「指数定理からゲージ理論へⅢ」講義ノート

予備知識
(接続、曲率、特性類、Dirac作用素)

古田幹雄 (述)

田中祐二 (記)

2001. 9 .22
（於　蓼科）

目 次

このノートは蓼科での勉強会の初日に、参加者が蓼科に着いたのか着いてないかを考える間も与えず、古田氏がこれから続く講演のための準備として速口でまくしたてたものを記録したものである。会場の蓼科山荘は標高２０００メートルの位置にあり、９月にもかかわらず１０度を軽く下回る気温で、うだるような暑さの下界からこの地に来たものにとってはこたえる寒さだった。しかし、そんなことはすぐに問題ではなくなった。なぜなら、それにもまして古田氏の恐るべき速口[1]と速書きに、参加者はまさに心身ともに凍えあがったからである。いや、これはこれから始まるこの勉強会のテンションの高さを予感あるいは期待させるような震えであったのであろう。

1 接続

G を Lie 群（具体的には $GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C}), O(n), U(n)$ を想定すればよい。)、$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし、V を G の表現空間（具体的には $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$）、準同型 $\rho : G \to GL(V)$ を G の表現とする。ここで、X を多様体として X 上の G 主束 $P \xrightarrow{G} X$ を考える。このとき、先の表現 ρ を使うと P に同伴するベクトル束 $E = P \times_G V$ が構成される。以下では、P, E に対して次の３つの方法で接続を定義しそれらの間の関係について述べることにする。

- 局所座標を使った定義
- 共変微分による定義
- 主 G 束の水平方向としての定義

接続の定義を与える前にいくつか記号の準備をしておく。X の開被覆 $\{U_\alpha\}$ を各 U_α 上で P が自明化されているものを取っておく。つまり、

$$P = \bigcup_\alpha U_\alpha \times G$$

とする。また、P の変換関数を

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$$

と書く。ここで $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ である。このとき、P の切断 $S = \{s_\alpha\}$ を $s_\alpha : U_\alpha \to G$ で

$$g_{\alpha\beta} s_\beta = s_\alpha \quad \text{on } U_{\alpha\beta}$$

[1]古田氏に多少早口だったかもしれないな、とは思わなくもなかったけど、と指摘されたことをおことわりしておきます。

を満たすものとして定義する。

P の同伴ベクトル束についても P のときと同様 $E = \bigcup_\alpha U_\alpha \times V$ としておき、E の変換関数は

$$g_{\alpha\beta}^V : U_{\alpha\beta} \to GL(V)$$

と書くことにする。

1.1 接続の局所座標を使った定義

定義 1.1. 主 G 束の接続 $A = \{A_\alpha\}$ を $A_\alpha : U_\alpha \to \Omega^1(U_\alpha, End(V))$ で、

$$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

を満たすものとして定義する。

定義 1.2. 同伴ベクトル束の接続 $A = \{A_\alpha^v\}$ を $A_\alpha^V : U_\alpha \to \Omega^1(U_\alpha, End(V))$ で、

$$A_\beta^V = {g_{\alpha\beta}^V}^{-1} A_\alpha^V g_{\alpha\beta}^V + {g_{\alpha\beta}^V}^{-1} dg_{\alpha\beta}^V$$

を満たすものとして定義する。ただし、$G = O(n)$, $U(n)$ のときは A_α^V の像が歪対称 *(*歪エルミート*)* なものだけを考えることにする。

注意 1.3. 式 *(1.1)* は形式的に

$$g_{\alpha\beta}^{-1}(d + A_\alpha) g_{\alpha\beta} = d + A_\beta$$

と書ける。

注意 1.4 (A の住み家). $C_P := \coprod_\alpha U_\alpha \times \mathfrak{g}$ と置き、

$$A_\beta \sim g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$$

で貼り合わせるとファイバー束 $C_P/\sim \to X$ ができる。$C_P/\sim$ はベクトル束でないことに注意。このとき、主 G 束 P の接続は $C_P/\sim$ の切断であると思える。

