7　コチェイン複体とそのコホモロジー

次のような完全系列は、短完全系列と呼ばれる。

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

この系列が完全であることは、次の性質 (i)–(iii) と同値である。

(i) f は単射である。

(ii) $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ である。

(iii) g は全射である。

ここで、像 $\mathrm{im}(f)$ と核 $\ker(f)$ は次のように定義される。

$$\mathrm{im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset B$$
$$\ker(g) = \{b \in B \mid g(b) = 0\} \subset B$$

補題 **7.1.** ベクトル空間と線形写像からなる短完全系列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

をおいておく。基底 $\{a_i \mid i \in I\} \subset A$ と $\{c_j \mid j \in J\} \subset C$ に対して、次のように選ばれた部分集合は、ベクトル空間 B の基底となる。

$$\{f(a_i) \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\} \subset B, \qquad g(b_j) = c_j$$

特に、ベクトル空間 A と C が有限次元のとき、ベクトル空間 B も有限次元であり、

$$\dim(B) = \dim(A) + \dim(C)$$

である。

証明. まず、ほとんどすべとのはゼロである $\lambda_i \in \mathbb{R}$（$i \in I$）と $\mu_j \in \mathbb{R}$（$j \in J$）に対して、

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(a_i) + \sum_{j \in J} \mu_j b_j = 0$$

ならば、任意の λ_i と μ_j はゼロであることを示す。まず、

$$0 = g\big(\sum_{i\in I} \lambda_i f(a_i) + \sum_{j\in J} \mu_j b_j\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i g(f(a_i)) + \sum_{j\in J} \mu_j g(b_j) = \sum_{j\in J} \mu_j c_j$$

であることが成り立つ。さらに、$\{c_j \mid j \in J\} \subset C$ は 1 次独立なので、任意の μ_j はゼロであることが分かる。よって、

$$0 = \sum_{i\in I} \lambda_i f(a_i) + \sum_{j\in J} \mu_j b_j = f\big(\sum_{i\in I} \lambda_i a_i\big)$$

であり、写像 f は単射なので、

$$\sum_{i\in I} \lambda_i a_i = 0$$

であることが分かる。しかし、$\{a_i \mid i \in I\} \subset A$ は 1 次独立なので、任意の λ_i もゼロであることが分かる。よって、$\{f(a_i) \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\} \subset B$ は 1 次独立であることを示した。

最後に、任意の $b \in B$ が $\{f(a_i) \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\}$ の線形結合となることを示す。まず、

$$g(b) = \sum_{j\in J} \mu_j c_j$$

と表すことができる。よって、

$$g\big(b - \sum_{j\in J} \mu_j b_j\big) = g(b) - \sum_{j\in J} \mu_j c_j = 0$$

であることが分かる。それに、$\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ なので、

$$b - \sum_{j\in J} \mu_j b_j = f(a) = f\big(\sum_{i\in I} \lambda_i a_i\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(a_i)$$

と表すことができる。よって、

$$b = \sum_{i\in I} \lambda_i f(a_i) + \sum_{j\in J} \mu_j b_j$$

と表すことができる。これで、補題が成り立つ。 □

<u>例</u> 7.2. 任意の線形写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の短完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow A \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \longrightarrow 0$$

特に、A は有限次元のとき、$\dim(A) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$ である。

定義 **7.3.** コチェイン複体 $A^* = (A^i, d^i)$ に対して、次のように定義された商ベクトル空間 $H^p(A^*)$ は、複体 A^* の p 次コホモロジーベクトル空間と呼ばれる。

$$H^p(A^*) = \ker(d^p\colon A^p \to A^{p+1})/\operatorname{im}(d^{p-1}\colon A^{p-1} \to A^p)$$

核 $\ker(d^p\colon A^p \to A^{p+1})$ と像 $\operatorname{im}(d^{p-1}\colon A^{p-1} \to A^p)$ の元は、それぞれ複体 A^* の p 次コサイクルと p 次コバウンダリーと呼ばれる。p 次コホモロジーベクトル空間 $H^p(A^*)$ の元は、複体 A^* の p 次コホモロジー類と呼ばれ、p 次コサイクル a を含むコホモロジー類は、

$$[a] = a + \operatorname{im}(d^{p-1}\colon A^{p-1} \to A^p) \in H^p(A^*)$$

と書かれる。

例 7.4. ド・ラーム複体 $\Omega^*(U)$ はコチェイン複体であり、そのコホモロジーベクトル空間は、ド・ラームコホモロジー群と等しいである。

$$H^p(U) = H^p(\Omega^*(U))$$

それで、複体 $\Omega^*(U)$ の p 次コサイクルと p 次コバウンダリーは、それぞれ U 上の閉微分形式と完全微分形式と等しいである。

定義 **7.5.** チェイン写像 $\varphi\colon A^* \to B^*$ に対して、次のように定義された写像は、φ で誘導された写像と呼ばれ、φ^* または $H^p(\varphi)$ と書かれる。

$$\varphi^* = H^p(\varphi)\colon H^p(A^*) \to H^p(B^*), \qquad H^p(f)([a]) = [\varphi^p(a)]$$

