基礎数学 A 演習補足資料：像と逆像と和集合と共通部分

松本雄也 (matsumoto.yuya.m@gmail.com)

2019 年 06 月 07 日（金）

1 (概要)**.** 写像 $f\colon X \to Y$ があるとき，X の部分集合の f による 像 および Y の部分集合の f による 逆像 が定義される．この 2 つの操作と，種々の演算や関係（和集合，共通部分，補集合，包含関係，……）との間にさまざまな性質が成り立つ．例えば「逆像は共通部分を保つ（すなわち，$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が成り立つ）」など．

これらの性質は，基本的には，逆像や共通部分などがどのような要素からなる集合だったかを（定義に立ち戻って）確認して，要素をとって議論すれば証明できる．

本稿では，ちょっと異なる視点から，像や逆像が和集合や共通部分を保つかどうかについて論じる．興味をもったら例えば末尾に挙げた文献などを眺めてみてください．

まず，集合 X の部分集合の間の包含関係について，基礎的な性質をいくつか確認する．

2 (和集合と包含関係)**.** A, B, C を X の部分集合とする．
「$A \cup B \subset C$」と「$A \subset C$ かつ $B \subset C$」は同値であることを示せ．

3 (共通部分と包含関係)**.** A, B, D を X の部分集合とする．
「$D \subset A \cap B$」と「$D \subset A$ かつ $D \subset B$」は同値であることを示せ．

4 (米田の補題)**.** 次の性質は，圏論における「米田の補題」の特殊な場合とみなせる．

- A_1, A_2 を X の部分集合とする．X の任意の部分集合 S に対して $S \subset A_1$ と $S \subset A_2$ が同値であるならば，$A_1 = A_2$ である．
- A_1, A_2 を X の部分集合とする．X の任意の部分集合 T に対して $A_1 \subset T$ と $A_2 \subset T$ が同値であるならば，$A_1 = A_2$ である．

さて，X, Y を集合とし，$f\colon X \to Y$ を X から Y への写像とする．

5 (像と逆像の定義)**.** X の部分集合 A の像とは $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ であり，Y の部分集合 B の逆像とは $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ である．

6 (随伴性その 1)**.** A を X の部分集合，B を Y の部分集合とするとき，次が成り立つ．

$$f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B).$$

この性質を <u>随伴性</u> と言い，逆像は像の <u>右随伴</u> である，像は逆像の <u>左随伴</u> である，と言う（右左は包含関係の右側か左側かを指す）．これを用いていろいろなことが証明できる．

7 (像が和集合を保つこと)**.** A_1, A_2 を X の部分集合とする．Y の部分集合 B に対し，

$$\begin{array}{ccc}
f(A_1 \cup A_2) \subset B & \Longleftrightarrow & A_1 \cup A_2 \subset f^{-1}(B) \\
 & & \Updownarrow \\
f(A_1) \subset B \text{ かつ } f(A_2) \subset B & \Longleftrightarrow & A_1 \subset f^{-1}(B) \text{ かつ } A_2 \subset f^{-1}(B) \\
\Updownarrow & & \\
f(A_1) \cup f(A_2) \subset B & &
\end{array}$$

である（横の同値は随伴性（6 項），縦の同値は和集合の性質（2 項）から従う）．すなわち，$f(A_1 \cup A_2) \subset B$ と $f(A_1) \cup f(A_2) \subset B$ は同値である．4 項より，$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ が分かる．

ポイントは像が右随伴をもつことである（それが具体的に何であるかは重要でない）．

8 (逆像が共通部分を保つこと)**.** B_1, B_2 を Y の部分集合とする．X の部分集合 A に対し，

$$\begin{array}{ccc}
A \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2) & \Longleftrightarrow & f(A) \subset B_1 \cap B_2 \\
 & & \Updownarrow \\
A \subset f^{-1}(B_1) \text{ かつ } A \subset f^{-1}(B_2) & \Longleftrightarrow & f(A) \subset B_1 \text{ かつ } f(A) \subset B_2 \\
\Updownarrow & & \\
A \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) & &
\end{array}$$

である（横の同値は随伴性（6 項），縦の同値は共通部分の性質（3 項）から従う）．すなわち，$A \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ と $A \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ は同値である．4 項より，$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が分かる．

ポイントは逆像が左随伴をもつことである（それが具体的に何であるかは重要でない）．

像が右随伴をもつことから像が和集合を保つことが証明でき，また，逆像が左随伴をもつことから像が共通部分を保つことが証明できた．ということは，逆像の右随伴が存在すれば，逆像が和集合を保つことが証明でき，また，像の左随伴が存在すれば，像が共通部分を保つことが証明できるはずだ．

逆像の右随伴は存在するだろうか？ 実は存在する．

9 (逆像の右随伴の構成)**.** X の部分集合 A に対し，Y の部分集合 $f_*(A)$ を次で定める：

$$f_*(A) = \{y \in Y \mid \forall x \in X,\ y = f(x) \to x \in A\}.$$

なお，これは $f(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ に等しい（このことを確かめよ）．ちなみに，A の像 $f(A)$ は $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ y = f(x), x \in A\}$ と書き直せて，これと対になっている．

10 (随伴性その 2)**.** A を X の部分集合，B を Y の部分集合とするとき，次が成り立つ．

$$B \subset f_*(A) \iff f^{-1}(B) \subset A.$$

すなわち，f_* は逆像 f^{-1} の右随伴である．このことを確かめよ．

11 (逆像が和集合を保つこと)**.** 10 節の随伴性を用いて，逆像が和集合を保つこと（すなわち，B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき，$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ が成り立つこと）を示せ．ヒント：7 項，8 項の議論をまねよ．

像の左随伴は存在するだろうか？ こちらは存在しないことが証明できる．

12 (像が左随伴をもたないこと)**.** 一般に，像は左随伴をもたないことを示せ．

なお，$g\colon \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ が（$f\colon X \to Y$ による）像の左随伴であるとは，g は包含関係を保ち（すなわち，$B_1 \subset B_2$ ならば $g(B_1) \subset g(B_2)$ であり），かつ，X の部分集合 A と Y の部分集合 B に対して $g(B) \subset A$ と $B \subset f(A)$ が同値になることである．

ヒント：直接確かめることもできる．次のようにしてもよい．もし左随伴をもつならば，7 項や 8 項と同様の議論により，像が共通部分を保つことが証明できる．しかしそれは一般には正しくない（すなわち，ある集合 X, Y，ある写像 $f\colon X \to Y$，および X のある部分集合 A_1, A_2 に対して $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ である）．

13. 本稿では集合の要素をとる議論をあまり行っていない．そのメリットとして，要素をとるという概念のない場面でも，例えば 6 節の随伴性と 2,4 節の性質さえ成り立っていれば 7 節の結果が成り立つことが分かる．議論の特徴的な部分を抽出して，当初の状況と一見かけ離れた場面にも適用できるようにする，というのは数学の楽しみの一つですね．

14 (参考文献，あるいはネタ元)**.** interactions of images and pre-images with unions and intersections in nLab, `https://ncatlab.org/nlab/show/interactions+of+images+and+pre-images+with+unions+and+intersections`, 2019 年 6 月 1 日時点.