1.2 接続の共変微分による定義

定義 1.5. ベクトル束 $E \to X$ の共変微分 ∇ を線型写像

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*X \otimes E)$$

で、$f \in C^\infty(X)$, $s \in \Gamma(X, E)$ に対して、

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$$

を満たすものとして定義する。

さらに、$G=U(n), O(n)$ のときは、

$$d(s_0,s_1)=(\nabla s_0,s_1)+(s_0,\nabla s_1)$$

を要求する。（計量を保つ接続。）

局所座標を使った定義との関係 $E|_{U_\alpha}=U_\alpha\times V$, $s|_{U_\alpha}:U_\alpha\to V$ において ∇s を局所的に表示すると、

$$\nabla s|_{U_\alpha}=ds+A_\alpha^V s$$

と書ける。

注意 1.6. さらに、∇ は共変外微分*:*

$$d_\nabla:\Omega^k(E)\to\Omega^{k+1}(E)$$

に拡張できる。ここで、$\Omega^k(E)=\Gamma(\Lambda^kT^*X\otimes E)$ であり、$k=0$ のとき $d_\nabla=\nabla$ である。この拡張は

$$d_\nabla(\omega\wedge s)=d_\nabla\omega\wedge s+(-1)^{deg\,\omega}\omega\wedge d_\nabla s$$

で一意に特徴づけられる。ここで $\omega\in\Omega^\ell(E)$, $s\in\Omega^k(E)$ である。

さらに、

$$d_\nabla:\Omega^k(End(E))\to\Omega^{k+1}(End(E))$$

も定義され、

$$d_\nabla(\alpha\wedge s)=(d_\nabla\alpha)\wedge s+(-1)^{deg\,\omega}\omega\wedge d_\nabla s$$

となる。（この関係式で一意に特徴づけられる。）

線型写像

$$\mathrm{tr}:\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}$$

を考えよう。この写像から

$$\mathrm{tr}:\mathrm{End}\,(E)\to\mathbb{C}$$

が定義できて、次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc}\Omega^k(\mathrm{End}\,(E)) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & \Omega^\ell \\ \downarrow{\scriptstyle d_\nabla} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \Omega^{k+1}(\mathrm{End}\,(E)) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & \Omega^{\ell+1}\end{array}$$

1.3 接続の主 G 束 P の水平分布による定義

主 G 束 $\pi : P \to X$ に対して、G 不変な水平方向を各点で与えることを考える。すなわち、完全列

$$0 \to T_{\text{fiber}}P \to TP \to \pi^* TX$$

の G 不変な分裂を主 G 束の接続 A_P と定義する。

上の完全列の分解を $T_{\text{fiber}}P$ が G の無限小作用で $P \times \mathfrak{g}$ (trivial) になっていると考えることも可能である。すると、分裂は $A_P : TP \to \mathfrak{g}$ つまり、$A_P \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ だと思える。しかし、$A_P \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ ならばすべて主 G 束の接続と言えるかというとそうではない。P のファイバーは Lie 群 G であるが、$g \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ により無限小作用に対応する canonical なものとして Mauer-Cartan 形式 $g^{-1}dg$ がある。$A_P : TP \to \mathfrak{g}$ が接続であるためには、A_P のファイバーへの制限が Mauer-Cartan 形式となっている必要がある。

局所座標を使った定義との関係 局所座標を使って定義された接続 $\{A_\alpha\}$ とは次式で関係する。

$$A_P = g^{-1} A_\alpha g + g^{-1} dg \tag{1.2}$$

この式で第 1 項は水平方向、第 2 項はファイバー方向の成分を与える。つまり、自明化に対応する切断を s_α と書くことにすると、

$$s_\alpha^* A_P = A_\alpha$$

が成立する。

共変微分による定義との関係 E の切断 $s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\pi^* : P \to V$$

