(\operatorname{Spec} L)$ を対応させることで圏同値 $\mathscr{S}(X_{\text{ét}}) \to \{\text{discrete } G\text{-modules}\}$ を得る．逆の対応は M に対し $F(\operatorname{Spec} L) = M^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)}$ である．

なお，G 加群 M が**離散** (*discrete*) であるとは，各元 $m \in M$ に対し $\mathrm{Stab}(m) \subset G$ が開部分群であることをいう．

証明. $X_{\text{ét}}$ の対象は K の有限次分離拡大体 L の Spec の直和なので，$F \in \mathscr{S}(X_{\text{ét}})$ はそのような $\operatorname{Spec} L$ での値から定まる．記号を簡単にするため $F(L) := F(\operatorname{Spec} L)$ と書く．命題 12.10 を適用し，もう少し議論すると，層を与えることは，K の有限次分離ガロア拡大体 L に対する $\mathrm{Gal}(L/K)$ 加群 $F(L)$ の族であって被覆 $\operatorname{Spec} L' \to \operatorname{Spec} L$ に対応する列

$$F(L) \to F(L') \rightrightarrows F(L' \otimes_L L')$$

が完全であるものを与えることと等価であることが分かる．同型 $L' \otimes_L L' \cong \prod_{\mathrm{Gal}(L'/L)} L'$ から，右側の対象は $F(L')^{\oplus \mathrm{Gal}(L'/L)}$ に同型であり，2 つの射は $F(L')$ の対角埋め込みと tautological な埋め込み（つまり，$f \in F(L')$ に対しそれぞれ $(f)_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/L)}$ と $(\sigma(f))_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/L)}$ を対応させる）である．すなわち，条件は $F(L) = F(L')^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ に同値である．

離散 G 加群 M は，上記の（ガロアな）各 L に対する $\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$ 不変部分を並べることで，各 L に対する $\mathrm{Gal}(L/K)$ 加群の族 (N_L) であって L'/L に対し $N_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} = N_L$ を満たすものと一対一に対応する（逆は $\varinjlim_L N_L$ で与えられる）． □

系 13.36. 命題 13.35 で対応する F と M に対し，$H^p_{\text{ét}}(X, F) \cong H^p(K, M)$ が成り立つ．（右辺は群コホモロジー $H^p(G, M)$（例 9.7(7)）を表す．）

証明. 両辺は次の可換図式で下向きの関手の右導来関手である．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}(X_{\text{ét}}) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, "\Gamma(\operatorname{Spec} K, -)"'] & & \{\text{discrete } G\text{-modules}\} \arrow[dl, "_^{G}"] \\
& \{\mathrm{Ab}\} &
\end{tikzcd}$$

□

余談 13.37. すなわち，エタールコホモロジーの理論はガロアコホモロジーを包含する．（だからといってガロアコホモロジーを勉強しなくていいわけではない．むしろ，エタールコホモロジーを調べるためにガロアコホモロジーの結果が必要だということが次小節で早速分かる．）

次に，エタールコホモロジーからガロア表現（体の絶対ガロア群の表現）を得ることを説明する．k を体，$\bar{k}$ をその分離閉包（代数閉包でもよい）とし，X を k 上の代数多様体とする．このとき $G := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ は $X_{\bar{k}} := X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, \bar{k}$ に作用し，したがって（任意の i, n, r に対し）$H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ に作用する．

余談 13.38. なお，なぜわざわざ $\bar{k}$ に底変換して考えるかですが，以下の意味で自然な対象だと考えられます．体 k 上の代数多様体 $f\colon X \to \mathrm{Spec}\, k$ のことを知りたいとしよう．そのために X 上の定数層 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のコンパクト台付き高次順像 $R^i f_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を知りたい[*103]．命題 13.35 の対応と，コンパクト台付き高次順像が底変換と交換すること[*104]から，$f_{\bar{k}}\colon X_{\bar{k}} \to \mathrm{Spec}\, \bar{k}$ によるコンパクト台付き高次順像 $R^i(f_{\bar{k}})_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$——すなわちコンパクト台付きコホモロジー $H^i_{\text{ét,c}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$——とその上のガロア群の作用を考えればよい．

13.6 代数閉体上の曲線上の定数層のコホモロジーの計算

X 上の局所自由階数 1 準連接層のことを**可逆層** (*invertible sheaf*) といい，それらがテンソル積に関してなす群を *Picard* **群** (*Picard group*) といい $\mathrm{Pic}(X)$ と書く．X が既約で k 上滑らかならば，これは $k(X)^*$ から因子の群 $\mathrm{Div}(X)$ への射の余核に同型である．$\mathrm{Div}(X)$ は X の余次元 1 の点全体の集合 $|X|^1$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．詳しくは代数幾何の教科書を見てください．

この小節で体 k 上の曲線とは k 上有限型で 1 次元で整なものとする．

命題 13.39. k を代数閉体，X を k 上固有滑らかな曲線とすると，

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = \begin{cases} k^* & (i = 0), \\ \mathrm{Pic}(X) & (i = 1), \\ 0 & (i \neq 0, 1) \end{cases}$$

が成り立つ．

系 13.40. k を代数閉体，X を k 上固有滑らかな種数 g の曲線，n を $\mathrm{char}\, k$ で割れない整数とすると，

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mu_n) = \begin{cases} \mu_n(k) & (i = 0), \\ \mathrm{Pic}(X)[n] & (i = 1), \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & (i = 2), \\ 0 & (i \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

が成り立ち，$\mathrm{Pic}(X)[n]$ は階数 $2g$ の自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群である．

注 13.41. $\mu_n(k)$ と $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ はアーベル群としては（非標準的に）同型だが，ガロア表現としては一般に非同型なので区別して書いている．

[*103] コンパクト台付き高次順像についてはエタールコホモロジーの教科書を見てください．なお f が固有ならば高次順像 $R^i f_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に一致します．また，下が分離閉体ならばコンパクト台付きコホモロジーになります．

[*104] これもエタールコホモロジーの教科書を見てください．

命題 *13.39* の証明. X の余次元 1 の点（いま X は 1 次元なのですなわち閉点）全体の集合を $|X|^1$ と書き，各 $x \in |X|^1$ に対し $\iota_x\colon \{x\} \to X$ と書く．X の生成点を η と書き，$j\colon \{\eta\} \to X$ と書く．X 上のエタール層の完全列

$$0 \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to j_*\mathbb{G}_{\mathrm{m},\eta} \to \prod_{x \in |X|^1} (\iota_x)_*\mathbb{Z} \to 0$$

がある[*105]．ただし右の射は $j_*\mathbb{G}_{\mathrm{m},\eta}$ の切断すなわち有理関数に対し各閉点での零点の位数を対応させる射である．これが完全であることの証明は難しくない．

この完全列が誘導するコホモロジー長完全列を考えて，$H^i_{\text{ét}}(X, j_*\mathbb{G}_{\mathrm{m},\eta}) = 0$ ($i \geq 1$) と $H^i_{\text{ét}}(X, (\iota_x)_*\mathbb{Z}) = 0$ ($i \geq 1$) を示せばよい．

後者については，ι_x が閉埋め込みなので $(\iota_x)_*$ は完全であり（命題 13.24），したがって $R^q(\iota_x)_* = 0$ ($q > 0$) である．したがって Leray スペクトル系列より $H^p_{\text{ét}}(X, (\iota_x)_*\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^p_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\kappa(x), \mathbb{Z})$ である．$\kappa(x) = k$ は代数閉体なので右辺は $p > 0$ で 0 である．

前者については，Tsen の定理（定理 13.42）を用いる．命題 13.34 より $R^q j_*\mathbb{G}_{\mathrm{m},\eta} = a(U \mapsto H^q_{\text{ét}}(U \times_X \eta, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}))$ であり，$U \times_X \eta$ は 1 変数関数体のスペクトルの直和なので Tsen の定理より右辺は $q > 0$ で消滅する．したがって Leray スペクトル系列より $H^p_{\text{ét}}(X, j_*\mathbb{G}_{\mathrm{m},\eta}) \xrightarrow{\sim} H^p_{\text{ét}}(\eta, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ であり，右辺は再び Tsen の定理より $p > 0$ で消滅する． □

定理 13.42 (Tsen の定理（の帰結，例えば [Ser95, Section II.3] を見よ）)**.** *k が代数閉体で，K が k 上の 1 変数関数体（$k(t)$ の有限次拡大体）ならば，$i > 0$ に対し $H^i(K, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 0$ である．*

正確には，Tsen の定理を用いるのは $i \geq 2$ に対する消滅であり，$i = 1$ の場合は一般の体で成り立つ (Hilbert 90)．

系 *13.40* の証明. 完全列 $0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{n} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to 0$（命題 13.29）の長完全列を考えて，命題 13.39 を適用し，固有な曲線の Picard 群に関する次の事実を用いればよい． □

命題 13.43. *k を代数閉体，X を k 上固有滑らかな種数 g の曲線とすると，アーベル群の完全列 $0 \to \operatorname{Pic}^0(X) \to \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$ があり，k の標数と素な任意の整数 n に対し，$\operatorname{Pic}^0(X)$ 上の n 倍写像は全射で核は $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ に同型である．*

証明. このとき $\operatorname{Pic}^0(X)$ は g 次元アーベル多様体の k 値点全体のなす群になる．詳しくはアーベル多様体・ヤコビ多様体の教科書を見てください． □

定義 13.44. n を標数と素な整数とする．整数 r に対し，（局所自由階数 1 の）$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群の層 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)$ を

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r) := \begin{cases} \mu_n^{\otimes r} & (r > 0), \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & (r = 0), \\ \mathcal{H}om(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-r), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & (r < 0) \end{cases}$$

で定める．また，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群の層 F に対して，$F(r) := F \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)$ と定め，これを F の *Tate* **捻り** (*Tate twist*) とよぶ．

1 の原始 n 乗根があれば $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ なので（ただしガロア表現としては異なる），$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群の層に対し Tate 捻りはコホモロジーと交換する．したがって，系 13.40 から直ちに次を得る．

[*105] 一般次元の場合に一般化することを考えると閉点ではなく余次元 1 の点として記述した方がよかったかもしれない．

系 13.45. k を代数閉体，X を k 上固有滑らかな種数 g の曲線，n を $\operatorname{char} k$ で割れない整数とすると，

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & (i = 0), \\ \operatorname{Pic}(X)[n](-1) & (i = 1), \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)(k) & (i = 2), \\ 0 & (i \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

が成り立ち，$\operatorname{Pic}(X)[n](-1)$ は階数 $2g$ の自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群である．

13.7 エタールコホモロジーと特異コホモロジーの比較

定理 13.46. X を $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 上の滑らかなスキームとする．このとき，エタールコホモロジー $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n)$ と特異コホモロジー $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$ は自然に同型になる．

注 13.47. この定理に限らず，エタールコホモロジーは torsion でない層についてはうまく行かない．例えば X が正規スキームならば任意の $i > 0$ に対して $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}) = 0$ となってしまう [Den88, Theorem 2.1]（もちろん複素多様体の特異コホモロジーではそうとは限らない）．

略証．まず主張をコンパクト台付きコホモロジーに関する主張に帰着する（詳細略）（X が固有ならばコホモロジーとコンパクト台付きコホモロジーは一致する）[*106]．

数学における基本的なテクニックとして「帰納的な証明ができるように主張を（適宜強めて）定式化する」がある．この定理の場合，「コンパクト台付きコホモロジーに関する主張をコンパクト台付き高次順像に関する主張に言い換える」「定数層に関する主張を，定数層を含み諸々の操作（適切な順像や逆像など）で閉じている層のクラスである**構成可能層**（*constructible sheaf*）に関する主張に一般化する」ことになる．その一般化した主張を，ネーター帰納法や，開集合と閉集合への分解 $X = U \cup Z$ に対する命題 13.26 を使って，X および F が扱いやすいものである場合に帰着していく．最終的に，X が $\mathbb{C}$ 上固有滑らかな曲線で $F = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である場合に帰着できて，この場合のコホモロジーは代数側では系 13.45 で計算しており，解析側も同様の結果を得るので，$\operatorname{Pic}(X) \cong \operatorname{Pic}(X^{\text{an}})$ から同型が従う． □

この他エタールコホモロジーに関する基本的な定理がいろいろある．少しだけ紹介する．

定理 13.48 (エタールコホモロジーの有限性)**.** X を分離閉体 k 上の有限型のスキームとし，n を $\operatorname{char}(k)$ で割れない整数とする．$d = \dim X$ とおく．このとき $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は有限であり，$0 \leq i \leq 2d$ の外では 0 である．

これの証明も定理 13.46 と同様の方針で行われる．$\mathbb{C}$ 上 d 次元多様体の場合，実多様体としては $2d$ 次元なので特異コホモロジーが $2d$ より上で消える（$2d$ 次は一般に消えない）のは辻褄が合う．

定理 13.49 (Poincaré 双対)**.** 定理 13.48 の仮定に加えて，X が固有滑らか連結とする．

(1) 自然な同型 $H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)$ がある．
(2) 各 i に対し，$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times H^{2d-i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \xrightarrow{\cup} H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は perfect pairing である．ここで $\cup$ はカップ積（定義は省略）である．

[*106] 正確には，高次順像 $R^i f_*$ に関する主張をコンパクト台付き高次順像 $R^i f_!$ に関する主張に帰着する．

証明. エタールコホモロジーの教科書を見てください. □

13.8 l 進層，l 進コホモロジー

k 上の代数多様体 X に対し，$X_{\bar{k}}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーは $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ の表現になることを 13.5 節の最後で見た．一方で注 13.47 で述べたように，torsion でない層のエタールコホモロジーはあまりよい性質をもたない．とはいえ，torsion 係数ではなく標数 0 の体を係数とするガロア表現が得られると便利である（応用を 13.9 節で与える)．そこで以下のように l 進層を導入し，l **進表現** (*l-adic representation*) を構成する．l を素数とし，簡単のため l は標数と素とする．

定義 13.50 ($\mathbb{Z}_l$ 層，$\mathbb{Q}_l$ 層)**.** $\mathbb{Z}_l$ 層とは，（アーベル群の）（エタール）層の逆系 $(F_n)_{n\geq 1}$ で，$l^n F_n = 0$, $F_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} F_n$ を満たすものである．

$\mathbb{Q}_l$ 層のなす圏を次で定める：対象は $\mathbb{Z}_l$ 層で，射は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_l}(F, G) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(F, G) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$.

