8　1 の分解

まず、位相空間の部分空間を復習する。位相空間 X の部分集合 Y の開集合を次のようにして決めたとき、Y は X の部分空間と呼ばれる。部分集合 $U \subset Y$ が開集合であるのは、X のある開集合 $V \subset X$ によって、$U = V \cap Y$ と表せるときである。同様に、部分集合 $A \subset Y$ が閉集合であるのは、X のある閉集合 $B \subset X$ によって、$A = B \cap Y$ と表せるときである。このとき、標準単射 $i\colon Y \to X$ は連続で、ある位相空間 Z から部分空間 $Y \subset X$ への写像 $f\colon Z \to Y$ が連続であることと合成写像 $i \circ f\colon Z \to X$ が連続であることは同値である。部分空間 $A \subset \mathbb{R}^n$ に関して、関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ の台と呼ばれるのは、$f \neq 0$ となる部分集合の閉包と定義され、

$$\mathrm{supp}_A(f) = \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}} \subset A$$

と書かれる。例として、

$$\mathrm{supp}_{(0,1)}(x) = \overline{(0,1)} = (0,1)$$
$$\mathrm{supp}_{[0,1)}(x) = \overline{(0,1)} = [0,1)$$

である。

<u>定理</u> **8.1.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ とその開被覆 $\{V_i \mid i \in I\}$ に対して、次の性質 (i)–(iii) を満たす滑らかな写像 $\phi_i\colon U \to [0,1]$（$i \in I$）が存在する。

(i) 任意の $i \in I$ に対して、$\mathrm{supp}_U(\phi_i) \subset V_i$ である。

(ii) 任意の $x \in U$ について、「無限個を除いてほとんど全ての $i \in I$ に対して、$\phi_i|_W = 0$」を満たす開近傍 $x \in W \subset U$ が存在する。

(iii) 任意の $x \in U$ について、$\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ である。

この族 $\{\phi_i\colon U \to \mathbb{R} \mid i \in I\}$ は、被覆 $\{V_i \mid i \in I\}$ によって 1 の分解と呼ばれる。

<u>注</u> 8.2. 性質 (ii) を満たす関数の族 $\{\phi_i\colon U \to \mathbb{R} \mid i \in I\}$ は、局所有限族と呼ばれる。このとき、次の公式はうまく定義された関数 $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ を与えられる。

$$\phi(x) = \sum_{i \in I} \phi_i(x)$$

それに、$\phi_i\colon U \to \mathbb{R}$（$i \in I$）は滑らかな関数のとき、$\phi\colon U \to \mathbb{R}$ も滑らかな関数となる。

定理 8.1 を証明するために、3 つの補題を示す。まず、$x \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に関して、次のように定義された部分集合は、それぞれ中心 x と半径 r の開球体と閉球体と呼ばれる。

$$\mathring{D}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$$
$$D_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leqslant r\}$$

<u>補題</u> **8.3.** 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、$\psi^{-1}\big((0, \infty)\big) = \mathring{D}_r(x)$ を満たす滑らかな写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ が存在する。

<u>証明</u>. 補題 6.1 で与えられた、

$$\psi_0(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 0) \\ 1 & (t \geqslant 1) \end{cases}$$

を滑らかな写像 $\psi_0\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ を思い出そう。この写像を使い、写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ を次のように定義する。

$$\psi(y) = \psi_0\big(1 - (\|y - x\|/r)\big)$$

このように定義された写像は滑らかで、$\psi^{-1}\big((0, \infty)\big) = \mathring{D}_r(x)$ を満たす。 □

<u>注</u> 8.4. 写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ に対して、

$$\mathrm{supp}_{\mathbb{R}^n}(\psi) = D_r(x)$$

である。

位相空間 X に関して、ある部分集合 $A \subset X$ の内部は、$\mathring{A}$ と書かれる。

<u>補題</u> **8.5.** 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次の性質 (i)–(ii) を満たすコンパクトの部分集合 $K_m \subset \mathbb{R}^n$（$m \geqslant 1$）が存在する。

(i) 任意の $m \geqslant 1$ に対して、$K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$ である。