注 7.6. チェイン写像 $\varphi\colon A^* \to B^*$ で誘導された写像 $H^p(\varphi)\colon H^p(A^*) \to H^p(B^*)$ は、うまく定義された線形写像であることを示す。まず、複体 A^* の p 次コサイクル a に対して、

$$d^p(\varphi^p(a)) = \varphi^p(d^p(a)) = \varphi^p(0) = 0$$

なので、$\phi^p(a)$ は複体 B^* の p 次コサイクルである。さらに、p 次コサイクル a_1 と a_2 に対して、コホモロジー類 $[a_1]$ と $[a_2]$ が等しいであることと差 $a_1 - a_2$ が p 次コバウンダリーであることは同値である。それに、$a_1 - a_2 = d^{p-1}(x)$ のとき、

$$\varphi^p(a_1) - \varphi^p(a_2) = \varphi^p(a_1 - a_2) = \varphi^p(d^{p-1}(x)) = d^p(\varphi^p(x))$$

なので、コホモロジー類 $[\varphi^p(a_1)]$ と $[\varphi^p(a_2)]$ は等しいであることが分かる。よって、誘導された写像 $H^p(\varphi)$ はうまく定義された写像である。

定義 **7.7.** コチェイン複体とチェイン写像からなる系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

において、任意の i に対して系列

$$0 \longrightarrow A^i \xrightarrow{\varphi^i} B^i \xrightarrow{\psi^i} C^i \longrightarrow 0$$

は短完全系列のとき、コチェイン複体の短完全系列と呼ばれる。

補題 **7.8.** コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、誘導された写像からなる系列

$$H^p(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(B^*) \xrightarrow{\psi^*} H^p(C^*)$$

は、完全系列である。

証明. まず、任意のコホモロジー類 $[a] \in H^p(A^*)$ に対して、

$$(\psi^* \circ \varphi^*)([a]) = \psi^*(\varphi^*([a])) = \psi^*([\varphi^p(a)]) = [\psi^p(\varphi^p(a)] = [0] = 0$$

なので、$\psi^* \circ \varphi^*$ はゼロであることが分かる。よって、任意のコホモロジー類 $[b] \in H^p(B^*)$ に対して、$\psi^*([b]) = 0$ ならば、$[b] = \varphi^*([a])$ を満たすコホモロジー類 $[a] \in H^p(A^*)$ が存在することを示せばよい。コホモロジー類 $\psi^*([b])$ はゼロのとき、$\psi^p(b) = d^{p-1}(c)$ を満たす $c \in C^{p-1}$ が存在する。それに、写像 $\psi^{p-1}\colon B^{p-1} \to C^{p-1}$ は全射なので、$\psi^{p-1}(b_1) = c$ を満たす $b_1 \in B^{p-1}$ が存在する。それから、

$$\begin{aligned}\psi^p(b - d^{p-1}(b_1)) &= \psi^p(b) - \psi^p(d^{p-1}(b_1)) = \psi^p(b) - d^{p-1}(\psi^{p-1}(b_1)) \\ &= \psi^p(b) - d^{p-1}(c) = \psi^p(b) - \psi^p(b) = 0\end{aligned}$$

なので、$\varphi^p(a) = b - d^{p-1}(b_1)$ を満たす $a \in A^p$ が存在する。なお、写像 φ^{p+1} は単射なので、次の計算から、a はコサイクルであることが成り立つ。

$$\varphi^{p+1}(d^p(a)) = d^p(\varphi^p(a)) = d^p(b - d^{p-1}(b_1)) = d^p(b) - (d^p \circ d^{p-1})(b_1) = 0 - 0 = 0$$

よって、$\varphi^*([a]) = [b]$ を満たすコホモロジー類 $[a] \in H^p(A^*)$ が存在する。 □

補題 7.8 では、誘導された写像 φ^* には、一般的に単射ではない。同様に、誘導われた写像 ψ^* には、一般的に全射ではない。よって、誘導された写像からなる系列には、一般的に短完全系列ではない。