を定めることができる。∇s とは π^s を P 上で水平方向に微分したものに他ならない。つまり、正確には、X 上のベクトル場 v とその P 上の水平持ち上げ $\tilde{v}$ に対して

$$\pi^* \langle v, \nabla s \rangle = \langle \tilde{v}, d\pi^* s \rangle$$

が成立する。

2 曲率

主 G 束 P あるいはベクトル束 E に接続を定義すると、その曲率も定義することができる。ここでは前節と同様、曲率に関しても 3 つの定義を与え、それらの関係について述べる。

2.1 曲率の局所座標を使った定義

局所座標を使った定義では、主 G 束の接続は $A = \{A_\alpha\}$, $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ であった。このとき接続 A の曲率 $F(A) := \{F(A_\alpha)\}$ を

$$F(A_\alpha) := dA_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha]$$

で定義する。同伴ベクトル束に対しても同様に、

$$F(A_\alpha^V) := dA_\alpha^V + A_\alpha^V \wedge A_\alpha^V$$

と定義する。

注意 2.1 ($F(A)$ の住み家). 座標変換で曲率は

$$F(A_\beta) = g_{\alpha\beta}^{-1} F(A) g_{\alpha\beta}$$

と変換する。$\mathfrak{g}_P = \coprod U_\alpha \times \mathfrak{g}$ を $F(A_\beta) = g_{\alpha\beta}^{-1} F(A) g_{\alpha\beta}$ で貼り合わせるとベクトル束 $\mathfrak{g}_P \to X$ ができる。曲率 $F(A)$ はこのベクトル束の切断である。

2.2 曲率の共変微分をによる定義

共変外微分の合成

$$d_\nabla \circ d_\nabla : \Omega^k(E) \to \Omega^{k+2}(E)$$

を考える。特に

$$d_\nabla \circ d_\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^2(E)$$

である。このとき、次の事実が成立する。

事実 2.2. $F(\nabla) \in \Omega^2(End(E))$ が存在して

$$d_\nabla^2 s = F(\nabla) \wedge s$$

が成立する。

この $F(\nabla)$ を ∇ の曲率と定義する。

局所座標を使った定義との関係　G の表現 ρ から誘導される写像

$$\rho : \Omega^2(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathrm{End}(V))$$

により、$F(A)$ は $F(\nabla)$ にうつされる。これが $F(A)$ と $F(\nabla)$ の関係である。
　また、$G = U(n), O(n)$ のときは、接続として計量を保つものを考えていた。このとき、曲率は $\mathrm{End}(E)$ の代わりに $\mathfrak{u}(E), \mathfrak{o}(E)$ に値を持つ２形式となる。

注意 2.3 (Bianci 恒等式).

$$d_\nabla F(\nabla) = 0$$

証明. E の切断 s に対して、

$$\begin{aligned} 0 &= d_\nabla^3 s - d_\nabla^3 s \\ &= d_\nabla F(\nabla)s - F(\nabla)(d_\nabla s) \\ &= (d_\nabla F(\nabla))s \end{aligned}$$

□

2.3　曲率の主 G 束 P の水平分布による定義

　主 G 束 P の水平分布による定義では、接続は $A_P \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ で G 不変、ファイバーに制限すると canonical なものに一致するものとして定義された。このとき、A_P の曲率 $F(A_P)$ は dA_P の (水平方向) $\wedge$ (水平方向)-成分として定義される。つまり、v_0, v_1 を X 上のベクトル場、$\tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ をそれらの P 上への水平持ち上げとすると、

$$\pi^* F(A_P)(v_0, v_1) = dA_P(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1)$$

が成立する。

2.4　補足

　以下の事項は講演では述べられなかったのですが、古田幹雄氏が、これだけだと不足だけどないよりはいいでしょうとおっしゃっていたものをそのまま付け加えておきます。

1. 平行移動について．
   ・接続をひとつ固定する．２点 p, q を結ぶ区分的に滑らかな曲線に対して,「水平持ち上げ」が定義される．(正確には p 上のファイバーの

点 $\tilde{p}$ を固定すると，$\tilde{p}$ を始点とする曲線が「水平持ち上げ」として定まる.）

・「水平持ち上げ」を用いて，p のファイバーから q のファイバーへ曲線にそった「平行移動」と呼ばれる写像が定義される.