$\mathbb{Z}_l$ 層または $\mathbb{Q}_l$ 層のことを l **進層** (*l-adic sheaf*) ともいう（どちらをさすのかよく分かっていません)．

基本的な例として $\mathbb{Z}_l$ 層 $\mathbb{Z}_l(r) := (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(r))_n$ や $\mathbb{Q}_l$ 層 $\mathbb{Q}_l(r) := \mathbb{Z}_l(r)$ がある．

コホモロジーの逆極限と逆系の圏上の導来関手とは一般に一致しないので，$\mathbb{Z}_l$ 層や $\mathbb{Q}_l$ 層のコホモロジーをどう定義するかが問題になるが，良い条件（例えば任意の i と任意の n で $H^i_{\text{ét}}(X,\ F_n)$ が有限ならよい）の下では $H^i_{\text{ét}}(X, (F_n)) = \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, F_n)$ と思ってよい．したがって例えば X が標数が l と異なる分離閉体上有限型ならば $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(r)) = \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(r))$ と思ってよい．$\mathbb{Q}_l$ 層のコホモロジーは $\mathbb{Z}_l$ 層としてのコホモロジーに $\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l$ することで定める．

余談 13.51. torsion でない層に対するエタールコホモロジーのうまくいかなさも，$\mathbb{Q}_l$ 層の回りくどい定義も，pro-étale 位相 [BS15] により解消できるらしいですよ？

13.9 合同ゼータ関数と Weil 予想

歴史については [FK88, Introduction] も参照してください．

q を素数の冪とし，X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上有限型のスキームとする．このとき，任意の $n \geq 1$ に対し，$\mathbb{F}_{q^n}$ 値点の集合 $X(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_{q^n}, X)$ は有限集合である．数列 $(\#X(\mathbb{F}_{q^n}))_n$ を調べるために次の母関数を導入する．

定義 13.52. X の**合同ゼータ関数** (*congruent zeta function*) を，形式冪級数として

$$Z(X, t) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \#X(\mathbb{F}_{q^n}) \frac{t^n}{n}\right)$$

で定める．

注 13.53. このゼータは Riemann ゼータと統一的に記述できる．一般に $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム X に対し，そのゼータ関数を $\zeta(X, s) = \prod_{x \in |X|_0} (1 - |\kappa(x)|^{-s})^{-1}$ で定める．なお $|X|_0$ は閉点全体の集合を表し，仮定より閉点での剰余体は有限である．($\Re(s) > \dim X$ で収束するらしい [Ser65].）X が $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ や一般に代数体の整数環のときこれは Riemann ゼータ関数や Dedekind ゼータ関数に一致し，一方 X が $\mathbb{F}_q$ 上有限型のとき $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$ となる（問題 13.2)．

例 13.54. X がアフィン空間 $\mathbb{A}^d = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d]$ ならば，$\#X(\mathbb{F}_{q^n}) = \#((\mathbb{F}_{q^n})^d) = q^{nd}$ なので，$Z(\mathbb{A}^d, t) = \exp(\sum_{n \geq 1} q^{nd} t^n / n) = \exp(-\log(1 - q^d t)) = \frac{1}{1-q^d t}$ である．

X が射影空間 $\mathbb{P}^d = \operatorname{Proj} \mathbb{F}_q[x_0, \dots, x_d]$ ならば，$\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_{q^n}) = \coprod_{0 \leq e \leq d} \mathbb{A}^e(\mathbb{F}_{q^n})$ なので，$Z(\mathbb{P}^d, t) = \exp(\sum_{n \geq 1} \sum_{0 \leq e \leq d} q^{ne} t^n / n) = \exp(-\sum_{0 \leq e \leq d} \log(1 - q^e t)) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^d t)}$ である．

例 13.55. X が楕円曲線（種数 1 の固有滑らかな曲線）ならば，いろいろあって次が分かる（例えば [Sil86, Theorem V.2.4]）：代数的整数 α, β が存在し次を満たす．

- $\#X(\mathbb{F}_{q^n}) = 1 - (\alpha^n + \beta^n) + q^n$ であり，したがって $Z(X, t) = \frac{(1-\alpha t)(1-\beta t)}{(1-t)(1-qt)}$ である．
- 任意の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ に対し，α, β は複素絶対値 $q^{1/2}$ である．
- $\alpha + \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Z}$ であり，$\alpha\beta = q$ である．

ちなみに，$\alpha + \beta$ が p で割れない（resp. 割れる）ことと楕円曲線が通常（resp. 超特異）（注 8.25）であることは同値である．

系として，有理点の個数に関する不等式評価 $|\#X(\mathbb{F}_{q^n}) - (q^n + 1)| \leq 2\sqrt{q^n}$ を得る．

余談 13.56 (佐藤–Tate 予想)**.** E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とすると，有限個を除きすべての素数 p に対し，E の標数 p 還元 E_p（$\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線）が定まる．$|\#E_p(\mathbb{F}_p) - (p + 1)| = 2\sqrt{p} \cos\theta_p$ により $\theta_p \in [0, \pi]$ を定める．佐藤–Tate 予想とは，E が虚数乗法をもたない楕円曲線ならば，$(\theta_p)_p$ の分布は $\sin^2$ であるというものである．保型表現の理論と密接なかかわりがあり，近年（若干の仮定の下で）証明された．

ここまでの例では，合同ゼータ関数は定義（母関数表示，無限赤表示）からすぐには想像できない簡潔な形になっている．実は一般に次が成り立つ．

定理 13.57 (Weil 予想)**.** X は固有滑らかな $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体とする．このとき次が成り立つ．

- $Z(X, t)$ は t の有理関数である．
- s の関数 $Z(X, q^{-s})$ は s での値と $d - s$ での値に関する関数等式を満たす．
- 次を満たす $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$（$0 \leq i \leq 2d$）が存在する：$Z(X, t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2d}(t)}$ であり，$\deg P_i = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)$ であり，P_i の根（代数的整数の逆数）は任意の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ に対し複素絶対値 $q^{-i/2}$ である．

楕円曲線の例では，$P_0(t) = 1 - t$, $P_1(t) = (1 - \alpha t)(1 - \beta t)$, $P_2(t) = 1 - qt$ である．

注 13.58. Riemann ゼータ関数の関数等式および（非自明な）零点の実部に関する Riemann 予想と比較されたい．

Weil 予想の最後の（根の絶対値に関する）主張以外は定理 13.59 を $f = \mathrm{Frob}_q^n$ に適用してエタールコホモロジーの基本的性質（Poincare 双対（定理 13.49）など）を使うと従う（$\mathbb{F}_{q^n}$ 値点とは Frob_q^n で固定される点に他ならないので）．ここで *Frobenius* **射** (*Frobenius morphism*) Frob_q とは，$\mathbb{F}_q$ 代数の射 $a \mapsto a^q$ が誘導する $\mathbb{F}_q$ スキームの射である．

定理 13.59 (Lefschetz 跡公式)**.** X を固有滑らかな $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体とし，$f \colon X \to X$ を射とする．

$\Gamma_f \subset X \times X$ を f のグラフとし，$\Delta_X \subset X \times X$ を対角埋め込みの像とする．このとき

$$\Gamma_f \cdot \Delta_X = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{tr}(f; H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l))$$

が成り立つ．左辺はサイクルの交点数であり，右辺はトレースの交代和である．

Γ_f が Δ_X と横断的に交わるならば，左辺は $f\colon X \to X$ の固定点の個数になる．

注 13.60. （l 進）エタールコホモロジーが考案された動機の一つとして，（正標数を含めた）代数多様体に対する良いコホモロジー理論が存在し標準予想が成立すれば Weil 予想が自然と従うという構図があった．ただし，標準予想は今なお未解決であり，Weil 予想（の最後の主張）は Deligne [Del74] により違う方法で証明された．

演習問題

問題 13.1. 命題 13.35 の最後の段落（離散 G 加群と，$\mathrm{Gal}(L/K)$ 加群の族であって条件を満たすものとの一対一対応）を確認せよ．

問題 13.2. $\mathbb{F}_q$ 上有限型のスキームに対し，定義 13.52 の合同ゼータ関数に $T = q^{-s}$ を代入したものと注 13.53 のゼータ関数が一致することを示せ．（収束性は不問とする：q^{-s} の冪級数として一致することを示せばよい．）

参考文献

[Art62] M. Artin, *Grothendieck Topologies* (1962). mimeographed notes.

[BCKW19] Bhargav Bhatt, Ana Caraiani, Kiran S. Kedlaya, and Jared Weinstein, *Perfectoid spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 242, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019. Lectures from the 2017 Arizona Winter School, held in Tucson, AZ, March 11–17; Edited and with a preface by Bryden Cais; With an introduction by Peter Scholze.

[BS15] Bhargav Bhatt and Peter Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, Astérisque **369** (2015), 99–201 (English, with English and French summaries).

[Cad13] Anna Cadoret, *Galois categories*, Arithmetic and geometry around Galois theory, Progr. Math., vol. 304, Birkhäuser/Springer, Basel, 2013.

[Del74] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974), 273–307 (French).

[Den88] Ch. Deninger, *A proper base change theorem for nontorsion sheaves in étale cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **50** (1988), no. 3, 231–235.

[EGA1] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4** (1960), 228 (French).

[EGA2] ———, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **8** (1961), 222 (French).

[EGA3-1] ———, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **11** (1961), 167.

[Fu15] Lei Fu, *Etale cohomology theory*, Revised edition, Nankai Tracts in Mathematics, vol. 14, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015.

[FK88] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse; With an historical introduction by J. A. Dieudonné.

[GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, 2nd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR1950475

[God73] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973 (French). Troisième édition revue et corrigée; Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII; Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[GR58] Hans Grauert and Reinhold Remmert, *Komplexe Räume*, Math. Ann. **136** (1958), 245–318 (German).

[Gro95] Alexander Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules*, Séminaire Bourbaki, Vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. Exp. No. 195, 369–390 (French).

[Har94] David Harbater, *Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves*, Invent. Math. **117** (1994), no. 1, 1–25.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HS97] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1438546

[Ive86] Birger Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[LM18] Christian Liedtke and Yuya Matsumoto, *Good reduction of K3 surfaces*, Compos. Math. **154** (2018), no. 1, 1–35.

[Liu02] Qing Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné; Oxford Science Publications.

[ML98] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Oka50] Kiyoshi Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 1–27 (French).

[Rie16] Emily Riehl, *Category theory in context*, Dover, 2016.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003 (French). Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61]; Directed by A. Grothendieck; With two papers by M. Raynaud; Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin].

[SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin, 1973 (French). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4); Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[SGA4 1/2] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$; Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier.

[Ser55a] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278 (French).

[Ser55b] ———, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955/56), 1–42 (French).

[Ser65] ———, *Zeta and L functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row, New York, 1965, pp. 82–92.

[Ser73] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French; Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[Ser95] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie galoisienne: progrès et problèmes*, Astérisque **227** (1995), Exp. No. 783, 4, 229–257 (French, with French summary). Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.

[Sil86] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1986.

[SP] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, 2020.

[Vis05] Angelo Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–104.

[Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[志甫 16] 志甫 淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[斎佐 12]　斎藤 秀司 and 佐藤 周友, 代数的サイクルとエタールコホモロジー, 丸善出版, 2012.
[中岡 15]　中岡 宏行, 圏論の技法 アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数, 日本評論社, 2015.
[三枝 09]　三枝 洋一, エタールコホモロジーと l 進表現 (2009). 整数論サマースクール 2009 報告集.