(ii) 集合 U は、和集合 $\bigcup_{m \geqslant 1} K_m$ と等しいである。

<u>証明</u>. 次のように定義された部分集合 $K_m \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトで、性質 (i)–(ii) を満たす。

$$K_m = D_{2^m}(0) \smallsetminus \Big(\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus U} \mathring{D}_{2^{-m}}(x) \Big)$$

補題が成り立つ。 □

<u>補題</u> **8.6.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ とその開被覆 $\{V_i \mid i \in I\}$ に対して、次の性質 (i)–(iii) を満たす点 $x_j \in U$ と実数 $r_j > 0$（$j \geqslant 1$）が存在する。

(i) 集合 U は、和集合 $\bigcup_{j\geqslant 1} \mathring{D}_{r_j}(x_j)$ と等しいである。

(ii) 任意の $j \geqslant 1$ に対して、開球体 $\mathring{D}_{2r_j}(x_j)$ を含む V_i が存在する。

(iii) 任意の $x \in U$ について、無限個を除いてほとんど全ての開球体 $\mathring{D}_{2r_j}(x_j)$ を交わらない開近傍 $x \in W \subset U$ が存在する。

<u>証明</u>. 補題 8.5 で与えられた部分集合 $K_m \subset \mathbb{R}^n$（$m \geqslant 1$）をおいておき、$K_0 = K_{-1} = \varnothing$ と定義する。次のように定義された部分集合 $B_m \subset U_m \subset \mathbb{R}^n$（$m \geqslant 1$）を考える。

$$B_m = K_m \smallsetminus \mathring{K}_{m-1}$$
$$U_m = \mathring{K}_{m+1} \smallsetminus K_{m-2}$$

部分集合 $B_m \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトで、部分集合 $U_m \subset \mathbb{R}^n$ は開集合で、和集合 $\bigcup_{m\geqslant 1} B_m$ と $\bigcup_{m\geqslant 1} U_m$ は、集合 U と等しいである。部分集合 U_m と V_i が開集合なので、任意の $x \in B_m$ について、ある実数 $r(x) > 0$ と添え字 $i \in I$ に対して、$\mathring{D}_{2r(x)}(x) \subset U_m \cap V_i$ である。開球体 $\mathring{D}_{r(x)}(x)$（$x \in B_m$）は、コンパクト空間 B_m の開被覆となるので、無限の点 $x_{m,k} \in B_m$ と実数 $r_{m,k} > 0$（$1 \leqslant k \leqslant d_m$ ）が存在し、次の性質 (a)–(b) が成り立つ。

(a) 任意の $m \geqslant 1$ に対して、$B_m \subset \bigcup_{1\leqslant k\leqslant d_m} \mathring{D}_{r_{m,k}}(x_{m,k})$ である。

(b) 任意の $m \geqslant 1$ と $1 \leqslant k \leqslant d_m$ について、ある $i \in I$ に対して、

$$\mathring{D}_{2r_{m,k}}(x_{m,k}) \subset U_m \cap V_i$$

である。

なお、全単射

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)\colon \{j \mid j \geqslant 1\} \xrightarrow{\sim} \{(m,k) \mid m \geq 1, 1 \leqslant k \leqslant d_m\}$$

を選び、$x_j = x_{\alpha_1(j),\alpha_2(j)}$ と $r_j = r_{\alpha_1(j),\alpha_2(j)}$ と定義し、性質 (i)–(iii) を示す。性質 (a) より、

$$U = \bigcup_{m\geqslant 1} B_m \subset \bigcup_{m\geqslant 1} \bigcup_{1\leqslant k\leqslant d_m} \mathring{D}_{r_{m,k}}(x_{m,k}) \subset \bigcup_{m\geqslant 1} U_m = U$$

なので、

$$U = \bigcup_{m \geqslant 1} \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant d_m} \mathring{D}_{r_{m,k}}(x_{m,k}) = \bigcup_{j \geqslant 1} \mathring{D}_{r_j}(x_j)$$

