6　ポアンカレの補題

補題 **6.1.** 次の性質 (i)–(iii) を満たす滑らかな関数 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する。

(i) 任意の実数 t に対して、$0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1$ である。

(ii) 任意の実数 $t \leqslant 0$ に対して、$\psi(t) = 0$ である。

(iii) 任意の実数 $t \geqslant 1$ に対して、$\psi(t) = 1$ である。

証明. 次のように定義された関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は滑らかな関数であることを示す。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 0) \\ \exp(-1/t) & (t \geqslant 0) \end{cases}$$

それに、次のように定義された関数 ψ も滑らかな関数で、性質 (i)–(iii) を満たす。

$$\psi(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

関数 f は滑らかな関数であることを示すために、任意の $n \geqslant 0$ に対して、

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f^{(n)}(t)}{t} = 0$$

であることを示せばよい。帰納法を使い、多項式 $p_n(X)$（$n \geqslant 0$）を次のように定義する。

$$\begin{aligned} &p_0(X) = 1 \\ &p_n(X) = -X^2(p_{n-1}(X) + p'_{n-1}(X)) \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

なお、関数 f の高階微分について、帰納法を使い、次の方程式が成り立つ。

$$f^{(n)}(t) = p_n(1/t)\exp(-1/t) \qquad (t > 0, n \geqslant 0)$$

それで、任意の $k \geqslant 0$ に対して、

$$\lim_{t \to 0^+} \big((1/t)^k \exp(-1/t)\big) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = 0$$

なので、補題が成り立つ。 □

補題 **6.2.** 滑らかな関数 $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して、$\phi\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ を「$\phi(x,t)=\psi(t)x$」で定義された滑らかな写像をおいておく。そのとき、誘導された写像 $\phi^*\colon \Omega^p(\mathbb{R}^n)\to\Omega^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ は、次の公式で与えられる。

$$\phi^*(dx_i)=\psi'(t)x_i\wedge dt+\psi(t)\wedge dx_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

証明. 例 5.6 より、$\phi^*(dx_i)=d\phi_i$ であることが分かる。ここで、$\phi_i(x,t)=\psi(t)x_i$ なので、補題 4.8 より、補題が成り立つ。 □

次に、定理 1.5 の一般化を証明する。まず、定理 3.5 より、開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ に対して、任意の微分形式 $\omega\in\Omega^p(U)$ は、次のように一意に表すことができる。

$$\omega=\sum_I f_I\wedge dx_I \tag{6.3}$$

ここで、添え字 I を「$1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$」を満たす整数の p 組 $(i_1,\ldots,i_p)$ とし、$f_I\in\Omega^0(U)$ とし、dx_I は微分形式 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\in\Omega^p(U)$ と定義されたものとする。

定理 **6.4 (ポアンカレの補題).** 星形の開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ に対して、

$$H^p(U)=\begin{cases}\mathbb{R} & (p=0)\\ 0 & (p>0)\end{cases}$$

証明. 開集合 U は原点 $0\in\mathbb{R}^n$ によって星形集合であることを仮定し、次の微分方程式を満たす線形写像

$$s_p\colon \Omega^p(U)\to\Omega^{p-1}(U) \qquad (p\geqslant 1) \tag{6.5}$$

を定義する。

$$\eta\epsilon+s_1d=\mathrm{id} \qquad (p=0)$$

$$ds_p+s_{p+1}d=\mathrm{id} \qquad (p>0)$$

ここで、id はベクトル空間 $\Omega^p(U)$ の恒道写像であり、$\epsilon\colon \Omega^0(U)\to\mathbb{R}$ は、「$\epsilon(\omega)=\omega(0)$」で定義された線形写像である。写像 s_p が定義された、定理は次のように成り立つ。任意の閉微分形式 $\omega\in\Omega^0(U)$ に対して、

$$\omega=\mathrm{id}(\omega)=(\eta\epsilon+s_1d)(\omega)=\eta(\omega(0))$$

であることが分かる。よって、写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to H^0(U)$ は同型である。同様に、任意の閉微分形式 $\omega \in \Omega^p(U)$（$p > 0$）に対して、

$$\omega = \mathrm{id}(\omega) = (ds_p + s_{p+1}d)(\omega) = ds_p(\omega)$$

なので、コホモロジー類 $[\omega]$ はゼロであることが分かる。よって、$H^p(U)$ はゼロである。

線形写像 s_p を定義するために、まず線形写像

$$\hat{s}_p\colon \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U) \qquad (p \geqslant 1)$$

を定義する。以上 (6.3) のように、$\tau \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$ は、次のように一意に表すことができる。

$$\tau = \sum_I f_I(x,t) \wedge dx_I + \sum_J g_J(x,t) \wedge dt \wedge dx_J$$

ここで、添え字 I と J をそれぞれの「$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$」と「$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{p-1} \leqslant n$」を満たす整数の組 $(i_1, \ldots, i_p)$ と $(j_1, \ldots, j_{p-1})$ とし、$f_I, g_J \in \Omega^0(U \times \mathbb{R})$ とする。それに関して、写像 $\hat{s}_p\colon \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ は、次の公式で定義される。

$$\hat{s}_p(\tau) = \sum_J \Big(\int_0^1 g_J(x,t)dt \Big) \wedge dx_J$$

そのとき、

$$\begin{aligned} d\hat{s}_p(\tau) &= \sum_{i=1}^n \sum_J \Big(\int_0^1 \frac{\partial g_J(x,t)}{\partial x_i} dt \Big) \wedge dx_i \wedge dx_J \\ \hat{s}_{p+1}d(\tau) &= \sum_I \Big(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x,t)}{\partial t} dt \Big) \wedge dx_I - \sum_{i=1}^n \sum_J \Big(\int_0^1 \frac{\partial g_J(x,t)}{\partial x_i} dt \Big) \wedge dx_i \wedge dx_J \end{aligned}$$