索引

演習問題のヒント

ヒント 0.1 細かい誤りはたくさんあると思います（誤りを根絶するのは難しいということが論文を書くと分かると思います）.

ヒント 2.1 A において $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 0$ なので，素イデアルはこの 4 元のうち少なくとも 1 つを含む.

ヒント 2.2 素イデアルの逆像が素イデアルであることの証明を思い出し，極大イデアルだと何がまずいか検討せよ．ちなみに，注 2.23 で述べたように，A, B が（同一の）体上有限型だと必ず極大イデアルになってしまう.

ヒント 2.3 どこかで素イデアルであることを使う．分からなければ，まず環 $\mathbb{Z}$ の具体的なイデアルで考えてみて，その後一般化するのはどうでしょう.

ヒント 2.4 (3): 素イデアル $\mathfrak{p}$ に関する条件 $\mathfrak{p} \notin \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ をイデアルの言葉で言い換えてみよ.

ヒント 2.5 前半：A/I のイデアルと I を含む A のイデアルの間に一対一対応がつくことを用いる.
　後半：冪零根基 $\sqrt{0} := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}$ は任意の素イデアルに含まれる.

ヒント 2.6 A, S がこれを満たさないことを証明しようとすると S に関してある性質を要請したくなるはずで，そこを否定する S を持ってくると例が作れます.
　別のヒント：極端な例として $S = A$ を考えてみます.

ヒント 2.7 後半：普遍性を使って射を作る.

ヒント 2.8 (3): $\phi'(S) \subset (A_{S'})^*$ を示せばよい．そのためには，$s \in S$ に対して，$\phi(s)$ を含む $A_{S'}$ の素イデアルが存在しないことを示せばよい.

ヒント 2.9 例えば A, B, C を体としてみる.

ヒント 2.10 やればできる.

ヒント 2.11 $e^2 = e$ のとき，e と $1 - e$ の定める 2 閉部分集合の交わりは空集合で和集合は全体である.

ヒント 3.1 層の条件を噛み砕くと，要するに次を示すことになる：$U = \bigcup_{i \in I} U_i$ は開被覆で，$f_i \colon U_i \to Y$ は I で添字づけられた連続写像の族で，f_i と f_j の $U_i \cap U_j$ への制限が一致するならば，各 U_i への制限が f_i になるような連続写像 $f \colon U \to Y$ が一意に存在する．これを示すには，まず連続性を無視して写像 f が一意に定まることを確かめ，次にその f が連続であることを示せばよい.

ヒント 3.2 空集合 $I = \emptyset$ で添字づけられた開被覆を考えてみよう.

ヒント 3.3 命題 3.50 の証明でも述べたように，X 上の層 $\tilde{F}$ に延長できたなら $\tilde{F}(U) = \varprojlim_{V \in \mathscr{B}, V \subset U} F(V)$ （すなわち，$F(V)$ の直積の元で制限写像と可換なもの）となるはずなので，こう定義した前層が層になることを示す．開被覆 $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ をとる．定義より $\tilde{F}(U_j) = \varprojlim_{V \in \mathscr{B}, V \subset U_j} F(V)$ である．示すべきは，$\Lambda = \{(j, V) \mid V \in \mathscr{B}, V \subset U_j\}$ で添字づけられた族 $(s_{j,V})$ で，$(j, V), (j', V') \in \Lambda$ に対して $s_{j,V}|_{V \cap V'} = s_{j',V'}|_{V \cap V'}$ を満

たすものに対し，$\{W \in \mathscr{B}, W \subset U\}$ で添字づけられた族 t_W であって制限写像と可換でありまた $(j,V) \in \Lambda$ に対しては $s_{j,V} = t_V$ であるものが一意に存在することである．やればできる．

Λ の代わりに $\Lambda' = \{V \in \mathscr{B} \mid \exists j, V \subset U_j\}$ で添字づけられた族を考えてもよい．

ヒント 3.4 やればできる．

ヒント 3.5 $f = 1$ の場合に簡単に帰着できる．

まず左での単射性を示す．$\operatorname{Spec} A$ は準コンパクトなので有限個の $D(g_{i_j})$（$j = 1, \ldots, n$）で覆われており，すなわち $1 = \sum_{j=1}^{n} b_j g_{i_j}$ が成り立つ．A の元 a が各 $A_{g_{i_j}}$ に制限して 0 になるということを A の元の式で書き，上の式を使ってなんとかして $a = 0$ を示す．

次に張り合わせの存在を示す．（部分）有限被覆の場合に帰着できる．A_{g_i} の元を（A の元の分数の形で）具体的に書き，$A_{g_i g_{i'}}$ への制限が一致するという条件を A の元の式で書き，$1 = \sum_{j=1}^{n} b_j g_{i_j}$ を使ってなんとかする．

ヒント 3.6 $\{D(f) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ が x の基本近傍系をなすので，茎を定義する順極限に登場する $U \subset x$ として $D(f)$ のみを考えてよい．一方で $A_{\mathfrak{p}}$ も $f \notin \mathfrak{p}$ に関する A_f の順極限として表せる．

ヒント 3.7 命題 3.14 参照．なお，アーベル群は $\mathbb{Z}$ 加群，環は $\mathbb{Z}$ 代数と等価なので，それぞれ A 加群，A 代数の特殊な場合である．

ヒント 4.1 閉部分スキームに対し，注 4.4 で述べたイデアルの層の大域切断が I になる．

ヒント 4.2 前半：$\sqrt{I} = I \supset J = (0) = \sqrt{(0)}$ の場合に帰着できるので，一般の環 A に対して「すべての素イデアルの共通部分 $= \sqrt{(0)}$」を示せばよい．

ヒント 4.3 U のアフィン開被覆 $U_i = D(t_i)$（$i = 1, 2$）を用いて $\mathcal{O}_X(U)$ を計算すると $k[t_1, t_2]$ に一致する．U がアフィンだとすると素イデアル (t_1, t_2) に対応する点があるはずだが U_1, U_2 のどちらにもそんな点はない．

ヒント 4.4 アフィンスキームの principal open subset は開基をなす．$U \cap V$ の各点に対し，U の principal open である開近傍と V の principal open である開近傍をとることができるが，この 2 近傍の交わりを考えると？

ヒント 4.5 計算しやすい開被覆をとる．

ヒント 5.1 まずネーター環のスペクトルである場合を考え，閉集合を根基イデアルで言い換える（問題 4.2 の結果を使う）．

ヒント 5.2 f 自身は（k が体ならば）閉写像なので，普遍閉でないことを示すにはうまいスキームとのファイバー積を考える必要がある．例えば Z として $\mathbb{A}_k^1$ をとると $f \times \mathrm{id}_Z$ は閉写像でない．

ヒント 5.3 やればできる．

ヒント 5.4 環の射 $A \to B$ の定めるアフィンスキームの射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ の対角射 Δ は，環の射 $B \otimes_A B \to B$ の定めるアフィンスキームの射に等しい．まずこの環の射がどのような射か確認する．次に，Δ が閉埋め込みであることを示すには，$B \otimes B \to B$ が全射であることを確認すればよい．

ヒント 5.5 $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes \mathcal{O}_X(U_j) \to \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ を，対角射 Δ と関係したスキームの射で表す．例 5.34（分離

的でない例）の記述も参考にせよ．

ヒント 5.6 諸々の性質は principal open に遺伝するので，問題 4.4 を使うといいかも．

ヒント 5.7 1 つめから 2 つめを示す．$X = U$ と仮定してよい．$U = \operatorname{Spec} A$ とおき，U_i は principal open $\operatorname{Spec} A_{g_i}$ だとしてよい．このとき $f^{-1}(U_i \cap U_j)$ もアフィンであり $= \operatorname{Spec} B_{ij}$ とおくと $B_{ij} = (B_i)_{g_j}$ であることが示せる．$(f_*\mathcal{O}_Y)(U) = B$ とおくと $B_i = B_{g_i}$ であることが証明でき，$f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ が証明できる．

ヒント 5.8 A 加群 M に対して，$M = 0$ と任意の $\mathfrak{p}$ に対して $M_\mathfrak{p} = 0$ とが同値である．また，$\otimes_A A_\mathfrak{p}$ は完全列を保つので核を保つ．

ヒント 5.9 k の標数が n を割るか否かで場合分けする．

ヒント 5.10 Leibniz 則に関しては，$d\colon B \to I$ を問題文中の式で定めたとき $d(bb') - bd(b') - b'd(b)$ が I^2 に入ることを示す．普遍性に関しては，$D\colon B \to M$ を導分とするとき，（$\sum_i b_i b'_i = 0$ のとき Ω^1 の中で $\sum_i b_i \otimes b'_i = \sum_i b'_i d(b_i)$ であることを見越して，）$\Omega^1 \to M$ を $\sum b_i \otimes b'_i \mapsto \sum b'_i D(b_i)$ と定める．これが well-defined になることを示すには，$B \otimes_A B \to M$ を同じ式で定めたとき I^2 の元が 0 に行くことを確かめればよい．

ヒント 6.1 やればできる．

ヒント 6.2 (1) p を無限次の被覆とする．無限個の開集合の共通部分は一般に開集合にならない．(2) q を無限次の被覆とする．無限個の開集合の共通部分は一般に開集合にならない．(3) 都合の悪い部分は q で消してしまえばよい．

ヒント 6.3 各点の逆像は離散集合なことが必要だがこれが成り立つか？ とか，いかにもまずそうな点があるか？ とか．

ヒント 6.4 最後の主張：$\pi_1(X, x)$ は $p^{-1}(x) \subset Y$ に作用する．$\pi_1(X, x)$ の部分群が与えられたとき，Y 上の適切な同値関係による商 $Y \to Y/{\sim}$ であって，被覆空間であり，$p^{-1}(x) \subset Y$ への制限はその部分群による商になっているものを与えよ．

ヒント 6.5 (1) $\mathcal{H}$ のほとんどの点 z の安定化群（$\operatorname{Stab}(z) := \{g \in G \mid g(z) = z\}$，8.1 節参照）は自明ですが，そうでない点があります．(2) すべての点で Stab が自明になれば OK です．

ヒント 6.6 一案として：「トルネードポテト 検索」

ヒント 7.1 やればできるものがいくつかあります．

ヒント 7.2 (2)a: $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_{p^2}$，$\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_{p'}$（$p, p'$ は相異なる素数）を考える．スキームの底位相空間が必ず満たす位相的性質を考える．

ヒント 7.3 層の場合，普通に示してもいいが，前層の層化に関する随伴性（3.5 節）と命題 7.63 を用いることもできる．

ヒント 7.4 任意の位相空間 Z に対して，$\operatorname{Hom}(Y, Z) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(Y \times_X Y, Z)$ の差核が $\operatorname{Hom}(X, Z)$ になることを

示したい．集合の場合は正しいので写像 $\bar{f}\colon X \to Z$ が得られる．これが連続であることをいえばよく，そのために被覆写像であることを用いる．

ヒント 7.5 余談 7.52 が参考になるかも．

ヒント 8.1 作用の連続性の定義や直積位相の定義を確認しましょう．

ヒント 8.2 副有限群は有限群の直積の閉部分集合であること，問題の性質が有限群で成り立つこと，直積と閉部分集合に遺伝すること，を確認すればよい．

ヒント 8.3 G の有限位数開正規部分群 N に関する極限 $\varprojlim_N G/N$ が現れます（定義 8.10 で述べた位相群としての副有限完備化）．

ヒント 8.4 分離拡大か否か，ガロア拡大か否か，によって結論が変わる．

ヒント 9.1 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体なので，$\mathcal{A}$ の任意の対象は入射的であり，F と GF は完全である．あとは例えば $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \neq 0$ を確認すればよい．これを計算するために入射的 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 加群がほしいが，例えば $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (1/p^2)\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ が入射的である（$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が入射的 $\mathbb{Z}$ 加群であることを認めた）．または非自明な拡大が存在することを見てもよい（命題 9.8）．

ヒント 10.1 前半は，定義に基づいて（または命題 10.7 を用いて）計算する．準連接の完全列に対してはアフィン開集合での切断も完全列になるはずである（命題 10.31）．

ヒント 10.2 (1): 層 F に対し $F(U) = \mathrm{Hom}(j_!\mathcal{O}_U, F)$（$j\colon U \to X$ は包含写像）であることを使う．零延長 $j_!$ の定義と性質は 3.7 節を見よ．(2): 全射性を示すため $s \in F''(U)$ をとる．開集合 $V \subset U$ と元 $f \in F(V)$ の組 (V, f) で f の像が $s|_V$ に等しいもの全体の集合に，$V' \subset V$ かつ $f' = f|_{V'}$ のとき $(V', f') \leq (V, f)$ とする順序を定めると，Zorn の補題（の仮定を満たすことは確認せよ）より極大な元 (V_1, f_1) が存在する．これが $V_1 = U$ を満たすならよい．$V_1 \subsetneq U$ ならば，$F \to F''$ の全射性より別の組 (V_2, f_2) で $V_1 \subsetneq V_1 \cup V_2$ を満たすものが存在するが，F' が flasque であることを用いて f_2 をうまく調整すると $V_1 \cup V_2$ 上の組が構成できて極大性に反する．(3): (2) と F の flasque 性を用いる．

