幾何学Ｉ / 幾何学概論Ｖ：レポート問題その５

６月１９日　１７：００までに出して下さい。

<u>問題</u> **1.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に関して、次のように定義された微分形式 $dx_i \in \Omega^1(U)$ を思い出そう。

$$dx_i(x)(v) = e_i^*(v) = v_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

ここで、$x \in U$ と $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ である。微分形式

$$\mathrm{vol} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$$

をおいておく。次のように定義された線形写像を考える。

$$*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U), \qquad (*\omega)(x) = *(\omega(x))$$

ここで、右辺の $*\colon\ \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Alt}^{n-p}(\mathbb{R}^n)$ は、交代式 $\mathrm{vol}(x) \in \mathrm{Alt}^n(\mathbb{R}^n)$ によって定義されたホッジの $*$ 演算子である。線形写像 $*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U)$ もホッジの $*$ 演算子と呼ばれる。

(1) ホッジの $*$ 演算子 $*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U)$ に対して、次の性質を示せ。

(i) $*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$

(ii) $* \circ * = (-1)^{p(n-p)}$

次のように定義された線形写像 $d^*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$ を考える。

$$d^* = (-1)^{np+n-1} * \circ\, d \circ *$$

(2) 次の性質を示せ。

$$d^* \circ d^* = 0$$

(3) 任意の $f \in \Omega^0(U)$ に対して、次の公式を示せ。

$$d^*(f \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_p$$

(4) 任意の $f \in \Omega^0(U)$ と $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ に対して、次の公式を示せ。

$$d^*(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \sum_{s=1}^{p} (-1)^s \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{s-1}} \wedge dx_{i_{s+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

<u>問題</u> **2.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に関して、問題 1 で定義された演算子 $d^*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$ を思い出し、次のように定義されるラプラス演算子とよばれる線形写像を考える。

$$\Delta\colon \Omega^p(U) \to \Omega^p(U), \qquad \Delta = d \circ d^* + d^* \circ d$$

(1) 任意の $f \in \Omega^0(U)$ に対して、次の公式を示せ。

$$\Delta(f \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = -\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\Big) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

$\Big($一般的に、$f \in \Omega^0(U)$ と $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ のとき、$\Delta(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})$ は何となるでしょうか。$\Big)$

(3) ホッジの演算子 $*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U)$ に関して、次の性質を示せ。

$$\Delta(\omega) = 0 \ \Rightarrow \ \Delta(*\omega) = 0$$

$\Big($性質 $\Delta(\omega) = 0$ を満たす微分形式 ω は、調和形式と呼ばれる。よって、問題 *2* の (3) より、ホッジの $*$ 演算子は調和形式を保つことが分かる。$\Big)$