・「水平持ち上げ」あるいは「平行移動」を用いて接続を定義することも可能である.

2. 平坦接続について.

   ・曲率が恒等的に 0 であることと，平行移動が曲線のホモトピー類のみに依存することとは同値である．このとき接続は「平坦」であるという.

   ・平坦接続に対して，基本群から構造群への準同型が定まる．これを「ホロノミー表現」とよぶ.（正確には，基点上のファイバーの自明化をひとつ固定するごとに定まる.）

   ・平坦接続の同型類は，基本群から構造群への準同型の共役類と，一対一に対応する.

3　特性類

次にベクトル束の特性類を 6 通りの方法で定義する。とはいっても、ここで扱うのは、$\mathbb{R}$ 係数の Chern 類及び Chern 標数のみである。

3.1　公理による特性類の定義

まず、公理を与えることで特性類を定義する方法について述べる。当然、この定義では、きちんと公理を満たす特性類が存在することを示す必要がある。

X を CW 複体、$E \to X$ を $\mathbb{C}^n$ 束とする。このとき、E の Chern 類 $c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ および、Chern 標数 $ch_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Q})$ は、以下で述べる公理を満たすものとして定義される。

まず、$c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ および、$ch_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Q})$ は、自然性と呼ばれる次の条件: $f : X \to X$ に対して

$$c_k(f^*E) = f^*c_k(E)$$

$$ch_k(f^*E) = f^*ch_k(E)$$

を満たさなければならない。また、

$$c := c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

$$ch := ch_0 + ch_1 + ch_2 \cdots$$

に対して

$$c(E_0 \oplus E_1) = c(E_0)c(E_1)$$

$$ch(E_0 \oplus E_1) = ch(E_0) + ch(E_1)$$

$$ch(E_0 \otimes E_1) = ch(E_0)ch(E_1)$$

を満たし、さらに

$$c_0 = 1$$

$$ch_0(E) = \operatorname{rank} E$$

$$c_1 = ch_1$$

も満たし、直線束　$L \to X$ に対して、

$$ch(L) = e^{c_1(L)}$$

でなければならない。

以上の公理により normalization を除いてベクトル束 E の Chern 類及び、Chern 標数は一意的に決まる。Normalization は、例えば、$\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ での $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の法束:

$$\xi \to X$$

で与えることができる。すなわち、

$$H^2(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})) \cong \mathbf{Z}\alpha$$

なので

$$c_1(\xi) = \alpha$$

と normalize する。あるいは一般的な normalization として

$$c_n(E) = e(E)$$

を採用することもできる。ここで、$n = \operatorname{rank} E$ であり、$e(E)$ は Euler 類である。この場合、あらじかじめ例えば Thom 類の制限というように Euler 類を定義しておく必要がある。

3.2　曲率を使った定義

X が多様体のときには、曲率を使って特性類を定義することが可能である。(Chern-Weil 理論)

階数 n の複素ベクトル束 $E \to X$ を考えよう。このとき A を E の接続とすると、その曲率 F_A は $\Omega^2(\mathrm{End}(E))$ の元であった。そこで、

$$\exp : \Omega^2(\mathrm{End}(E)) \to \bigoplus_k \Omega^{2k}(\mathrm{End}(E))$$

を考え、（Taylor 展開で定義する）

$$ch(A) := \mathrm{tr}\left(e^{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A}\right)$$