ヒント 10.3 写像 $J \to I$ によらないことの証明は，なんとかしてホモトピーを作る．他は難しくない．

ヒント 10.4 アフィン被覆をとって計算する．

ヒント 12.1 定義を確認しよう．

ヒント 12.2 (1): 引き戻しの定義と篩の定義を復習しよう．(2): Grothendieck 位相の定義の局所性と (1) を使う．

ヒント 12.3 位相の篩が底変換で保たれることを確かめるために，前位相の被覆が底変換で保たれることを用いる．位相の篩の局所性を確かめるために，前位相の被覆が合成で保たれることを用いる．層に関しては，$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(R, F)$ の元とは $\prod_{V \in R} F(V)$ の元で適切な条件を満たすものであるという記述を用いる．

ヒント 12.4 (1): 極端な話，1 点集合で覆ってしまってはどうでしょうか．(2): やればできる．

ヒント 12.5 (1): A 加群の射 $t\colon B \otimes_A B \to B$ で，$f \circ s + t \circ (i_1 - i_2) = \mathrm{id}_B$ であるものを見つけよ．(2): 大

ヒント：$C=B$ でできる．(3): (1) と (2) を使う．

ヒント 13.1 離散性より，M の任意の元はある開部分群で固定され，開部分群は $\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$ の形をしている．

ヒント 13.2 剰余体が $\mathbb{F}_{q^n}$ の部分体である極大イデアルの個数と，$\mathbb{F}_{q^n}$ 値点の個数との間の関係が分かれば，あとは級数の形式的な変形です．

演習問題の略解

略解 0.1 この問題の解を挙げられるわけがないですよね．私が誤りを見つけたらここに書く前に修正しているはずですから．（いや，誤りを見つけたが修正ができない，という可能性もあるか…….）

略解 2.1 (1) $\mathbb{Z}$ の素イデアルで n を含むものと一対一対応するので，$\mathrm{Spec}\,A=\{2A,3A,5A,7A\}$ であり，位相は離散位相である．なお $2A$ を (2) と書いてももちろんよいが，イデアルと小問の記号が紛らわしくなるのでここでは避ける．(2) f を含むものは $2A,7A$．(3) f を含まないものは $3A,5A$．(4) $\mathrm{Spec}\,A$ は交わらない 2 つの非空な閉部分集合の和集合に書ける（例えば $\{2A,7A\}$ と $\{3A,5A\}$）ので連結でない．

略解 2.2 整域の部分環は整域だが，体の部分環は体とは限らない．例を作るには整域をその商体に埋め込むのが手っ取り早い．例えば $\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$．

略解 2.3 まず $\emptyset=V(A)$，$\mathrm{Spec}\,A=V((0))$ である（これは以下の事項の特別な場合ともいえるが）．次にイデアルの族 $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\sum_\lambda I_\lambda$ はすべての I_λ を含む最小のイデアルなので，$V(\sum_\lambda I_\lambda)=\bigcap_\lambda V(I_\lambda)$ が成り立つ．最後にイデアルの有限族 $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を考える．$\bigcap_\lambda I_\lambda$ はすべての I_λ に含まれる最大のイデアルなので $V(\bigcap_\lambda I_\lambda)\supset\bigcup_\lambda V(I_\lambda)$ が成り立つ．逆の包含を示そう．$\mathfrak{p}\notin\bigcup_\lambda V(I_\lambda)$ と仮定する．各 λ に対し $x_\lambda\in I_\lambda\setminus\mathfrak{p}$ が存在するので 1 つずつとる．積 $x:=\prod_\lambda x_\lambda$ を考える（Λ が有限であることを使った）と，$x\in\bigcap_\lambda I_\lambda$ かつ $x\notin\mathfrak{p}$ である（$\mathfrak{p}$ が素イデアルであることを使った）．すなわち $\mathfrak{p}\notin V(\bigcap_\lambda I_\lambda)$ なのでよい．

略解 2.4 (1): $D(f)$ は $V(fA)$ の補集合である．(2): $V(I)$ の補集合は $\bigcup_{f\in I}D(f)$ に等しいので，開基であることが分かる．また有限個の元 f_i に対し $\bigcap_i D(f_i)=D(\prod_i f_i)$ である．(3): $\bigcup_i D(f_i)$ の補集合は $\bigcap_i V(f_iA)=V(f_i\mid i\in I)$ であり，このイデアルが (1) に等しければこれは空集合であり，等しくなければそれを含む極大イデアルが存在するのでこれは空集合でない．(4): $\mathrm{Spec}\,A$ の開被覆が与えられたとする．(2) より，各開集合は $D(f_i)$ の形だとしてよい．(3) を用いて言い換えると，$(f_i\mid i\in I)$ が A に等しいわけだが，$1\in A$ は有限個の f_i の線形結合で書けることになり，その有限個が生成するイデアルがすでに $(1)=A$ に等しい．再び (3) を用いて言い換えると，その有限個が $\mathrm{Spec}\,A$ を被覆する．

略解 2.5 A/I のイデアルと，A のイデアルで I を含むものが一対一に対応し，剰余環は等しいので素イデアルは素イデアルと対応する．像 $V(I)$ は明らかに閉集合である．ϕ^* が連続であることは（一般の環準同型に対し）知っているので，あとは閉写像であることを示せばよいが，イデアル $J/I\subset A/I$ に対し $V(J/I)=V(J)$ である．

後半：冪零根基 $\sqrt{0}:=\{a\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}, a^n=0\}$ は任意の素イデアルに含まれる（実際，a^n が素イデアルに入るならば a 自身が入る）ので $V(\sqrt{0})=V(0)$ である．したがって冪零根基が 0 より真に大きい環を見つければよいが，$\mathbb{C}[x]/(x^2)$ や $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ などがある．あるいは，$A=\mathbb{Z}\supset I=2\mathbb{Z}\supset J=4\mathbb{Z}$ などとしてもよい．

略解 2.6 推移律を証明しようとすると，S の元が正則であればよいことに気づきます（$s \in A$ が正則とは，$a \in A$ に対し $sa = 0 \implies a = 0$ となること）．逆に S が正則でない元 s をもち $a \neq 0$ かつ $sa = 0$ ならば，$(a, 1) \approx (0, s) \approx (0, 1)$ だが $(a, 1) \not\approx (0, 1)$ となり推移律が成り立たないことが分かります．あとは正則でない元を含む積閉集合をもってくればよいわけですが，$A \neq 0$ で $S = A$ とするのが早いです．これは 3 条件すべてを満たします．

略解 2.7 $(S^{-1}A)^*$ の逆像が S' を含むことは明らか．逆に $a \in A$ の像が $(S^{-1}A)^*$ に属するならば，ある $c \in A$ と $s \in S$ が存在して（$S^{-1}A$ において）$acs^{-1} = 1$ であり，すなわちある $t \in S$ が存在して（A において）$t(ac - s) = 0$ ということになり，すなわち $a \cdot tc = st \in S$ なので $a \in S'$ である．$S \subset S'$ なので普遍性より射 $S^{-1}A \to S'^{-1}A$ があり，一方 S の像が可逆な A 代数においては明らかに S' の像も可逆なので普遍性より射 $S'^{-1}A \to S^{-1}A$ もあり，これにより同型を得る．なお余談の続きとして，この S' は同じ局所化を与える集合のうち最大のものである．

略解 2.8 (1): 逆写像は $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}A_S$ で与えられる．（$\phi^*(\mathfrak{p}A_S) = \mathfrak{p}$ を示す際に $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることと $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ を用いる．）(2): $f \notin \mathfrak{p}$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f^n \notin \mathfrak{p}$ なので，像は $D(f)$ である．(3): $\phi'(S) \subset (A_{S'})^*$ を示せばよい．そのためには，$s \in S$ に対して，$\phi(s)$ を含む $A_{S'}$ の素イデアルが存在しないことを示せばよい．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_{S'}$ とすると，問題文の仮定と同一視より，$\phi'^*(\mathfrak{p})$ は S と交わらない．

略解 2.9 例えば $A = \mathbb{R}$，$B = C = \mathbb{C}$ とおくと，$\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} C$ は 1 点集合だが，$B \otimes_A C \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ のスペクトルは 2 点集合なので，集合や位相空間としてのファイバー積（当然 1 点集合である）とは一致しない．

略解 2.10 一般の環 A において，相異なる素イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ に対し $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ と $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$ の少なくとも一方が成り立ち，すなわち $V(\mathfrak{p})$ と $V(\mathfrak{q})$ のどちらかを見ることで $\operatorname{Spec} A$ が T_0 であることが従う．$\operatorname{Specm} A$ は $\operatorname{Spec} A$ の部分位相空間なのでこれも T_0 である．$\operatorname{Specm} A$ においてはどの相異なる極大イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ の間にも包含関係がない（あると極大性に反する）ので，$V(\mathfrak{p}), V(\mathfrak{q})$ を見ることで T_1 が従う．

$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ において $(0) \subset (2)$ なので，(0) を含み (2) を含まない閉集合は存在しない．したがって $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は T_1 を満たさない．

$\operatorname{Specm} \mathbb{Z}$ の全体でない閉集合は $V(n)$，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ の形をする．このような閉集合 2 つで全体を覆うことはできない：実際，$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対しどちらをも割らない素数 p が存在し，そのような p に対し $(p) \notin V(n_1) \cup V(n_2)$ である．したがって $\operatorname{Specm} \mathbb{Z}$ は T_2 を満たさず，これを部分空間にもつ $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ も T_2 を満たさない．

略解 2.11 $e^2 = e$ を満たす $e \in A$ がちょうど 2 つではないと仮定する．1 つ以下ならば，A において $1 = 0$ なので A は零環であり $\operatorname{Spec} A$ は空集合なので連結でない．3 つ以上ならば，そのうち 1,0 と異なる e をとる．$e \cdot (1 - e) = 0$ なので $V(e) \cup V(1 - e) = \operatorname{Spec} A$ であり，$e + (1 - e) = 1$ なので $V(e) \cap V(1 - e) = \emptyset$ である．あとは $V(e)$ と $V(1 - e)$ が空でないことを示せばよい．対称性より $V(e) \neq \emptyset$ を示せばよい．$V(e) = \emptyset$ だとすると $(e) = (1)$，すなわちある $f \in A$ に対し $ef = 1$ だが，このとき $1 = ef = e^2 f = e$ となり仮定に反する．

逆に，$e^2 = e$ を満たす $e \in A$ がちょうど 2 つだと仮定する．零環はこの条件を満たさないので $0 \neq 1$ であり，したがってこの 2 つとは 0 と 1 であり，また $\operatorname{Spec} A$ は空でない．イデアル I, J に対する閉集合 $V(I), V(J)$ が $V(I) \cup V(J) = \operatorname{Spec} A$ かつ $V(I) \cap V(J) = \emptyset$ を満たすときどちらかが空集合であること

を示せばよい．$V(I+J)=\emptyset$ より $I+J=A$ である．$x\in I$ と $y\in J$ で $x+y=1$ となるものをとる．$V(I\cap J)=\operatorname{Spec}A$ より $\operatorname{Spec}A_{xy}=\emptyset$ なので A_{xy} は零環でありよって xy は冪零であることが（A_{xy} の等式 $1=0$ を A での等式に言い直すと）分かる．$(xy)^N=0$ だとしよう．$1=(x+y)^{2N-1}=x^Na+y^Nb$ と書くことができ，$e=x^Na, f=y^Nb$ とおくと $e+f=1, ef=0$ である．したがって e（と f）は冪等であり，仮定より $e=1$ または $e=0$ である．すなわち，I と J のどちらかが 1 を含み，したがって $V(I)$ と $V(J)$ のどちらかが空である．

後半の別証：開閉部分集合 $U\subset\operatorname{Spec}A$ に対し，U と U^{c} のどちらかが空であることを示せばよい．U^{c} も開である．$1\in\mathcal{O}(U)$ と $0\in\mathcal{O}(U^{\mathrm{c}})$ を張り合わせてできる元 $e\in\mathcal{O}(\operatorname{Spec}A)=A$ を考える（3.8 節参照）と，これは冪等なので仮定より $e=1$ または $e=0$ であり，$e=1$（resp. $e=0$）ならば U^{c}（resp. U）上 $0=1$ なので U^{c}（resp. U）は空である．なお余談として，冪等元と $\operatorname{Spec}A$ の開閉部分集合が一対一に対応することが同様に（0 と 1 の張り合わせを用いて対応させることで）示せる．