<u>定義</u> **7.9.** コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に関して、境界準同型と呼ばれるのは、次のように定義された写像である。

$$\partial^* \colon H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*), \qquad \partial^*([c]) = [(\phi^{p+1})^{-1}(d^p((\psi^p)^{-1}(c)))]$$

<u>注</u> 7.10. 次の図式を考え、境界準同型がうまく定義された線形写像であることを示す。

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & A^{p+2} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi^{p+2}"] & B^{p+2} \arrow[u] \arrow[r, "\psi^{p+2}"] & C^{p+2} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[u, "d^{p+1}"'] \arrow[r, "\varphi^{p+1}"] & B^{p+2} \arrow[u, "d^{p+1}"'] \arrow[r, "\psi^{p+1}"] & C^{p+1} \arrow[u, "d^{p+1}"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p} \arrow[u, "d^{p}"'] \arrow[r, "\varphi^{p}"] & B^{p} \arrow[u, "d^{p}"'] \arrow[r, "\psi^{p}"] & C^{p} \arrow[u, "d^{p}"'] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

境界準同型の定義より、p 次コサイクル $c \in C^p$ が与えられた、まず $\phi^p(b) = c$ を満たす元 $b \in B^p$ を選ぶ。このとき、

$$\psi^{p+1}(d^p(b)) = d^p(\psi^p(b)) = d^p(c) = 0$$

なので、$\varphi^{p+1}(a) = d^p(b)$ を満たす元 $a \in A^{p+1}$ が一意的に存在する。さらに、写像 φ^{p+2} は単射なので、次の計算より、a はコサイクルであることが分かる。

$$\varphi^{p+2}(d^{p+1}(a)) = d^{p+1}(\varphi^{p+1}(a)) = d^{p+1}(d^p(b)) = 0$$

よって、コホモロジー類 $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ が成り立つ。続いて、このコホモロジー類は、選んだ元 $b \in B^p$ によらないことを示す。それぞれ $\psi^p(b_1) = c$ と $\psi^p(b_2) = c$ を満たす元 $b_1, b_2 \in B^p$ とそれぞれ対応するコサイクル $a_1, a_2 \in A^{p+1}$ をおいておく。このとき、

$$\psi^p(b_1 - b_2) = \psi^p(b_1) - \psi^p(b_2) = 0$$

なので、$\varphi^p(a') = b_1 - b_2$ を満たす元 $a' \in A^p$ が存在する。さらに、

$$\begin{aligned}\varphi^{p+1}(d^p(a')) &= d^p(\varphi^p(a')) = d^p(b_1 - b_2) = d^p(b_1) - d^p(b_2) \\ &= \varphi^{p+1}(a_1) - \varphi^{p+1}(a_2) = \varphi^{p+1}(a_1 - a_2)\end{aligned}$$

なので、$d^p(a') = a_1 - a_2$ であることが分かる。よって、

$$[a_1] - [a_2] = [a_1 - a_2] = [d^p(a')] = 0$$

が成り立つ。これで、境界準同型はうまく定義された写像であることを示した。最後に、境界準同型は線形写像であることを示す。境界準同型の定義より、$\psi^p(b_1) = c_1$ と $\psi^p(b_2) = c_2$、$\varphi^{p+1}(a_1) = d^p(b_1)$、$\varphi^{p+1}(a_2) = d^p(b_2)$ を満たす元 $b_1, b_2 \in B^p$、$a_1, a_2 \in A^{p+1}$ において、$\partial^*([c_1]) = [a_1]$ と $\partial^*([c_2]) = [a_2]$ である。そらに、$\psi^p(b_1 + b_2) = c_1 + c_2$ と $\varphi^{p+1}(a_1 + a_2) = d^p(b_1 + b_2)$ なので、$\partial^*([c_1 + c_2]) = [a_1 + a_2]$ であることも分かる。よって、

$$\partial^*([c_1] + [c_2]) = \partial^*([c_1 + c_2]) = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \partial^*([c_1]) + \partial^*([c_2])$$

であることが成り立つ。同様に、$\psi^p(\lambda b_1) = \lambda c_1$ と $\varphi^{p+1}(\lambda a_1) = d^p(\lambda b_1)$ なので、

$$\partial^*(\lambda[c_1]) = \partial^*([\lambda c_1]) = [\lambda a_1] = \lambda[a_1] = \lambda\partial^*([c_1])$$

