9　マイヤー・ビートリス系列

二つのベクトル空間 V と W について、その直和 $V \oplus W$ とは、順序対 (v, w)（$v \in V, w \in W$）のなすベクトル空間である。直和のベクトル和とスカラー積は、次のように定義される。

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$$
$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$$

例として、次のように定義された写像は、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ の直和 $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ から、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{m+n}$ への同型である。

$$\big((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

一般的に、ベクトル空間 V と W が有限次元のとき、直和 $V \oplus W$ も有限次元で、

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

が成り立つ。1 の分解を使い、次の定理を証明する。

<u>定理</u> **9.1.** 開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ と単射 $i_v \colon U_v \to U_1 \cup U_2$、$j_v \colon U_1 \cap U_2 \to U_v$（$v = 1, 2$）に対して、次の短完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

ここで、写像 (i_1^*, i_2^*) と $j_1^* - j_2^*$ は次のように定義された線形写像である。

$$(i_1^*, i_2^*)(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)), \qquad (j_1^* - j_2^*)(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$$

<u>証明</u>. 部分集合 $U_v \subset \mathbb{R}^n$ が開集合なので、和集合 $U = U_1 \cup U_2 \subset \mathbb{R}^n$ と交わり $U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{R}^n$ も開集合となることが分かる。

まず、写像 (i_1^*, i_2^*) は単射であることを示す。微分形式 $\omega \in \Omega^p(U_1 \cup U_2)$ をおいておき、一意に $\omega = \sum_I f_I \wedge dx_I$ と表す。それに、例 5.6 と定理 5.7 より、

$$i_v^*(\omega) = \sum_I (f_I \circ i_v) \wedge dx_I$$

なので、$(i_1^*, i_2^*)(\omega) = 0$ のとき、任意の I に対して、$f_I \circ i_1 = 0$ と $f_I \circ i_2 = 0$ であることが分かる。しかし、$f_I \circ i_1 = 0$ と $f_I \circ i_2 = 0$ ならば、$f_I = 0$ なので、$\omega = 0$ であることが分かる。よって、写像 (i_1^*, i_2^*) が単射であることを示した。

次に、$\mathrm{im}(i_1^*, i_2^*) = \ker(j_1^* - j_2^*)$ を示す。まず、$i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ なので、

$$\begin{aligned}((j_1^* - j_2^*) \circ (i_1^*, i_2^*))(\omega) &= (j_1^* - j_2^*)(i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)) = j_1^* i_1^*(\omega) - j_2^* i_2^*(\omega) \\ &= (i_1 \circ j_1)^*(\omega) - (i_2 \circ j_2)^*(\omega) = 0\end{aligned}$$

となる。よって、$\mathrm{im}(i_1^*, i_2^*) \subset \ker(j_1^* - j_2^*)$ が成り立つ。それで、$(j_1^* - j_2^*)(\omega_1, \omega_2) = 0$ を満たす微分形式 $\omega_v \in \Omega^p(U_v)$ に対して、$(\omega_1, \omega_2) = (i_1^*, i_2^*)(\omega)$ を満たす微分形式 $\omega \in \Omega^p(U_1 \cup U_2)$ が存在することを示せばよい。微分形式 $\omega_v \in \Omega^p(U_v)$ は、一意に次のように表すことができる。

$$\omega_1 = \sum_I f_I \wedge dx_I$$
$$\omega_2 = \sum_I g_I \wedge dx_I$$

ここで、$f_I \colon U_1 \to \mathbb{R}$ と $g_I \colon U_2 \to \mathbb{R}$ は滑らかな写像である。仮定 $j_1^*(\omega_1) = j_2^*(\omega_2)$ より、$f_I \circ j_1 = g_I \circ j_2 \colon U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ が成り立つ。よって、部分集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ は開集合なので、次のように定義された写像 $h_I \colon U \to \mathbb{R}$ も滑らかな写像となることが分かる。

$$h_I(x) = \begin{cases} f_I(x) & (x \in U_1) \\ g_I(x) & (x \in U_2) \end{cases}$$

よって、次のように定義された微分形式 $\omega \in \Omega^p(U)$ は、うまく定義された微分形式である。

$$\omega = \sum_I h_I \wedge dx_I$$

それに、定義より、望ましい公式 $(i_1^*, i_2^*)(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ が成り立つ。

最後に、写像 $j_1^* - j_2^*$ は全射であることを示す。部分集合 $U_1, U_2 \subset U$ は、開集合 U の開被覆 $\{U_1, U_2\}$ となるので、1 の分解（定理 8.1）より、次の性質 (i)–(ii) を満たす滑らかな写像 $\phi_v \colon U \to \mathbb{R}$（$v = 1, 2$）が存在することが分かる。