しかし別証で用いていること（別じゃない方でも実質的に張り合わせの証明をしている）を顧みるにこれは 3 節の問題にすべきでしたね⋯．

略解 3.1 ヒントで述べた内容を示す．写像 $f\colon U\to Y$ を，$x\in U_i$ に対し $f_i(x)$ を対応させることで定める：これは well-defined になる．次に f が連続であることを示そう．開集合 $V\subset Y$ に対し $f^{-1}(V)\subset U$ が開であることを示したい．そのためには各 U_i との共通部分が U_i の開集合ならばよく，$f^{-1}(V)\cap U_i=f_i^{-1}(V)$ は f_i が連続なので U_i の開集合である．

略解 3.2 開集合 $U=\emptyset$ の，集合 $I=\emptyset$ で添字づけられた（一意的に定まる）開被覆を考えると，張り合わせ条件 ${}^{\mathrm{p}}\underline{A}(U)\to\prod_{i\in I}{}^{\mathrm{p}}\underline{A}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}{}^{\mathrm{p}}\underline{A}(U_{ij})$ は $A\to 0\rightrightarrows 0$ なので差核図式にならない．なお，これ以外に反例は存在しない：$I\neq\emptyset$ ならば $\prod_{i\in I}A\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}A$ の差核は A である．

略解 3.3 X 上の前層 $\tilde{F}$ を $\tilde{F}(U):=\varprojlim_{V\in\mathscr{B},V\subset U}F(V)$ で定め，これが層になることを示す．開被覆 $U=\bigcup_{j\in J}U_j$ をとり，$\tilde{F}(U_j)$ の元の族であって $\tilde{F}(U_{jj'})$ への 2 通りの制限が一致するものをとる．すなわち，$\Lambda=\{(j,V)\mid j\in J, V\in\mathscr{B}, V\subset U_j\}$ で添字づけられた族 $(s_{j,V}\in F(V))$ があり，

- $V'\subset V\subset U_j$ のとき，$s_{j,V}|_{V'}=s_{j,V'}$
- $V\subset U_j$ かつ $V\subset U_{j'}$ のとき，$s_{j,V}=s_{j',V}$

を満たす．任意に $W\in\mathscr{B}$，$W\subset U$ をとる．このとき，Λ に現れる V で W に含まれるものの和集合は W になるので，F が $\mathscr{B}$ 層であることから，$t_W\in F(W)$ が一意に存在し，$V\subset W$ なる任意の $(j,V)\in\Lambda$ に対し $t_W|_V=s_{j,V}$ を満たす．すると，$\{W\in\mathscr{B}\mid W\subset U\}$ で添字づけられた族 t_W は，構成より，

- $W'\subset W$ のとき，$t_W|_{W'}=t_{W'}$
- $V\subset U_j$ のとき，$t_V=s_{j,V}$

を満たす．すなわち，$(t_W)\in\tilde{F}(U)$ は求める元である．一意性は略．

略解 3.4 $O(V,s)\cap O(V',s')$ について考える．集合 $W:=\{x\in V\cap V'\mid s_x=s'_x\}$ は開である：実際，$x\in W$ すなわち $s_x=s'_x$ ならば x のある開近傍 U に対し $s|_U=s'|_U$ でありしたがって $U\cap V\cap V'\subset W$ である．したがって $O(V,s)\cap O(V',s')=O(W,s|_W)=O(W,s'|_W)$ である．（なお，$W=\emptyset$ となることもありうる．）

連続性：点 $a\in F_x\subset E$ と，$p(a)=x$ の近傍 $U\subset X$ を任意にとる．$a=s_x$ なる $s\in F(V)$，$V\subset X$ をと

ると，$O(V\cap U, s|_{V\cap U})$ は $p^{-1}(U)$ に含まれる a の近傍である．

同型：p のセクションのなす層を G とおく．写像 $\alpha\colon F(U)\to G(U)$ を定める．$s\in F(U)$ に対し，$\alpha(s)$ を写像 $x\mapsto s_x$ とする．開集合 $O(V,s')\subset E|_U$ の逆像は $\{x\in V\mid s_x=s'_x\}$ であり，前述のようにこれは開集合なので，この写像は連続である．α が制限写像と交換することは明らかなので，α は層の射を与える．α が同型射であることを示すには各点での茎での射 α_x が同型射（全単射）であることを示せばよいが，$G_x=F_x$ であり α_x が恒等射 $F_x\to F_x$ であることが容易に確かめられる．

略解 3.5 A_f を A とおき直すことで $f=1$ の場合に帰着できる．

まず左での単射性を示す．$\operatorname{Spec} A$ は準コンパクトなので，被覆は有限だとしてよい．$\operatorname{Spec} A$ が有限個の $D(g_j)$（$j=1,\ldots,n$）で覆われているとする．$a\in\operatorname{Ker}(A\to\prod_{j=1}^n A_{g_j})$ とすると，各 j に対して $l_j\geq 1$ が存在し $ag_j^{l_j}=0$ ということになる．$\operatorname{Spec} A$ が $D(g_j^{l_j})=D(g_j)$（$j=1,\ldots,n$）で覆われているので，ある $b_j\in A$ に対して $1=\sum_{j=1}^n b_jg_j^{l_j}$ である．両辺に a をかけて $a=0$ を得る．

次に張り合わせの存在を示す．（部分）有限被覆の場合に帰着できる．$\prod_{j=1}^n A_{g_j}$ の元 $(a_jg_j^{-l_j})$ をとり 2 通りの制限が一致するとする：すなわち，各 i,j に対し $m_{ij}\geq 0$ が存在し A での等式 $(a_ig_j^{l_j}-a_jg_i^{l_i})(g_ig_j)^{m_{ij}}=0$ が成り立つ．a_i, l_i を適当に置き換えることで，$m_{ij}=0$ としてよい：すなわち，$a_ig_j^{l_j}=a_jg_i^{l_i}$ である．前段落と同様に $1=\sum_{j=1}^n b_jg_j^{l_j}$ である．両辺に $a_ig_i^{-l_i}$ をかけると，A_{g_i} での等式 $a_ig_i^{-l_i}=\sum_{j=1}^n b_ja_ig_j^{l_j}g_i^{-l_i}=\sum_{j=1}^n b_ja_j$ を得る．この右辺は A の元なので $a_ig_i^{-l_i}$ の張り合わせを与える．

略解 3.6 ヒントがそのまま略解です．

略解 3.7 有向の場合は本文でも述べたが，もう少し詳しく書く．

集合の場合（有向を仮定しない）：集合の直和 $\coprod_{i\in I} M_i$ の次の同値関係 $\sim$ による商が自然に順極限になる．$m\in M_i$ と $m'\in M_{i'}$ に対し，$m\sim m' \overset{\text{def}}{\iff}$ ある $j\in I$（$j\geq i$ かつ $j\geq i'$）が存在して $f_{i,j}(m)=f_{i',j}(m')$．

A 加群や A 代数で I が有向の場合：集合としての順極限に次のように演算を入れる．和：$m\in M_i$ と $m'\in M_{i'}$ に対し，$j\geq i$ かつ $j\geq i'$ なる $j\in I$ が存在し（有向性を用いた），$[m]+[m']:=[f_{i,j}(m)+f_{i',j}(m')]$ とする．ただし $[\ldots]$ は同値類を表す．単位元：$j\in I$ が存在し（有向性を用いた），$0:=[0_{M_j}]$ とする．スカラー倍：$a[m]:=[am]$ とする．逆元，積，乗法の単位元：同様．推移写像が A 加群や A 代数の準同型なのでこれらは well-defined になる．結合律などもある M_j で確かめられる．

有向でない場合は，「共通の j まで行って和などを定義する」という方針が使えないので，有限個の和・積を含む加群・代数を準備しこれを適切に割るという方針をとる．

A 加群で I が有向と仮定しない場合：A 加群としての直和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ の，部分加群 $\langle m-f_{i,j}(m)\mid m\in M_i, i\leq j\rangle$ による商加群が順極限になる．詳細略．

A 代数で I が有向と仮定しない場合：F を I の有限部分集合全体の集合とする．$J\in F$ が相異なる元 $j_1,\ldots,j_n$ からなるとき，A 加群 M_J を $M_J:=M_{j_1}\otimes_A\cdots\otimes_A M_{j_n}$ と定める（$J=\emptyset$ ならば $M_J=A$ である）．この書き方だと元を並べる順番によって異なるものになってしまうが，適切に調整してください（例えば I にもともとの順序と無関係な全順序を入れてその順番で並べることにするなど）．$J'\subset J$ に対し，A 代数の準同型 $M_{J'}\to M_J$ を（$J\setminus J'$ の分だけ 1 をテンソルすることで）定める．F は（包含順序に関し）有向なので $(M_J)_{J\in F}$ の順極限が存在し，これには A 代数の構造が入る（M_J の元と $M_{J'}$ の元の和や積は $M_{J\cup J'}$ に入る）．これをさらにイデアル $\langle m-f_{i,j}(m)\mid m\in M_i, i\leq j\rangle$ で割った商代数が M_i の順極限になる．詳細略．

略解 4.1 ヒントがそのまま略解です．

略解 4.2 $\sqrt{I}=\sqrt{J}$ ならば $V(I)=V(J)$ であること：$\mathfrak{p}\in V(I)$ すなわち $I\subset\mathfrak{p}$ と仮定する．$j\in J$ に対し，$J\subset\sqrt{J}=\sqrt{I}$ よりある $n\geq 1$ が存在して $j^n\in I\subset\mathfrak{p}$ なので $j\in\mathfrak{p}$ である．したがって $\mathfrak{p}\in V(J)$ である．

逆に，$V(I)=V(J)$ と仮定して $\sqrt{I}=\sqrt{J}$ を示す．$I\supset J$ の場合に示せばよい（一般の場合は，$(I,I\cap J)$ の場合と $(J,I\cap J)$ の場合から従う）．さらに，A を A/J で置き換えることで，一般の環 A に対して「$V(I)=\operatorname{Spec}A$ ならば $I\subset\sqrt{(0)}$」を示すことに帰着する．すなわち，「すべての素イデアルの共通部分 $\subset\sqrt{(0)}$」を示せばよい．（「$\supset$」は明らかなので実際には等号が成り立つ．）$a\in A$ がすべての素イデアルに含まれるならば，$\operatorname{Spec}A_a=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A\mid a\notin\mathfrak{p}\}=\emptyset$ なので $A_a=0$ である．したがってある $n\geq 0$ に対して A での等式 $a^n=0$ が成立する．すなわち $a\in\sqrt{(0)}$ である．

後半は，閉集合に Z 対し $Z=V(I)$ を満たすイデアル I をとると根基イデアル $\sqrt{I}$ は I のとり方によらず定まる．

略解 4.3 $\mathcal{O}_X(D(t_1))=k[t_1^{\pm1},t_2]$, $\mathcal{O}_X(D(t_2))=k[t_1,t_2^{\pm1}]$ であり，$\mathcal{O}_X(D(t_1t_2))$ への制限写像は $k[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1}]$ への包含写像なので，$\mathcal{O}_X(U)$ はこの 2 つの環の共通部分に等しい．$k[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1}]$ の k ベクトル空間としての基底 $\{t_1^{i_1}t_2^{i_2}\mid i_1,i_2\in\mathbb{Z}\}$ を用いて考えると，$\mathcal{O}_X(U)=k[t_1,t_2]=\mathcal{O}_X(X)$ であることが分かる．U がアフィンだとすると素イデアル (t_1,t_2) に対応する点があるはずだが U_1,U_2 のどちらにもそんな点はない．

略解 4.4 アフィンスキームの principal open subset は開基をなす．$U\cap V$ の各点 x に対し，U の principal open である開近傍 $x\in U'\subset U\cap V$ と，V の principal open である開近傍 $x\in V'\subset U\cap V$ をとる．すなわち，ある $f\in\mathcal{O}_X(U)$ が存在して $U'\subset U$ は f が可逆である点全体であり，ある $g\in\mathcal{O}_X(V)$ が存在して $V'\subset V$ は g が可逆である点全体である．すると $U'\cap V'$ は U' のうち $g|_{U'}$ が可逆である点全体なので U' の principal open である．アフィンスキームの principal open の principal open は principal open なので，$U'\cap V'$ は U の principal open である．同様に V の principal open でもある．

略解 4.5 例 4.13 の被覆 U_i を用いて計算すればよい．$\mathcal{O}(U_i)$ はどれも $A[(t_j/t_k)^{\pm1}]$ の部分環であり，次数 0 の単項式が A 加群としての基底を与え，分子に t_i を含む単項式は $\mathcal{O}(U_i)$ に入らないので，結局単項式 1 に対応する A しか残らない．

略解 5.1 閉集合の降鎖をとる．ネーター環のスペクトル有限枚で被覆し，各スペクトルで降鎖が停止することをいえばよいので，はじめからネーター環のスペクトルだとしてよい．閉集合は根基イデアルと一対一対応し包含関係は逆包含関係にうつるので，根基イデアルの昇鎖が停止することをいえばよいが，ネーター環なのでイデアルの昇鎖は停止する．

略解 5.2 f の底変換である $\mathbb{A}^2=\operatorname{Spec}k[t,s]\to\mathbb{A}^1=\operatorname{Spec}k[s]$ は閉写像でない．実際，閉集合 $V(ts-1)$ の像は $\operatorname{Spec}k[s]\setminus\{0\}$ でありこれは閉集合でない．

略解 5.3 (1) $\Longrightarrow$ (3): 像 $\Delta(X)$ の補集合 $\Delta(X)^{\mathrm{c}}=\{(x,y)\in X\times X\mid x\neq y\}$ の点 (x,y) をとる．ハウスドルフゆえ $x\in U,y\in V,U\cap V=\emptyset$ なる開集合 U,V が存在する．$U\times V$ は $\Delta(X)^{\mathrm{c}}$ に含まれる (x,y) の開近傍である．したがって $\Delta(X)$ は閉集合である．

(3) $\Longrightarrow$ (1): 相異なる 2 点 x,y をとる．$\Delta(X)^{\mathrm{c}}$ は開集合でありこれが (x,y) を含むので，直積位相の定義から，X の開集合 U,V で $(x,y)\in U\times V\subset\Delta(X)^{\mathrm{c}}$ なるものが存在する．これは $x\in U,y\in V,U\cap V=\emptyset$ を意味する．したがって X はハウスドルフである．

(3) $\Longrightarrow$ (2): 閉集合 $Z\subset X$ に対し，$\Delta(Z)=Z\times Z\cap\Delta(X)$ であり，$Z\times Z$ と $\Delta(X)$ は閉集合なのでこれも閉集合である．

(2) $\implies$ (3): 明らか.

