幾何学概論I：レポート問題その４

５月２１日　１７：００までに出して下さい。

問題 **1.** 内積 $\langle -,-\rangle$ つき有限次元 n の実ベクトル空間 V をおいておき、レポート問題その２で勉強した、ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$ 上の誘導された内積 $\langle -,-\rangle_p$ を想起する。特に、1次元ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^n(V)$ の内積 $\langle -,-\rangle_n$ によって、方程式

$$\langle \mathrm{vol}, \mathrm{vol}\rangle_n = 1$$

を満たす元は、$\mathrm{vol} \in \mathrm{Alt}^n(V)$ と書かれる。

(1) 方程式 $\langle *\omega, \tau\rangle_{n-p}\,\mathrm{vol} = \omega \wedge \tau$ を満たす線形形式写像

$$*\colon\ \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$$

がうまく定義されたことを示せ。(写像 $*$ は「ホッジの $*$ 演算子」と呼ばれる。)

(2) 方程式 $\mathrm{vol}(b_1, \dots, b_n) = 1$ を満たす正規直交基底 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ とその反対基底 $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \mathrm{Alt}^1(V)$ に対して、次の方程式を示せ。

$$*(b_1^* \wedge \cdots \wedge b_p^*) = b_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge b_n^*$$

(3) 任意の $\sigma \in S_{p,n-p}$ に対して、次の方程式を示せ。

$$*(b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*) = \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n)}$$

(4) 次の方程式を示せ。

$$* \circ * = (-1)^{p(n-p)}\colon\ \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^p(V)$$