よって、任意の $p \geqslant 1$ に対して、次の方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (d\hat{s}_p + \hat{s}_{p+1}d)(\tau) &= \sum_I \Big(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x,t)}{\partial t} dt \Big) \wedge dx_I \\ &= \sum_I f_I(x,1) \wedge dx_I - \sum_I f_I(x,0) \wedge dx_I \end{aligned} \tag{6.6}$$

なお、開集合 U は原点 0 によって星形なので、次のように定義された滑らかな写像はうまく定義された滑らかな写像である。

$$\phi\colon U \times \mathbb{R} \to U \qquad \phi(x,t) = \psi(t)x$$

ここで、$\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は、補題 6.1 で定義された関数である。それを使い、線形写像 (6.5) は、

$$s_p(\omega) = \hat{s}_p(\phi^*(\omega))$$

と定義される。ここで、微分形式 $\omega\in\Omega^p(U)$ を、

$$\omega = \sum_I h_I(x)\wedge dx_I$$

と表すと、補題 6.2 と定理 5.7 より、微分形式 $\tau=\phi^*(\omega)$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_I h_I(\psi(t)x)\wedge(\psi'(t)x_{i_1}\wedge dt+\psi(t)\wedge dx_{i_1})\wedge\cdots\wedge(\psi'(t)x_{i_p}\wedge dt+\psi(t)\wedge dx_{i_p})\\
&= \sum_I h_I(\psi(t)x)\psi(t)^p\wedge dx_I\\
&+ \sum_I\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}h_I(\psi(t)x)\psi(t)^{p-1}\psi'(t)\wedge dt\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{r-1}}\wedge dx_{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}
\end{aligned}$$

よって、方程式 (6.6) より、任意の $p\geqslant 1$ に対して、

$$\begin{aligned}
(ds_p+s_{p+1}d)(\omega) &= d\hat{s}_p(\phi^*(\omega))+\hat{s}_{p+1}(\phi^*(d\omega)) = (d\hat{s}_p+\hat{s}_{p+1}d)(\phi^*(\omega))\\
&= \sum_I h_I(\psi(1)x)\psi(1)^p\wedge dx_I - \sum_I h_I(\psi(0)x)\psi(0)^p\wedge dx_I\\
&= \sum_I h_I(x)\wedge dx_I = \omega
\end{aligned}$$

よって、任意の $p\geqslant 1$ に対して、

$$ds_p+s_{p+1}d=\mathrm{id}$$

であることが分かる。

同様に、任意の $f\in\Omega^0(U\times\mathbb{R})$ に対して、

$$\hat{s}_1 df = \int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial t}dt = f(x,1)-f(x,0)$$

なので、任意の $h\in\Omega^0(U)$ に対して、

$$s_1dh = \hat{s}_1 d(h\circ\phi) = h(\psi(1)x)-h(\psi(0)x) = h(x)-h(0)$$

であることが分かる。よって、方程式

$$\eta\epsilon + s_1 d = \mathrm{id}$$

が成り立つ。 □

定義 **6.7.** (i) ベクトル空間と準同型からなる系列

$$\cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

は、すべての i に対して $d^i \circ d^{i-1} = 0$ を満たすとき、コチェイン複体または反対チェイン複体と呼ばれ、(A^i, d^i) または A^* と書かれる。

(ii) コチェイン複体 (A^i, d^i) において、すべての i に対して $\ker(d^i) = \mathrm{im}(d^{i-1})$ を満たすときこれは完全のコチェイン複体または完全系列と呼ばれる。

注 6.8. 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、ド・ラース複体と線形形式写像 η を合わせて系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\eta} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

はコチェイン複体となる。ポアンカレの補題 6.4 より、開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が星形のとき、これは完全系列である。

定義 **6.9.** コチェイン複体 A^* と B^* において、チェイン写像 $\varphi\colon A^* \to B^*$ というのは、次の図式が可換になる線形写像 $\varphi^i\colon A^i \to B^i$ を合わせてものである。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] & A^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] & A^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d^i"] & B^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & B^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

例 6.10. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対して、例 4.15 より、次のように定義された写像 φ^i を合わせてのは、チェイン写像となる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^0"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^1"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^2"] & \Omega^3(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで、φ^0 は恒道写像と定義され、それぞれ

$$\varphi^1(f_1 \wedge dx_1 + f_2 \wedge dx_2 + f_3 \wedge dx_3) = (f_1, f_2, f_3)$$
$$\varphi^2(g_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - g_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + g_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2) = (g_1, g_2, g_3)$$
$$\varphi^3(h \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = h$$

と定義される。