略解 5.4 ヒントがほとんどそのまま略解ですが，付け加えると環の射 $B\otimes_A B\to B$ は $b_1\otimes b_2\mapsto b_1b_2$ です.

略解 5.5 X が分離的だとする．すなわち $\Delta_X\colon X\to X\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}X$ は閉埋め込みである．$U,V\subset X$ をアフィン開部分スキームとする．Δ_X の $U\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}V\to X\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}X$ による底変換 $U\cap V\to U\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}V$ も閉埋め込みである．$U\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}V$ はアフィンなので $U\cap V$ もアフィンであり，対応する環準同型 $\mathcal{O}_{X\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}X}(U\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}V)=\mathcal{O}_X(U)\otimes\mathcal{O}_X(V)\to\mathcal{O}_X(U\cap V)$ は全射である.

逆に，$X=\bigcup_{i\in I}U_i$ がアフィン開被覆で，任意の $i,j\in I$ に対して，$U_i\cap U_j$ もアフィンであり，かつ $\mathcal{O}_X(U_i)\otimes\mathcal{O}_X(U_j)\to\mathcal{O}_X(U_i\cap U_j)$ は全射であるとする．これは対角射 $\Delta\colon X\to X\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}X$ がアフィン局所的に，すなわち $X\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}X$ の開被覆 $(U_i\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}U_j)_{(i,j)\in I\times I}$ の各開集合に制限すると，閉埋め込みになっていることを意味するが，このことから Δ 自身が閉埋め込みであることが従う.

（つまり，射 $f\colon Y\to X$ があり，X のある開被覆 $X=\bigcup U_i$ が存在して $Y\times_X U_i\to U_i$ が閉埋め込みならば f 自身が閉埋め込みである，ということを用いた．このことの証明には，X の部分集合が閉集合であることは各 U_i への制限で確かめられることと，層の射が全射であることは（各茎を見ればよいので）各 U_i への制限で確かめられることと，を使えばよい.）

略解 5.6 有限型ならば後者の条件を満たすことを示せばよい．有限型の定義の条件を満たす $(U_i)_{i\in I}$ と $(V_{ij})_{j\in J_i}$ をとる．まず, $U\subset X$ をアフィン開集合とし $f^{-1}(U)$ が準コンパクトであることを示す．$U\cap U_i$ を, アフィン開集合 $(U'_\alpha)_{\alpha\in A_i}$ で覆う．U はアフィンなので，$\bigcup_i A_i$ の有限部分集合 A' が存在し $U=\bigcup_{\alpha\in A'}U'_\alpha$ である．$\alpha\in A_i$ に対し，$f^{-1}(U'_\alpha)=f^{-1}(U_i)\times_{U_i}U'_\alpha=\bigcup_j V_{ij}\times_{U_i}U'_\alpha$ は有限個のアフィンの和集合なので準コンパクトである（アフィン上のアフィンとアフィンのファイバー積はアフィンであることを用いた)．したがって $f^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha\in A'}U'_\alpha$ も準コンパクトである.

次に $U\subset X$ をアフィン開集合とし $V\subset f^{-1}(U)$ をアフィン開集合とするとき $\mathcal{O}_Y(V)$ は有限生成 $\mathcal{O}_X(U)$ 代数であることを示す．前段落と同様に U'_α を, ただし今回は U の principal open となるようにとる．$\alpha\in A_i$ に対し，$f^{-1}(U'_\alpha)=\bigcup_j V_{ij}\times_{U_i}U'_\alpha$ であり，$V'_{ij\alpha}:=V_{ij}\times_{U_i}U'_\alpha$ とおくと，$\mathcal{O}_Y(V_{ij\alpha})$ は有限生成 $\mathcal{O}_X(U'_\alpha)$ 代数である．$V\cap V_{ij\alpha}$ を，V の principal open かつ $V_{ij\alpha}$ の principal open であるような開集合 $(V'_\beta)_{\beta\in B_{ij\alpha}}$ で覆う（問題 4.4 を使った)．V はアフィンなので，$\bigcup_{i,j,\alpha}B_{ij\alpha}$ の有限部分集合 B' が存在し $V=\bigcup_{\beta\in B'}V'_\beta$ である．$\mathcal{O}_Y(V'_\beta)$ は有限生成 $\mathcal{O}_X(U)$ 代数である（$V'_\beta\subset V_{ij\alpha}$ と $U'_\alpha\subset U$ が principal open であることを用いた）ので，生成系 $t_{\beta k}\in\mathcal{O}_Y(V'_\beta)$（$k\in K_\beta$）をとれる．$V'_\beta\subset V$ は principal open なので，分母を払って $t_{\beta k}\in\mathcal{O}_Y(V)$ としてよい.（有限個の）元 $(t_{\beta k})_{\beta\in B',k\in K_\beta}$ が生成する $\mathcal{O}_Y(V)$ の部分 $\mathcal{O}_X(U)$ 代数は，$\mathcal{O}_Y(V)$ 全体に一致する（なぜならば，各 $\beta\in B'$ に対する principal open V'_β に制限して一致するので)．すなわち $\mathcal{O}_Y(V)$ は有限生成 $\mathcal{O}_X(U)$ 代数である.

なお，X が局所ネーターならば $\mathcal{O}_Y(V)$ が $\prod_{\beta\in B'}\mathcal{O}_Y(V'_\beta)$ の部分加群であることから有限生成が出るが, 局所ネーターと仮定しないのでもう少し議論を要した.

略解 5.7（ヒントと違う時期に書いたので異なる道筋になってしまいました.）

前問の略解と同様に U,U_i をとり U'_α をとる．$f^{-1}(U'_\alpha)=f^{-1}(U_i)\times_{U_i}U'_\alpha$ なので，$f^{-1}(U'_\alpha)$ はアフィンであり，$\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U'_\alpha))$ は有限 $\mathcal{O}_X(U'_\alpha)$ 代数すなわち有限生成 $\mathcal{O}_X(U'_\alpha)$ 加群である．$\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U'_\alpha))$ の生成系 $(x_{\alpha k})_{k\in K_\alpha}$ をとる．前問の略解と同様に，分母を払って $x_{\alpha k}\in\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ としてよく，前問の略解と同様にこれらの元で $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ が（$\mathcal{O}_X(U)$ 加群として）生成される.

略解 5.8 ヒントがそのまま略解です.

略解 5.9 $\Omega^1_{B/A} = B\cdot ds/B\cdot dt = (B/ns^{n-1})\cdot ds$ なので, k の標数が n を割らないとき, $\Omega^1_{B/A} = (B/s^{n-1})\cdot ds$ であり，k の標数が n を割らないとき，$\Omega^1_{B/A} = B\cdot ds$ である.

略解 5.10 ヒントがそのまま略解です.

略解 6.1 $h*(g*f)$ と $(h*g)*f$ を結ぶホモトピーとして例えば

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4}{1+s}\cdot t) & (0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}) \\ g(4\cdot(t-\frac{1+s}{4})) & (\frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}) \\ h(\frac{4}{2-s}\cdot(t-\frac{2+s}{4})) & (\frac{2+s}{4} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

がある．$f*c_{f(0)}$ と f を結ぶホモトピーとして例えば

$$H(t,s) = \begin{cases} f(0) & (0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}) \\ f(\frac{2}{1+s}\cdot(t-\frac{1-s}{2})) & (\frac{1-s}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

がある．$f^{-1}*f$ と $c_{f(0)}$ を結ぶホモトピーとして例えば

$$H(t,s) = \begin{cases} f(t) & (0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}) \\ f(\frac{1-s}{2}) & (\frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}) \\ f(1-t) & (\frac{1+s}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

がある．他は同様.

略解 6.2 (1): $\coprod_{n\in\mathbb{N}} S^1 \xrightarrow{(n)} \coprod_{n\in\mathbb{N}} S^1 \xrightarrow{(1)} S^1$．ただし n は n 回転する連続写像．S^1 の点の任意の近傍に対し，連結成分を 1 つとり長さが一周の x 倍だとすると $n > 1/x$ なる n のところで破綻する．(2): 2 を 2 元離散位相空間とし，$X = 2^{\mathbb{N}}$ とし，$n\colon X \to 2$ を第 n 成分への射影とし，$\coprod_{n\in\mathbb{N}} X \xrightarrow{(\mathrm{id},n)} X\times 2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X = 2^{\mathbb{N}}$ を考える．p と $p\circ q$ は直積からの射影なので自明に被覆写像である．q は被覆写像でないことを示そう．$X\times 2$ の空でない任意の開集合 U に対し，q による逆像の個数が定数でないことを示せばよい．U を縮めて，有限集合 $J\subset\mathbb{N}$ と元 $a_j, a\in 2$ をに対して $U = \prod_{j\in J}\{a_j\}\times\prod_{n\in\mathbb{N}\setminus J} 2\times\{a\}$ としてよい．$x, y\in U$ を，$n\in\mathbb{N}\setminus J$ に対し $x(n) = a, y(n) \neq a$ なる元とすると，$q^{-1}(x)$ は各 $n\in\mathbb{N}\setminus J$ に 1 点ずつあるので無限集合であり，$q^{-1}(y)$ は各 $n\in\mathbb{N}\setminus J$ にはなく $j\in J$ に高々 1 点ずつあるので有限集合である．(3): $U\subset X$ を閉でない開集合として，$X\to X\sqcup U\to X$.

略解 6.3 (1): No：各点の逆像が離散でない．(2): No：$a\in\mathbb{R}$ を $1\in[-1,1]$ に行く点とする（例えば $a=\pi/2$）と，任意の近傍 $U\ni a$ に対して，十分小さい $\varepsilon>0$ に対し U は $1-\varepsilon$ の逆像を 2 点以上含むので，a で局所同相でない．なお $(-1,1)$ とその逆像に制限すれば被覆写像になる．(3): Yes：同相写像である．(4):（$n\geq 1$ ならば）No：$y\in\mathbb{R}^n/\sim$ に対する逆像の個数を $f(y)$ とおくと，被覆写像ならば f は局所定数写像になるはずだが，y が 0（の像）のとき $f(y)=1$，それ以外のとき $f(y)=2$ である．なお 0 とその像の補集合に制限すれば被覆写像になる．(5): Yes：各点 $y\in S^n/\sim$ に対し，その逆像は 2 点からなり，$\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通りこの 2 点を通らない超平面 H を 1 つとると，$S^n\setminus H$ は 2 つの連結成分 U_1, U_2 からなり，$U_1\to U_2\colon (x_1,\dots,x_{n+1})\mapsto(-x_1,\dots,-x_{n+1})$ は同相写像であり，商写像の U_1 や U_2 への制限も像への同相写像であり，したがって被覆写像である.