(i) $\mathrm{supp}_U(\phi_v) \subset U_v$（$v = 1, 2$）

(ii) 任意の $x \in U$ に対して、$\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1$

これで、微分形式 $\omega \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ が与えられたとき、次の方程式は、うまく定義された微

分形式 $\omega_v \in \Omega^p(U_v)$（$v = 1, 2$）を与えられる。

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \phi_2(x)\omega(x) & (x \in U_1 \cap U_2) \\ 0 & (x \in U_1 \setminus \mathrm{supp}_U(\phi_2)) \end{cases}$$

$$\omega_2(x) = \begin{cases} -\phi_1(x)\omega(x) & (x \in U_1 \cap U_2) \\ 0 & (x \in U_2 \setminus \mathrm{supp}_U(\phi_1)) \end{cases}$$

それに、任意の $x \in U_1 \cap U_2$ に対して、

$$(j_1^* - j_2^*)(\omega_1, \omega_2)(x) = \omega_1(x) - \omega_2(x) = \phi_2(x)\omega(x) - (-\phi_1(x)\omega(x)) = \omega(x)$$

なので、写像 $j_1^* - j_2^*$ が全射であることが分かる。これで、定理が成り立つ。 □

二つのコチェイン複体 A^* と B^* について、その直和 $A^* \oplus B^*$ とは、次のように定義されたコチェイン複体である。

$$\cdots \longrightarrow A^{p-1} \oplus B^{p-1} \xrightarrow{d \oplus d} A^p \oplus B^p \xrightarrow{d \oplus d} A^{p+1} \oplus B^{p+1} \xrightarrow{d \oplus d} A^{p+2} \oplus B^{p+2} \longrightarrow \cdots$$

ここで、$d \oplus d$ は、$(d \oplus d)(a, b) = (da, db)$ で定義された写像である。

<u>補題</u> **9.2.** コチェイン複体 A^* と B^* に対して、$([a], [b])$ を $[(a, b)]$ に移す線形写像

$$H^p(A^*) \oplus H^p(B^*) \to H^p(A^* \oplus B^*)$$

は、同型である。

<u>証明</u>. コホモロジー類 $([a], [b])$ をコホモロジー類 $[(a, b)]$ に移す写像は、うまく定義された線形写像で、逆写像は、コホモロジー類 $[(a, b)]$ をコモロジー類 $([a], [b])$ に移す写像である。 □

<u>定理</u> **9.3 (マヤー・ビートリス系列).** 開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ と単射 $i_v \colon U_v \to U = U_1 \cup U_2$、$j_v \colon U_1 \cap U_2 \to U_v$（$v = 1, 2$）に対して、次の長完全系列が成り立つ。

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

ここで、写像 (i_1^*, i_2^*) と $j_1^* - j_2^*$ は次のように定義された線形写像である。

$$(i_1^*, i_2^*)([\omega]) = (i_1^*([\omega]), i_2^*([\omega])), \qquad (j_1^* - j_2^*)([\omega_1], [\omega_2]) = j_1^*([\omega_1]) - j_2^*([\omega_2])$$

証明. 定理は、定理 9.1 と定理 7.14、補題 9.2 から成り立つ。 □

系 **9.4.** 互いに素な開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して、線形写像

$$(i_1^*, i_2^*)\colon H^p(U_1 \cup U_2) \to H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

は同型である。

証明. ド・ラームコホモロジー群の定義より、任意の $p \geqslant 0$ に対して、

$$H^p(U_1 \cap U_2) = H^p(\varnothing) = 0$$

であることが分かる。よって、マヤー・ビートリス系列から、次のような完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \longrightarrow 0$$

しかし、この系列が完全であることと写像 (i_1^*, i_2^*) が同型であることは同値である。 □

例 9.5. 開集合 $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ のド・ラームコホモロジーベクトル空間を計算する。そのために、U を次の開集合 $U_1, U_2 \subset U$ の和集合と表す。

$$U_1 = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, 0) \mid x \leqslant 0\} \subset U$$
$$U_2 = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, 0) \mid x \geqslant 0\} \subset U$$

の和集合と表し、マヤー・ビートリス系列

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

を考えてみる。ここで、交わり $U_1 \cap U_2$ は、次の二つ開集合の和集合と表すことができる。

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$
$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

これに、開集合 U_v, V_v（$v = 1, 2$）は星形なので、ポアンカレの補体と系 9.4 より、

$$H^p(U_v) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{U_v} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$
$$H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{V_1} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{V_2} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