と定義する。このとき、$ch(A) = \sum_k ch_k(A)$ と書くと、

注意 3.1. $ch_k(A)$ は閉形式である。

証明. Bianki 恒等式より、$d_\nabla F_A = 0$ だから、

$$0 = \mathrm{tr} d_\nabla F_A = d(\mathrm{tr} F_A)$$

したがって、$\mathrm{tr} F_A$ は閉形式である。同じ議論を $e^{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A}$ に使えばよい。 □

次に、$\det : \mathrm{End}\,(E) \to \mathbb{C}$ から

$$\det : (\Omega^0 \oplus \Omega^2)(\mathrm{End}(E)) \to \bigoplus_k \Omega^{2k}(\mathrm{End}(E))$$

を定義し、

$$\sum_k c_k \lambda_k := \det\left(\lambda \mathrm{id}_E + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A\right)$$

と定義する。実は、$c_k(A)$ は $ch_k(A)$ の多項式で書ける。また、

$$c_k(E) := [c_k(A)]$$

は接続 A の取り方に依存しないことが示せる。

3.3 分類空間を使った定義

無限次元 Grassmann 多様体:

$$BU_n = Gr(n) = \{V \subset \mathbb{C}^\infty ; \dim V = n\}$$

と、その上の普遍 $\mathbb{C}^n$ 束:

$$\xi_n \to Gr(n)$$

を考える。ここで

$$\mathbb{C}^\infty := \lim(\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3 \subset \cdots)$$

である。

事実 3.2. X 上の任意の $\mathbb{C}^n$ 束 $E \to X$ に対して

$$f : X \to BU_n$$

が存在して、

$$E \cong f^*\xi_n$$

となる。さらに f は *up to homotopy* で一意的である。

事実 3.3.

$$H^*(BU_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[c_1, c_2, \cdots c_n]$$

$$H^*(BU_n, \mathbf{Q}) = \mathbf{Z}[ch_1, ch_2, \cdots ch_n]$$

ここで、$c_1, c_2, \cdots c_n$ 及び、$ch_1, ch_2, \cdots ch_n$ は次のようなものである。まず、$\mathbb{C}^n$ 束:

$$\oplus_{i=1}^n \pi_i^* \xi_1 \to \underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty}_{n\text{ 個}}$$

を考える。ここで、$\mathbb{C}P^\infty = BU(1)$ であり、π_i は i 成分への射影である。

$$f : \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty \to BU(n)$$

から

$$H^*(BU(n)) \to H{*}(\mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty) = \bigotimes_{n\text{ 個}} H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$$

が定義される。ここで、$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[x_i]$ であり、$x_i \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ は $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ の生成元である。この写像によって、$\mathbb{Z}$ 上 $x_1, \ldots, x_n$ の k 次対称式にうつるものが c_k であり、$\mathbb{Q}$ 上 $\sum_{k=1}^n x_i^k/k!$ にうつるものが ch_k である。

$\mathbb{C}^n$ 束 $E \to X$ に対して、$f : X \to BU(n)$ を使い、

$$c_k(E) := f^* c_k$$

$$ch_k(E) := f^* ch_k$$

と定義する。

3.4 障害類としての定義

X は三角形分割されているとする。階数 n の複素ベクトル束 $E \to X$ を考える。このとき、Chern 類 $c_n(E)$ を、ベクトル束 E が至る所消えない切断を持つための第 1 障害類として定義する。すなわち、

$$c_n(E) \in H^{2n}(X, \pi_{2n-1}(S(\mathbb{C}^n)))$$

である。ここで $S(\mathbb{C}^n)$ は $2n-1$ 次元球面に同相であり、

$$\pi_{2n-1}(S(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbf{Z}$$

である。また、$i < 2n-1$ ならば、

$$\pi_i(S(\mathbb{C}^n)) = 0$$

である。別の言い方では、これは Euler 類の定義をを与えているといってもいい。

次に、ベクトル束 E が至るところ消えない一次独立な 2 つの切断 s_1, s_2 を持つための第 1 障害類として $c_{n-1}(E)$ を定義する。すなわち、

