幾何学概論I：レポート問題その２

５月７日　１７：００までに出して下さい。

問題 **1.** 線形写像 $f\colon V \to W$ と交代式 $\omega_1 \in \mathrm{Alt}^p(W)$、$\omega_2 \in \mathrm{Alt}^q(W)$ に対して、次の方程式が成り立つことをしめせ。

$$\mathrm{Alt}^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{Alt}^p(f)(\omega_1) \wedge \mathrm{Alt}^q(f)(\omega_2)$$

問題 **2.** 内積 $\langle -, - \rangle$ つき有限次元ベクトル空間 V と正規直交基底 $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset V$ をおいておく。

(1) 次のように定義された線形写像は同型であることを示せ。

$$i\colon V \to \mathrm{Alt}^1(V), \qquad i(v)(w) = \langle v, w \rangle$$

（ヒント：$i(b_j) = b_j^*$ を示せばよい。ここで、$\{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \subset \mathrm{Alt}^1(V)$ は反対基底である。）

(2) ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$（$p \geqslant 0$）で、次の性質 (i)–(ii) を満たす内積 $\langle -, - \rangle_p$ が存在することをしめせ。

(i) 任意の $v, w \in V$ に対して、

$$\langle i(v), i(w) \rangle_1 = \langle v, w \rangle$$

である。

(ii) 任意の $\omega_1, \ldots, \omega_p, \tau_1, \ldots, \tau_p \in \mathrm{Alt}^1(V)$ に対して、

$$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle_p = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, \tau_1 \rangle_1 & \ldots & \langle \omega_1, \tau_p \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_p, \tau_1 \rangle_1 & \ldots & \langle \omega_p, \tau_p \rangle_1 \end{pmatrix}$$

である。