と成り立つ。これで、性質 (i) が成り立つ。それで、性質 (b) より、任意の $j \geqslant 1$ について、ある $i \in I$ に対して、$\mathring{D}_{2j}(x_j) \subset V_i$ であることが分かる。よって、性質 (ii) も成り立つ。最後に、$x \in U$ が与えられたとき、$x \in U_m$ を満たす $m \geqslant 1$ を選ぶ。それに、性質 (b) より、任意の $m' \geqslant m+3$ に対して、

$$\mathring{D}_{2r_{m',k}}(x_{m',k}) \cap U_m \subset U_{m'} \cap U_m = \varnothing$$

なので、性質 (iii) も成り立つ。 $\square$

<u>定理 *8.1* の証明</u>. 補題 8.6 の性質 (i)–(iii) を満たす点 x_j と実数 $r_j > 0$（$j \geqslant 1$）をおいておき、補題 8.3 より、$\psi_j^{-1}\big((0,\infty)\big) = \mathring{D}_{r_j}(x_j)$ を満たす滑らかな写像 $\psi_j \colon U \to [0,\infty)$（$j \geqslant 1$）を考えてみる。局所族なので、注 8.2 より、次のように定義された写像 $\psi \colon U \to [0,\infty)$ は、うまく定義された滑らかな写像である。

$$\psi(x) = \sum_{j \geqslant 1} \psi_j(x)$$

補体 8.6 の (i) より、任意の $x \in U$ に対して、$\psi(x) > 0$ なので、

$$\tilde{\psi}_j(x) = \psi_j(x)/\psi(x)$$

で定義された写像 $\tilde{\psi}_j \colon U \to [0,\infty)$（$j \geqslant 1$）もうまく定義された滑らかな写像であり、任意の $x \in U$ に対して、$\sum_{j \geqslant 1} \tilde{\psi}_j(x) = 1$ を満たす。なお、任意の $j \geqslant 1$ に対して、$\mathring{D}_{2r_j}(x_j) \subset V_{i(j)}$ を満たす添え字 $i(j) \subset I$ を選び、次のように滑らか写像 $\phi_i \colon U \to \mathbb{R}$ を定義する。

$$\phi_i(x) = \sum_{j \in J(i)} \tilde{\psi}_j(x)$$

ここで、$J(i) = \{j \geqslant 1 \mid i(j) = i\}$ である。特に、$J(i) = \varnothing$ のとき、写像 ϕ_i は、ゼロ写像と定義される。性質 (i)–(iii) を示す。まず、$j \in J(i)$ に対して、

$$\mathrm{supp}_U(\tilde{\psi}_j) = \mathrm{supp}_U(\psi_j) = D_{r_j}(x_j) \subset \mathring{D}_{2r_j}(x_j) \subset V_i$$

なので、$\mathrm{supp}_U(\phi_i) \subset V_i$ であることが分かる。よって、性質 (i) が成り立つ。つづいて、補題 8.6 の (iii) より、任意の $x \in U$ について、「有限個を除いて全ての $\psi_j|_W = 0$」をみたす開

近傍 $x \in W \subset U$ が存在する。よって、この開近傍について、有限個を除いて全ての $\phi_i|_W$ もゼロなので、性質 (ii) が成り立つ。最後に、任意の $x \in U$ に対して、

$$\sum_{i \in I} \phi_i(x) = \sum_{j \geqslant 1} \tilde{\psi}_j(x) = 1$$

なので、性質 (iii) も成り立つ。これで、定理を証明した。 □

注 8.7. 以上の証明で定義された写像 ϕ_i について、可算個除いてほとんど全ての $i \in I$ に対して、$\phi_i = 0$ である。

定理 8.1 を使い、補題 6.1 の高次元の一般化を証明する。

系 **8.8.** それぞれ閉集合と開集合である部分集合 $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ が与えられた、次の性質 (i)–(ii) を満たす滑らかな写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する。

(i) 任意の $x \in A$ に対して、$\psi(x) = 1$ である。

(ii) $\mathrm{supp}_{\mathbb{R}^n}(\psi) \subset U$ である。

証明. 開集合 $V_1 = U$ と $V_2 = \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ は、$\mathbb{R}^n$ の開被覆となる。定理 8.1 で与えられた滑らかな写像 $\phi_i\colon \mathbb{R}^n \to R$（$i = 1, 2$）に関して、写像 $\psi = \phi_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は性質 (i)–(ii) を満たす。 □