$$c_{n-1}(E) \in H^{2n-2}(X, \pi_{2n-3}(V_2(\mathbb{C}^n)))$$

である。ここで、

$$V_2(\mathbb{C}^n) := \{\mathbb{C}^n \text{ 内の一次独立な 2 つの一次独立なベクトルの対}\}$$

であり、

$$\pi_{2n-3}(V_2(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbf{Z}$$

である。また、$i < 2n-3$ ならば、

$$\pi_i(V_2(\mathbb{C}^n)) = 0$$

である。以下同様に定義する。

3.5 公理と代数的位相幾何をあわせた定義

Grothendieck によるもの　Grothandieck によるベクトル束の分裂原理を使った Chern 類の定義を説明する。この定義では、あらかじめ複素直線束 L の $c_1(L)$ を定義しておく必要がある。階数 n のベクトル束 $E \to X$ に対して、同語反復束

$$\xi_E \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbf{P}(E) \to X$$

を考える。今、$x := c_1(\xi_E) \in H^2(\mathbf{P}(E))$ はわかっている。しかし、今ほしいのは X のコホモロジーの要素である。実は次が成り立つ。

事実 3.4.

$$H^*(\mathbf{P}(E)) \xleftarrow{\cong} H^*(x) \oplus H^*(X)\,x \oplus \cdots \oplus H^*(X)\,x^{n-1}$$

これを使い Chen 類 $c_k(E)$ を x^{n-k} の展開係数として定義する。

Milnor-Stasheff によるもの　階数 n の複素ベクトル束 $E \to X$ に対して、$c_n(E) = e(E)$ がすでに定義されていると仮定する。

$$\pi_k : V_k(E) \to X$$

を考える。このとき、

$$\pi_k^* = \underbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_{k\text{ 個}} \oplus {}^{\exists}E_{n-k}$$

である。ここで、$\mathrm{rank}\, E_{n-k} = n - k$ である。同型:

$$H^{2(n-k)}(X) \xrightarrow{\simeq} H^{2(n-k)}(V_k(E))$$

を使い、$c_{n-k}(E)$ を Euler 類 $c_{n-k}(E_{n-k})$ で定義する。

4　Dirac 作用素

4.1　$Spin$ 群とその表現

特殊直交群 $SO(2m)$ の二重被覆をスピン群と呼び、$Spin(2m)$ と書く。また、$SO(2m)$ の maximal torus:

$$\underbrace{S0(2) \times \cdots \times SO(2)}_{m\text{ 個}}$$

を考え、その二重被覆を T と書くことにする。さらに、$SO(2) = U(1)$ と同一視し、$z \in SO(2m)$ を $z_i \in U(1)$ を使って $z = (z_1, z_2, \ldots z_m)$ と表示し、z の lift を $\tilde{z}$（２価関数）と書くことにしよう。

事実 4.1. *$Spin(2m)$ には、次のような表現:*

$$\Delta_{2m} = \Delta_{2m}^+ \oplus \Delta_{2m}^-$$

がある。

1.

$$trace\,(\tilde{z}|_{\Delta_{2m}^+}) = \sum_{-1/2\text{ が偶数個}} z_1^{\pm\frac{1}{2}} z_2^{\pm\frac{1}{2}} \ldots z_m^{\pm\frac{1}{2}}$$

$$trace\,(\tilde{z}|_{\Delta_{2m}^-}) = \sum_{-1/2\text{ が奇数個}} z_1^{\pm\frac{1}{2}} z_2^{\pm\frac{1}{2}} \ldots z_m^{\pm\frac{1}{2}}$$

ここで、$\tilde{z}, z_n^{1/2}$ は $(z_1, \ldots, z_m$ の多価関数であるが、分岐は $z_1 = \cdots = z_m = 1$ のとき、$\tilde{z} = 1$, $z_k^{\pm 1/2} = 1$ となるよう定めておく。