略解 6.4 $\phi\colon Y \to Z$ を次のように定める．$y' \in Y$ に対し，Y 上のパス $f\colon y \rightsquigarrow y'$ をとり，これと p を合成して得られる X 上のパス $p \circ f\colon x \rightsquigarrow p(y')$ の，z を始点とするリフト $\widetilde{p \circ f}\colon z \rightsquigarrow z'$（命題 6.20）をとり，$\phi(y') = z'$ とする．well-defined 性を示す：$f_2\colon y \rightsquigarrow y'$ を別のパスとすると，Y の基本群は自明なので f と f_2 の間の（端点を保つ）ホモトピー H が存在し，$p \circ H$ は $p \circ f$ と $p \circ f_2$ の間のホモトピーであり，これのリフト $\widetilde{p \circ H}$（命題 6.21）は $\widetilde{p \circ f}$ と $\widetilde{p \circ f_2}$ の間のホモトピーになる．したがって $\widetilde{p \circ f}$ と $\widetilde{p \circ f_2}$ は終点を共有する．すなわち ϕ は well-defined である．ϕ は構成から局所同相写像でありとくに連続である．

$\pi_1(Z, z) \to \pi_1(X, x)$ の単射性は命題 6.21 から従う．

ϕ の制限により写像 $\phi_x\colon p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$ が定まる．path lifting の定める全単射 $\pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$ による $\phi_x^{-1}(z)$ の逆像は，構成より $\pi_1(X, x)$ の部分群 $\pi_1(Z, z)$ に一致する．逆に，部分群 $H \subset \pi_1(X, x)$ が与えられたとき，Y 上の同値関係 $\sim$ を，パス $f_i\colon y \rightsquigarrow y_i$ に対し，$y_1 \sim y_2 \overset{\text{def}}{\iff} p \circ (f_1^{-1} * f_2) \in H$ で定めると，$Y/{\sim} \to X$ は被覆空間であり Z に同型になる．これにより求める対応を得る．

略解 6.5 天下り式だが，$D = \{z \in \mathcal{H} \mid |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2\}$ と定めると

- 任意の $z \in \mathcal{H}$ に対し，$g \in G$ が存在し，$g(z) \in D$ が成り立つ．
- $g \neq 1$ かつ $z, g(z) \in D$ ならば，「$\Re(z) = \pm 1/2$ かつ $g(z) = z \mp 1$」または「$|z| = 1$ かつ $g(z) = -1/z$」の少なくとも一方が成り立つ．
- $g \neq 1$ かつ $z = g(z) \in D$ ならば，「$z = \omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ かつ $g \in \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$」または「$z = \omega + 1 = (1 + \sqrt{-3})/2$ かつ $g \in \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle$」または「$z = i = \sqrt{-1}$ かつ $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$」の 1 つが成り立つ．（最初の 2 つの行列は G の中で位数 3 である．）

すなわち D は完全代表系に近く，このような領域のことを基本領域という．証明は省略する．例えば [Ser73, Theorem VII.1] を見てください．(1) 上記のことを使うと，i, ω の軌道の外の点 z の安定化群 $\mathrm{Stab}(z) := \{g \in G \mid g(z) = z\}$ は自明であることが分かる．一方，i の安定化群は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を含み，$\omega = \exp(2\pi i/3)$ の安定化群は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を含むので，これらの点の近傍では被覆写像でない．(2) 上記のように G' をとると，i や ω の安定化群も自明であり，$G' \subset G$ は正規部分群なので i や ω の G 軌道上の点の安定化群も自明である．したがって G' の作用は完全不連続（すなわち，各点 z に対して近傍 U が存在して任意の $g \in G' \setminus \{1\}$ に対して $g(U) \cap U = \emptyset$）であり，$\mathcal{H} \to \mathcal{H}/G'$ は被覆写像である．

略解 6.6 略．

略解 7.1 全部書くと多すぎるので少しだけ．

例 7.4(5): $x \in X$ に対する恒等射は $r = 0$ に対する連続写像 $f\colon [0, 0] \to X$ を $f(0) = x$ と定めたもの．なお，定義 6.14 の基本亜群とは異なり，恒等射以外の射に逆射は存在しない．

例 7.4(14): 合成 $\mathrm{Hom}(i, i') \times \mathrm{Hom}(i', i'') \to \mathrm{Hom}(i, i'')$ を定めるところがポイントである．左辺が空ならば何もすることはない．左辺が空でないとき，$i \prec i'$ かつ $i' \prec i''$ なので $i \prec i''$ であり，左辺も右辺も 1 点集合なので写像がただ 1 つある．結合律は自明に成り立つ（というのは，$\mathrm{Hom}(i, i''')$ の 2 元が等しいことをみる必要があるが，これは高々 1 元集合なので当然等しい）．

例 7.4(13): $m \in \mathrm{Hom}(s, s')$ かつ $m' \in \mathrm{Hom}(s', s'')$ ならば，$(m' * m) * s = m' * (m * s) = m' * s' = s''$ なので $m' * m \in \mathrm{Hom}(s, s'')$．ちなみにこの圏は S が 1 点集合ならば (12) を M に適用した圏に圏同値であり，M が 1 点モノイドならば (11) を S に適用した圏に圏同値である．一方，S が空でなく M が 1 点でなければ，(11) を商集合 S/M に適用した圏とは圏同値でない：実際，対象 s を始域とする射が 2 本以上存在する．

例 7.8(10): モノイド（や群）M が例 7.4(12) のように定める圏（唯一の対象を $\bullet$ とおく）から例 7.4(6) の k ベクトル空間の圏への関手 F に対し，ベクトル空間 $V := F(\bullet)$ およびモノイドの準同型 $F\colon \mathrm{End}(\bullet) = M \to \mathrm{End}(V)$ が得られ，これは M の表現に他ならない．

例 7.10(3): 位相空間の射 $f\colon Y \to X$ に対し，アーベル群の層の間の随伴 $\mathrm{Hom}_Y(f^{-1}F, G) = \mathrm{Hom}_X(F, f_*G)$ があるのだった．これに $F = f_*G$ を代入することで右辺の id に対応する左辺の元 $a_G\colon f^{-1}f_*G \to G$ が得られる．これが Y 上の層の圏から自身への関手 $f^{-1}f_*$ から id への自然変換 a を与えることを見るには，任意の射 $\phi\colon G \to G'$ に対して等式 $\phi \circ a_G = a_{G'} \circ f^{-1}f_*\phi\colon f^{-1}f_*G \to G'$ を確かめればよいが，これは可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_Y(f^{-1}f_*G, G) & = & \mathrm{Hom}_X(f_*G, f_*G) \\
\downarrow{\scriptstyle \phi\circ} & & \downarrow{\scriptstyle f_*\phi\circ} \\
\mathrm{Hom}_Y(f^{-1}f_*G, G') & = & \mathrm{Hom}_X(f_*G, f_*G') \\
{\scriptstyle \circ f^{-1}f_*\phi}\uparrow & & {\scriptstyle \circ f_*\phi}\uparrow \\
\mathrm{Hom}_Y(f^{-1}f_*G', G') & = & \mathrm{Hom}_X(f_*G', f_*G')
\end{array}
$$

から従う．もう片方（$\mathrm{id} \Longrightarrow f_*f^{-1}$）も同様である．一般に随伴関係から同様に自然変換が得られる．というより，随伴の中にこれらの自然変換が組み込まれているといった方がよいかもしれません．

略解 7.2 (2)a: 環の射の情報を忘れるので忠実でない（例えば $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_{p^2}$ の自己同型で，環 $\mathbb{F}_{p^2}$ の id と p 乗写像に対応するものを考えよ）．位相空間としての任意の射は到底実現できない（例えば $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_{p'}$ の底位相空間（2 点離散空間）の id でない自己同型を考えよ）．本質的全射：スキームの底位相空間は必ず T_0 分離公理を満たす．ちなみに，アフィンスキームの構造を入れることのできる位相空間の条件についてはいろいろ研究されています，興味ある人は spectral space で調べましょう．(2)b: 忠実は明らかに成り立つ．充満は全然だめ．本質的全射は，任意の集合には位相空間の構造を入れられる（例えば離散位相）ので成り立つ．(2)c: 忠実は明らかに成り立つ．充満は，基点を基点にうつす写像以外が実現できないので不成立．本質的全射は，空集合には点付き集合の構造を入れられないので不成立．ただし行先を集合の圏ではなく空でない集合の圏にすれば成り立つ．(2)d: 本質的全射は，この関手は点付き集合の圏への忘却関手（基点として単位元をとる）と (2)c の関手の合成なので不成立．ただし行先を集合の圏ではなく空でない集合の圏にすれば，任意の集合に群構造を入れられる（証明略）ので成り立つ．(2)e: 忠実かつ充満は明らか．本質的全射は，演算が可換でない群が存在するので不成立．

略解 7.3 集合の圏では空集合が始対象，1 点集合が終対象になる．前層の圏でも同様に，空集合が定める定数前層が始対象，1 点集合が定める定数前層が終対象になる．層の圏を考える．層化 $\dashv$ 忘却という随伴（3.5 節）があるので，命題 7.63 より，層化は余極限を保ち，忘却関手は極限を保つ．始対象は余極限なので，空集合が定める定数前層の層化，すなわち空集合が定める定数層が始対象である．終対象は極限なので，終対象 T があるとしたらそれは忘却関手により 1 点集合が定める定数前層にうつらねばならず，すなわち T は 1 点集合が定める定数層でなければならない．これが実際に終対象であることは容易に確認できる．

略解 7.4 任意の位相空間 Z に対して，$\mathrm{Hom}(X,Z)\to\mathrm{Hom}(Y,Z)\rightrightarrows\mathrm{Hom}(Y\times_X Y,Z)$ が差核図式になることを示す．まず，集合の圏に行くことで，左の射が単射であることは分かる．また，差核の元 $f\in\mathrm{Hom}(Y,Z)$ は写像 $\bar{f}\colon X\to Z$（まだ連続か分からない）と p との合成であることが分かる．$\bar{f}$ の連続性を確かめればよい．これは局所的に示せるので，X を縮めて p は直積からの射影だとしてよく，このとき連続性は明らかである．

略解 7.5 例えば階数有限自由 $\mathbb{Z}$ 加群の圏を考える．この圏の射 $M\to N$ に対し，通常の $\mathbb{Z}$ 加群としての核がこの圏での核になり，通常の $\mathbb{Z}$ 加群としての余核を torsion で割ったものがこの圏での余核になる．したがってこの圏は核と余核をもつ．一方で，射 $f=2\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ に対し，$\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Coker}(f)$ は 0 なので，アーベル圏の定義に登場する射 $\mathrm{Coim}(f)\to\mathrm{Im}(f)$ は f そのものになり，これは同型射ではないので，この圏はアーベル圏ではない．

略解 8.1 連続性の定義や直積位相の定義から，作用が連続であることは，各 $x,y\in X$ に対し部分集合 $G(x,y):=\{g\in G\mid g(x)=y\}$ が開であることと同値である．これが成り立つとき，とくに $\mathrm{Stab}(x)=G(x,x)$ は開である．逆に $\mathrm{Stab}(x)$ がすべて開だとすると，$G(x,y)$ は空であるかまたは $\mathrm{Stab}(x)$ の平行移動なので，開である．（$G\times G\to G$ が連続なので，平行移動は連続さらには同相である．）

略解 8.2 G を副有限群とする．定義より，G は離散有限群の射影極限 $\varprojlim_i G_i$ と書ける．これは $\{(g_i)\in\prod_i G_i\mid\phi_{ij}(g_j)=g_i\}$ に等しく，各 i,j（$i\leq j$）に対する条件「$\phi_{ij}(g_j)=g_i$」は直積の閉集合（開集合でもあるが）を定めるので，G は有限群の直積の閉部分集合である．問題の性質は有限離散位相空間で成り立ち，直積と閉部分集合に遺伝するので，G はその性質を満たす．

略解 8.3 G が副有限と限らない位相群のとき，有限集合 S への G の連続作用は有限商 $\mathrm{Im}(G\to\mathrm{Bij}(S))$ を経由するので，G の副有限完備化（定義 8.10）の作用を考えることと同値になるので，ヒントに述べた群が現れる．

略解 8.4 答えだけ：L/K が分離ならば，分離な既約 3 次多項式 f を用いて $L=K[x]/(f(x))$ と書けて，$L\otimes_K L\cong(K[x]/(f(x)))[y]/(f(y))$ となる．L/K がガロアならば，f の解は L 内に 3 つあり，f は 1 次式 3 つの積に分解し，この環は $L\times L\times L$ に同型である．ガロアでないならば，f の解は L 内にちょうど 1 つで，$f(y)$ は $y-x$ と 2 次式 $g(y)$ との積に分解し，$M=L[y]/g(y)$ とおくと（これは K 上 6 次の体であり）この環は $L\times M$ に同型である．

L/K が非分離なら，（標数は 3 であり，）$L=K[x]/(x^3-a)$ と書けて，$L\otimes_K L\cong(K[x]/(x^3-a))[y]/(y^3-a)$ は $\varepsilon:=y-x$ とおくことで $L[\varepsilon]/(\varepsilon^3)$ に同型である．これは体の直積ではない．

略解 9.1 ヒントがそのまま略解です．

略解 10.1 Z の唯一の点を z とおく（素イデアル $(2)\subset\mathbb{Z}$ に対応する）．

$j^{-1}(F)$ は層の開部分スキームへの制限なので，$\mathcal{O}_X$ 加群の層としての逆像 j^*F に一致し，命題 4.30 より $\mathbb{Z}[1/2]$ 加群 $\mathbb{Z}[1/2]$ に対応する準連接層である．同命題より，$j_*j^{-1}(F)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}[1/2]$ に対応する準連接層である．$j_*j^{-1}(F)_z=\varinjlim_{b\nmid 2}\mathbb{Z}[1/2]\otimes\mathbb{Z}[1/b]=\mathbb{Q}$ であり，任意の開集合 $V\ni z$ に対し $(j_*j^{-1}F)(V)\to j_*j^{-1}(F)_z$ は単射であることに注意する．命題 10.7 から，$V\not\subset U$ に対しては $(j_!j^{-1}F)(V)=0$ であり，$V=D(a)\subset U$ に対しては $(j_!j^{-1}F)(V)=(j_*j^{-1}F)(V)=\mathbb{Z}[1/a]$ である．

