

幾何学 I / 幾何学概論 V : レポート問題その 6

6月25日 17:00までに出して下さい。

問題 1. 次の行が完全で、可換になる図式を考えてみる。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & B^1 & \xrightarrow{\psi^1} & C^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f & & \uparrow g & & \uparrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{\varphi^0} & B^0 & \xrightarrow{\psi^0} & C^0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

次の長完全系列が成り立つことを示せ。

$$0 \rightarrow \ker(f) \xrightarrow{\varphi^*} \ker(g) \xrightarrow{\psi^*} \ker(h) \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}(f) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{coker}(g) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{coker}(h) \rightarrow 0$$

(ヒント：授業で証明された定理を使う。)

問題 2. 有限次元の実ベクトル空間のなす有限個の完全系列

$$0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \longrightarrow 0$$

を考えてみる。この系列について、次の方程式を示せ。

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{R}}(A^i) = 0$$

(ヒント：授業で証明された補題と帰納法を使う。)