2. Clifford 積と呼ばれる

$$c : \mathbb{R}^{2m} \to End(\Delta)$$

（あるいは、$c : \mathbb{R}^{2m} \times \Delta \to \Delta$）で、像が

$$Hom(\Delta^+, \Delta^-) \oplus Hom(\Delta^-, \Delta^+)$$

に入り、

$$c(v)^2 = -||v||^2$$

$$v_0 \perp v_1 \Longrightarrow c(v_0)c(v_1) + c(v_1)c(v_0) = 0$$

を満たすものが定義できる。

4.2 $Spin$ 多様体と Dirac 作用素

$2m$ 次元の有向 Riemann 多様体 X を考える。このとき、X が $Spin$ であるとは、TX の構造群が $SO(2m)$ から $Spin(2m)$ に持ち上がるときのことを言う。このバンドルを $P_{Spin} \to X$ と書くことにする。

X が $Spin$ のとき、先の表現を使うと、ベクトル束:

$$S^{\pm} := P_{Spin} \times_{Spin(2m)} \Delta^{\pm} \to X$$

を定義できる。このとき、$S^{\pm}$ 上の Levi-Civita 接続 $\nabla_{S^{\pm}}$ を使うと、

$$\Gamma(S^{\pm}) \xrightarrow{\nabla_{S^{\pm}}} \Gamma(T^*X \otimes S^{\pm}) \xrightarrow{c} \Gamma(S^{\pm})$$

が定義できる。この合成から決まる作用素 $c \circ \nabla_{S^{\pm}}$ を Dirac 作用素と言う。

また、今のは TX と関係のあるバンドルだったが、関係のないのものに対しても Dirac 作用素を定義することができる。今、ベクトル束 $E \to X$ に対して、その接続 ∇_E が与えられているとしよう。このとき、$S^{\pm} \otimes E$ の接続 ∇ を

$$\nabla := 1 \otimes \nabla_{S^{\pm}} + \nabla_E \otimes 1$$

と置くことにより定義できる。この接続 ∇ を使い、

$$\Gamma(S^{\pm} \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*X \otimes S^{\pm} \otimes E) \xrightarrow{c} \Gamma(S^{\pm} \otimes E)$$

の合成から Dirac 作用素 $c \circ \nabla$ が定義できる。これを E を係数とする Dirac 作用素と呼ぶ。

4.3 Dirac 作用素の例

$\Delta \otimes \Delta \simeq \bigoplus \Lambda^k \mathbb{R}^{2m}$ を使い、

$$\Gamma(S \otimes S) = \bigoplus \Omega^k$$

と同一視することで、$E = S = S^+ \oplus S^-$ を係数とする Dirac 作用素は、外微分 d, d^* と関係する。

$E = S = S^+ \oplus S^-$ を係数とする Dirac 作用素

$$D : \Gamma(S^+ \otimes S) \to \Gamma(S^- \otimes S)$$

は、singnature 作用素と呼ばれる。このとき、

$$X \text{ の交叉形式の符号数 } = \dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)$$

となる。

また、

$$D : \Gamma(S^+ \otimes S^+) \to \Gamma(S^- \otimes S^+)$$

は、

$$d + d^* : \Omega^{even} \to \Omega^{odd}$$

と同一視でき、このとき、

$$\chi(X) = \dim(\ker(d + d^*)) - \dim(\operatorname{coker}(d + d^*))$$

となる。

以下に、古田幹雄氏があげた参考文献を紹介しておきます。

参考文献

[1] J.W.Milnor, J.D.Stasheff, "*Characteristic classes*", Princeton University Press, 1974

[2] J.W. モーガン （二木昭人訳）, 「 サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー」, 培風館, 1998

[3] 森田茂之,「 微分形式の幾何学２」(岩波講座　現代数学の基礎９）, 岩波書店, 1997

[4] 吉田朋好, 「ディラック作用素の指数定理」, 共立出版, 1998