であることが分かる。ここで、$1_{U_v}\colon U_v \to \mathbb{R}$ と $1_{V_v}\colon U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$（$v=1,2$）は、それぞれ開集合 U_v, V_v の指示関数である。それで、$j_v^*(1_{U_v}) = 1_{U_1\cap U_2} = 1_{V_1} + 1_{V_2}$ なので、

$$(j_1^* - j_2^*)(a\cdot 1_{U_1}, b\cdot 1_{U_2}) = (a-b)\cdot(1_{V_1} + 1_{V_2})$$

となることが分かる。よって、マヤー・ビートリス系列から、

$$H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R}\cdot 1_U & (p=0) \\ \mathbb{R}\cdot \partial^*(1_{V_1}) & (p=1) \\ 0 & (p\neq 0,1) \end{cases}$$

であることが成り立つ。

つづいて、コホモロジー類 $\partial^*(1_{V_1})$ について、次の公式を示す。

$$\partial^*(1_{V_1}) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\Big[-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big] \tag{9.6}$$

逆関数の定理より、次の写像は微分同相となることが分かる。

$$F_1\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to U_1, \qquad F_1(r,\theta_1) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)$$
$$F_2\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\to U_2, \qquad F_2(r,\theta_2) = (r\cos\theta_2, r\sin\theta_2)$$

実に、F_v（$v=1,2$）は開集合の微分可能全単射で、ヤコビ行列 $\partial(x,y)/\partial(r,\theta_v)$ は可逆行列である。さらに、

$$\frac{\partial(r,\theta_v)}{\partial(x,y)} = \Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta_v)}\Big)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta_v & r\sin\theta_v \\ -\sin\theta_v & \cos\theta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

であることが分かる。よって、次の公式が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned}(d\oplus d)(\theta_1,\theta_2) &= \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy, -\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big) \\ &= (i_1^*, i_2^*)\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big)\end{aligned}$$

一方、関数 $\theta_v\colon U_v\to\mathbb{R}$ の定義より、

$$(j_1^* - j_2^*)(\theta_1,\theta_2) = -\pi\cdot 1_{V_1} + \pi\cdot 1_{V_2}$$

であることが分かる。よって、境界準同型の定義（定義 7.9）より、

$$\partial^*(-\pi\cdot 1_{V_1} + \pi\cdot 1_{V_2}) = \Big[-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big]$$

であることが成り立つ。最後に、

$$
\begin{aligned}
-2\pi \cdot \partial^*(1_{V_1}) &= \partial^*(-\pi \cdot 1_{V_1} + \pi \cdot 1_{V_2}) - \partial^*(\pi \cdot 1_{V_1} + \pi \cdot 1_{V_2}) \\
&= \Big[-\frac{y}{x^2+y^2} \wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2} \wedge dy \Big] + 0
\end{aligned}
$$

なので、(9.6) が成り立つ。

<u>定理</u> **9.7.** 有限個の凸開集合 $U_1, \dots, U_r \subset \mathbb{R}^n$ について、任意の $p \geqslant 0$ に対して、

$$
\dim_{\mathbb{R}} H^p(U_1 \cup \cdots \cup U_r) < \infty
$$

である。

<u>証明</u>. 帰納法を使う。これに、$r=1$ のとき、ポアンカレの補題（定理 6.4）より、定理は正しいので、$r-1$ のときを正しいと仮定し、r のときを示せばよい。それに、マイヤー・ビートリス系列より、次の完全系列が成り立つ。

$$
H^{p-1}((U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}) \cap U_r) \xrightarrow{\partial^*} H^p(U_1 \cup \cdots \cup U_r) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}) \oplus H^p(U_r)
$$

ここで、交わり $(U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}) \cap U_r$ は、$r-1$ 個の凸開集合 $U_1 \cap U_r, \dots, U_{r-1} \cap U_r$ の和集合と等しいなので、仮定より、左辺は有限次元のベクトル空間であることが分かる。同様に、仮定と補題 9.2 より、右辺も有限次元のベクトル空間である。これに、次の短完全系列には、左辺と右辺が有限次元ベクトル空間であることが分かる。

$$
0 \longrightarrow \mathrm{im}(\partial^*) \longrightarrow H^p(U_1 \cup \cdots \cup U_r) \longrightarrow \mathrm{im}((i_1^*, i_2^*)) \longrightarrow 0
$$

よって、補題 7.1 より、$H^p(U_1 \cup \cdots \cup U_r)$ は有限次元ベクトル空間であることが分かる。 □

<u>注</u> 9.8. 一般的に、開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ とその開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ が与えられたとき、次のようなスペクタラル系列が成り立つ。スペクトラル系列とは、長完全系列の一般化である。

$$
E_1^{p,q} = \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_p} H^q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \Rightarrow H^{p+q}(U)
$$

ここで、添え字集合 I の整列が選ばれた。