であることも成り立つ。これで、境界準同型は線形写像であることを示した。

例 7.11. 次のように定義されたコチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

を考えてみる。ここで、$A^1 = B^0 = B^1 = C^0$ を $\mathbb{R}$ とし、それ以外の A^p、B^p、C^p をゼロとし、写像 $\varphi^1 \colon A^1 \to B^1$ と $d^0 \colon B^0 \to B^1$、$\psi^0 \colon B^0 \to C^0$ を $\mathbb{R}$ の恒道写像と定義する。

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[u] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

このとき、$\partial^* \colon H^0(C^*) \to H^1(A^*)$ も $\mathbb{R}$ の恒道写像と等しいである。

補題 **7.12.** コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、次の系列が完全となる。

$$H^p(B^*) \xrightarrow{\psi^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$$

証明. まず、境界準同型の定義より、

$$\partial^*(\psi^*([b])) = [(\varphi^{p+1})^{-1}(d^p(b))] = [(\varphi^{p+1})^{-1}(0)] = [0] = 0$$

であることが分かる。続いて、$\partial^*([c]) = 0$ であることと $\psi^p(b) = c$ を満たす $b \in B^p$ に対して、$d^p(b) = \varphi^{p+1}(d^p(a))$ を満たす $a \in A^p$ が存在することは同値である。このとき、

$$d^p(b - \varphi^p(a)) = d^p(b) - d^p(\varphi^p(a)) = d^p(b) - \varphi^{p+1}(d^p(a)) = d^p(b) - d^p(b) = 0$$

であり、$\psi^*([b - \varphi^p(a)]) = [c - 0] = [c]$ が成り立つ。 □

補題 **7.13.** コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、次の系列が完全となる。

$$H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^{p+1}(B^*)$$

証明. まず、コサイクル $c \in C^p$ に対して、$\psi^p(b) = c$ を満たす元 $b \in B^p$ を選ぶと、

$$\varphi^*(\partial^*([c])) = [d^p(b)] = 0$$

であることが成り立つ。それで、$\varphi^{p+1}([a]) = 0$ であることと $\varphi^{p+1}(a) = d^p(b)$ を満たす $b \in B^p$ が存在することは同値であり、

$$d^p(\psi^p(b)) = \psi^{p+1}(d^p(b)) = \psi^{p+1}(\varphi^{p+1}(a)) = 0$$

なので、$[a] = \partial^*([\psi^p(b)])$ であることが分かる。 □

補題 7.8 と 7.12、 7.13 を合わすと、次の大切な定理が成り立つ。

定理 7.14. コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、次の長完全系列が成り立つ。

$$\cdots \longrightarrow H^p(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(B^*) \xrightarrow{\psi^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^{p+1}(B^*) \longrightarrow \cdots$$

定義 7.15. 二つのチェイン写像 $\varphi, \psi \colon A^* \to B^*$ に対して、φ から ψ へのチェインホモトピーは、次の性質を満たす線形写像 $s^p \colon A^p \to B^{p-1}$ のものである。

$$d^{p-1}s^p + s^{p+1}d^p = \varphi^p - \psi^p$$

補題 7.16. チェイン写像 $\varphi, \psi \colon A^* \to B^*$ に対して、φ から ψ へのチェインホモトピーが存在するとき、誘導された写像

$$\varphi^*, \psi^* \colon H^p(A^*) \to H^p(B^*)$$

は等しいである。

証明. コサイクル $a \in A^p$ において、

$$(\varphi^* - \psi^*)([a]) = [\varphi^p(a) - \psi^p(a)] = [d^{p-1}s^p(a) - s^{p+1}d^p(a)] = [d^{p-1}s^p(a)] = 0$$

なので、$\varphi^* = \psi^*$ であることが成り立つ。 □

例 7.17. 星形の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、コチェイン複体

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\eta} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

をおいておく。このコチェイン複体に対して、ポアンカレの補題の証明で定義された線形写像

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "\epsilon"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "s^1"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-1}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^n(U) \arrow[r] \arrow[dl, "s^n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-1}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^n(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

は、恒道写像からゼロ写像へのチェインホモトピーを定義する。よって、補題 7.16 より、

$$\mathrm{id} = 0 \colon H^p(A^*) \to H^p(A^*)$$

であることが成り立つ。これで、$H^p(A^*)$ はゼロであることが分かる。すなわち、コチェイン複体 A^* は完全系列である。