1 点集合 $Z=\{z\}$ への逆像 $i^{-1}F$ は，点 z での茎 $\mathbb{Z}_{(2)}=\bigcup_{2\nmid b}\mathbb{Z}[1/b]$ を大域切断とする層である．したがって $V\ni z$ に対しては $(i_*i^{-1}F)(V)=\mathbb{Z}_{(2)}$ であり，$V\not\ni z$ に対しては $(i_*i^{-1}F)(V)=0$ である．

まとめると，命題 10.6 の完全列の V での切断は次のようになる．$V = D(a) \subset U$（すなわち $2 \mid a$，すなわち $z \notin V$）に対しては，$0 \to \mathbb{Z}[1/a] \to \mathbb{Z}[1/a] \to 0 \to 0$ であり，これは完全である．$V = D(a) \not\subset U$（すなわち $2 \nmid a$，すなわち $z \in V$）に対しては，$0 \to 0 \to \mathbb{Z}[1/a] \to \mathbb{Z}_{(2)} \to 0$ であり，これは完全ではない．ただし任意の切断 $f \in \mathbb{Z}_{(2)}$ に対し，$f = c/b$（$2 \nmid b$）と書くと，$f|_{D(ab)}$ は像に入り，$f|_{D(2a)} = 0$ も像に入り，$D(a) = D(ab) \cup D(2a)$ なので，もとの系列が層の完全列であることには矛盾しない．ところで，準連接層の完全列に対しては任意のアフィン開集合での切断が完全になる（命題 10.31）ので，$j_! j^{-1} F$ と $i_* i^{-1} F$ の少なくとも一方は準連接でない．一方が準連接ならば他方は準連接層の射の核または余核なので準連接になるので，結局どちらも準連接でない．（$j_!$ や i^{-1} は準連接を保たない．）

略解 10.2 (1): $V \subset U$ を開集合の包含とする．$k\colon V \to U, j\colon U \to X$ を包含写像とする．層 F に対し $F(U) = \mathrm{Hom}(j_! \mathcal{O}_U, F)$，$F(V) = \mathrm{Hom}(j_! k_! \mathcal{O}_V, F)$ であり，制限写像 $F(U) \to F(V)$ は $\phi\colon j_! k_! \mathcal{O}_V \to j_! \mathcal{O}_U$ との合成である．なお ϕ は随伴性（命題 3.47）から定まる射 $k_! \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_U$ に $j_!$ したものである．命題 3.48 より ϕ は単射なので，F が入射的層ならば $F(U) \to F(V)$ は全射である．

(2): ヒントがそのまま略解です．

(3): $V \subset U$ を開集合の包含とする．F が flasque であることと (2) より $F(U) \to F''(V)$ が全射なので，$F''(U) \to F''(V)$ も全射である．

略解 10.3 複体になること：2 回合成したものを計算すると，j と j'（$j \neq j'$）を除外した項が符号 $(-1)^{j+j'}$ と $(-1)^{j+j'-1}$ で出てくるので相殺する．細分が誘導する射が複体の射になること：容易．コホモロジーに誘導する射が写像 $J \to I$ のとり方によらないこと：$\sigma, \sigma'\colon J \to I$ を 2 つの写像とすると，

$$L\colon C^p(\mathcal{U}, F) \to C^{p-1}(\mathcal{V}, F)\colon f \mapsto \left(Lf\colon (j_0, \ldots, j_{p-1}) \mapsto \sum_{k=0}^{p} (-1)^k f_{\sigma(j_0) \ldots \sigma(j_k) \sigma'(j_k) \ldots \sigma'(j_{p-1})} \right)$$

が $\rho(\sigma')$ と $\rho(\sigma)$ の間のホモトピーを与える（計算略）．ホモトピーの定義，およびこれを示せばよいことについてはホモロジー代数の教科書を見てください．

略解 10.4 例 4.13 の被覆 U_0, U_1 はアフィン開被覆なので，命題 10.35 よりこの開被覆に関するチェックコホモロジーを計算すればよい．交代的コチェイン（系 10.36 の証明を参照）の複体を用いて計算する．H^0 と H^1 は $k[t_1/t_0] \otimes k[t_0/t_1] \to k[t_1/t_0, t_0/t_1]$ の核と余核であり，$H^0 = k, H^1 = 0$ を得る．（どうせなら一般の整数 n に対する $\mathcal{O}(n)$ のコホモロジーを求めさせてもよかったかもしれません．）

略解 12.1 定義を確認すれば分かる．なお逆対応は，前層 P に対して $\mathcal{C}/X$ の充満部分圏 $\bigcup_{V \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} P(V)$ を対応させることで得られる．

略解 12.2 (1): これは引き戻しの記述と篩の定義より明らか．(2): Grothendieck 位相の定義の局所性を適用したいので，$Y \to R$ に対し $R' \times_X Y \in J(Y)$ を示せばよいが，$R \subset R'$ なので $Y \to R'$ であり，(1) より $R' \times_X Y = Y$ であり，Grothendieck 位相の定義よりこれは $J_{\mathcal{T}}(Y)$ に属する．

略解 12.3 底変換で保たれることを確かめる．$R \in J(X)$ とする．ある $\mathcal{X} = (X_i \to X)_{i \in I} \in \mathsf{Cov}(X)$ に対し $R \supset R(\mathcal{X})$ である．任意の射 $Y \to X$ に対し，$R \times_X Y \supset R(\mathcal{X}) \times_X Y = R(\mathcal{X} \times_X Y)$ であり，被覆が底変換で保たれることより $\mathcal{X} \times_X Y = (X_i \times_X Y \to Y)_{i \in I} \in \mathsf{Cov}(Y)$ なので，$R \times_X Y \in J(Y)$ である．

局所性を確かめる．$R \in J(X)$ とする．前段落と同様に $R \supset R(\mathcal{X})$ である．R' を篩とし，任意の射 $Y \to R$ に対し $R' \times_X Y \in J(Y)$ と仮定する．とくに Y として X_i をとることで，$R' \times_X X_i \in J(X_i)$ であり，した

がってある $\mathcal{X}_i = (X_{ij} \to X_i)_{j \in J_i} \in \mathsf{Cov}(X_i)$ に対し $R' \times_X X_i \supset R(\mathcal{X}_i)$ である．被覆が合成で保たれることより，$\mathcal{X}' := (X_{ij} \to X)_{i \in I, j \in J_i} \in \mathsf{Cov}(X)$ である．$X_{ij} \to X_i$ が $R' \times_X X_i$ に属することから，$X_{ij} \to X$ は R' に属する．すなわち R' は $R(\mathcal{X}')$ を含むので，$R' \in J(X)$ である．

$F \in \hat{C}$ を前層とする．$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R, F)$ の元とは，$\prod_{V \in R} F(V)$ の元であって制限と可換なものである．$\mathcal{X} = (X_i \to X)_{i \in I} \in \mathsf{Cov}(X)$ で $R = R(\mathcal{X})$ のとき，$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R(\mathcal{X}), F)$ の元とは，$(f_i) \in \prod_{i \in I} F(X_i)$ であって任意の対象 V と任意の $i, j \in I$ と任意の射 $\phi_i \colon V \to X_i$ と $\phi_j \colon V \to X_j$ に対し $\phi_i^*(f_i) = \phi_j^*(f_j)$ を満たすもの全体の集合に等しいことが分かる．ファイバー積があると仮定しているので，条件は $V = X_i \times_X X_j$ で確かめればよく，結局これは $\prod_{i \in I} F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(X_i \times_X X_j)$ の差核に等しい．位相に関する層と仮定すれば前位相に関して層になるのは明らかである．逆に，前位相に関する層であると仮定すると，$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R(\mathcal{X}), F)$ は全単射である．R を $R \supset R(\mathcal{X}_i)$ なる篩とすると，上記の写像は $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R, F) \to \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R(\mathcal{X}), F)$ と分解する．右側の写像が単射であることを示せば左側の写像が全単射であることが従う．$V \in R$ に対し，$V \times_X \mathcal{X} \in \mathsf{Cov}(V)$ なので $F(V) \to \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R(V \times_X \mathcal{X}), F)$ は全単射である．すなわち，$R(V)$ の元は $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R(\mathcal{X}), F)$ の元から一意的に定まるので，右側の写像は単射である．

略解 12.4 (1): X を各 1 点集合が開でない位相空間とし，F を $F(X)$ が 1 点集合でない層とする．$U = X$ とし U_i として 1 点集合全体をとると，$F'(U) = F(X)$ は 1 点集合ではなく $\prod_i F'(U_i) = \prod_i F(\emptyset)$ は 1 点集合なので，張り合わせ条件を満たさない．(2): $F'(U_i)$ の元 $s_i = (s_{i,V})_{V \in \mathrm{Open}(X), V \subset U_i}$ をとる．$V' \subset V$ に対し $s_{i,V}|_{V'} = s_{i,V'}$ である．2 通りの制限が一致しているとする：すなわち，$V \subset U_i$ かつ $V \subset U_j$ のとき $s_{i,V} = s_{j,V}$ である．$F'(U)$ の元を定めたいので，$W \in \mathrm{Open}(X)$ で $W \subset U$ とする．U_i は X の開集合と U の共通部分なので，$W \cap U_i \in \mathrm{Open}(X)$ である．$s_{i, W \cap U_i}$ の張り合わせとして $t_W \in F(W)$ を得る．構成より，$W' \subset W$ に対し $t_W|_{W'} = t_{W'}$ であり，$W \subset U_i$ ならば $t_W = s_{i,W}$ である．したがって $(t_W)_{W \in \mathrm{Open}(X), W \subset U}$ が $F'(U)$ の元 t を定める．一意性は略．

略解 12.5 (1): A 加群の射 $t = 1 \otimes s \colon B \otimes_A B \to B \otimes_A A = B$ に対し，$f \circ s + t \circ (i_1 - i_2) = \mathrm{id}_B$ が成り立つ．$(i_1 - i_2)(b) = 0$ ならば上式に b を代入して $b = f(s(b))$ を得る．(2): $C = B$ とすると $B \otimes_A B \to B \colon b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$ は（$B \to B \otimes_A B \colon b \mapsto b \otimes 1$ の）セクションである．(3): (2) の条件を満たす $A \to C$ で底変換した複体は (1) より完全であり，忠実平坦なのでもとの複体も完全である．

略解 13.1 両方向の写像はすでに与えている．やや非自明なのは，離散 G 加群 M に対し $M = \varinjlim_L M^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)}$ である．任意の元 $m \in M$ に対し，$\mathrm{Stab}(m)$ は開部分群であり，単位元の基本近傍系としてガロアな L/K に対する $\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$ がとれるので，m はある L に対する $M^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)}$ に属する．

略解 13.2 $\zeta(X,s)$ は

$$\begin{aligned}
\zeta(X,s) &= \prod_{x\in|X|_0}(1-|\kappa(x)|^{-s})^{-1}\\
&= \exp\Bigl(-\sum_{m\geq 1}\#\{x\in|X|_0 \mid |\kappa(x)|=q^m\}\log(1-q^{-ms})\Bigr)\\
&= \exp\Bigl(-\sum_{m\geq 1}\#\{x\in|X|_0 \mid |\kappa(x)|=q^m\}\sum_{k\geq 1}\frac{(q^{-s})^{mk}}{k}\Bigr)\\
&= \exp\Bigl(-\sum_{n\geq 1}\frac{(q^{-s})^n}{n}\sum_{m|n}m\#\{x\in|X|_0 \mid |\kappa(x)|=q^m\}\Bigr)
\end{aligned}$$

と変形できる．ただし最後の等号では $mk=n$ とおいた．$Z(X,q^{-s})=\exp\bigl(\sum_{n\geq 1}\#X(\mathbb{F}_{q^n})\frac{(q^{-s})^n}{n}\bigr)$ なので，あとは等式 $\sum_{m|n}m\#\{x\in|X|_0 \mid |\kappa(x)|=q^m\}=\#X(\mathbb{F}_{q^n})$ を示せばよい．

$X(\mathbb{F}_{q^n})=\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec}\mathbb{F}_{q^n},X)$ にはフロベニウス射 Frob_q（$\mathbb{F}_{q^n}$ の自己同型 $x\mapsto x^q$）が作用する．写像 $f\colon X(\mathbb{F}_{q^n})\to|X|_0$ は，n の各約数 m に対し，大きさ m の Frob_q 軌道と剰余体が $\mathbb{F}_{q^m}$ である極大イデアルの間に一対一対応を与える．したがって等式は成り立つ．