5 ド・ラームコホモロジー

定義 **5.1.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と非負整数 p に対して、ド・ラームコホモロジー群 $H^p(U)$ は、次のように定義された商ベクトル空間のものである。

$$H^p(U) = \ker(d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)) \big/ \operatorname{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))$$

注 5.2. (1) $\omega \in \ker(d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))$ と $\omega \in \operatorname{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)$ は、それぞれ U 上閉微分形式と U 上完全微分形式と呼ばれる。特に、ド・ラームコホモロジー群 $H^p(U)$ がゼロであることと、任意の U 上閉微分形式が完全微分形式であることは同値である。

(2) 閉微分形式 ω で与えられたコホモロジー類は、次のようにも書かれる。

$$[\omega] = \omega + \operatorname{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)) \in H^p(U)$$

(3) ベクトル空間 $H^p(U)$（$p \geqslant 0$）と次のように定義された線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to H^0(U)$、双線形写像 $\mu_{p,q}\colon H^p(U) \times H^q(U) \to H^{p+q}(U)$（$p, q \geqslant 0$）は、$\mathbb{R}$ 上次数つき可換代数である。ここで、$\eta(\lambda) \in H^0(U) \subset \Omega^0(U)$ は、定値写像 $\eta(\lambda)(x) = \lambda$ と定義される。それで、コホモロジー類 $[\omega_1] \in H^p(U)$ と $[\omega_2] \in H^q(U)$ に対して、次の計算より、コホモロジー類 $[\omega_1 \wedge \omega_2] \in H^{p+q}(U)$ がうまく定義された。

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2 = 0 \\ (\omega_1 + d\tau_1) \wedge (\omega_2 + d\tau_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\tau_2 + d\tau_1 \wedge \omega_2 + d\tau_1 \wedge d\tau_2 \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 + d\big((-1)^p \omega_1 \wedge \tau_2 + \tau_1 \wedge \omega_2 + \tau_1 \wedge d\tau_2\big) \end{aligned}$$

なお、$\mu_{p,q}([\omega_1], [\omega_2])$ は、コホモロジー類 $[\omega_1 \wedge \omega_2]$ と定義される。

定義 **5.3.** 開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ に対して、線形写像

$$\Omega^p(\phi)\colon \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1), \qquad \Omega^p(\phi)(\omega)(x) = \operatorname{Alt}^p(D_x\phi) \circ \omega(\phi(x))$$

は、ϕ で誘導された写像と呼ばれ、$\Omega^p(\phi)$ または ϕ^* と書かれる。

線形写像 $\operatorname{Alt}^p(D_x\phi)$ の定義を想起し、定義 5.3 も次のように表すことができる。

$$\Omega^p(\phi)(\omega)(x)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(\phi(x))((D_x\phi)(v_1), \ldots, (D_x\phi)(v_p))$$

補題 **5.4.** 誘導された写像は、次の性質を満たす。

(i) $\Omega^p(\psi \circ \phi) = \Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi)$

(ii) $\Omega^p(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{\Omega^p(U)}$

証明. 性質 (i) を次のように示すことができる。

$$\begin{aligned}
(\Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi))(\omega)(x) &= \mathrm{Alt}^p(D_x\phi) \circ \Omega^p(\psi)(\omega)(\phi(x)) \\
&= \mathrm{Alt}^p(D_x\phi) \circ \mathrm{Alt}^p(D_{\phi(x)}\psi) \circ \omega(\psi(\phi(x)) \\
&= \mathrm{Alt}^p(D_{\phi(x)}\psi \circ D_x\phi) \circ \omega(\psi(\phi(x)) \\
&= \mathrm{Alt}^p(D_x(\psi \circ \phi)) \circ \omega((\psi \circ \phi)(x)) \\
&= \Omega^p(\psi \circ \phi)(\omega)(x)
\end{aligned}$$

ここで、第 1 番と第 2 番、第 5 番方程式は、定義 5.3 で成り立ち、第 3 番方程式は、$\mathrm{Alt}^p(-)$ が反変関手であることで成り立ち、第 4 番方程式は、連鎖律の公式で成り立つ。性質 (ii) は、直ちに定義 5.3 から成り立つ。 □

系 **5.5.** 微分同相写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ で誘導された線形写像

$$\Omega^p(\phi)\colon \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$$

は、同型である。

証明. 滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ が微分同相写像であることと、次の性質を満たす滑らかな写像 $\psi\colon U_2 \to U_1$ が存在することは同値である。

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi &= \mathrm{id}_{U_1} \\
\phi \circ \psi &= \mathrm{id}_{U_2}
\end{aligned}$$

補題 5.4 を使い、次の方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi) = \Omega^p(\psi \circ \phi) = \Omega^p(\mathrm{id}_{U_1}) = \mathrm{id}_{\Omega^p(U_1)} \\
\Omega^p(\psi) \circ \Omega^p(\phi) = \Omega^p(\phi \circ \psi) = \Omega^p(\mathrm{id}_{U_2}) = \mathrm{id}_{\Omega^p(U_2)}
\end{aligned}$$

すなわち、$\Omega^p(\phi)$ は同型である。 □

例 5.6. 開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)\colon U_1 \to U_2$ において、滑らかな写像 $\phi_i\colon U_1 \to \mathbb{R}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) は、ベクトル空間 $\Omega^0(U_1)$ の元である。それに対して、次の公式を示す。

$$\Omega^1(\phi)(dx_i) = d\phi_i$$

定義 5.3 より、点 $x \in U_1$ とベクトル $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\begin{aligned}\Omega^1(\phi)(dx_i)(x)(v) &= dx_i(\phi(x))((D_x\phi)(v)) = e_i^*\Big(\sum_{k=1}^n \Big(\sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l}(x) v_l\Big) e_k\Big) \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l}(x) v_l = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l}(x) e_l^*(v) = d\phi_i(x)(v)\end{aligned}$$

定理 5.7. 開集合 $U_1 \in \mathbb{R}^m$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ に対して、誘導された写像は次の性質 (i)–(iii) をみたす。

(i) 任意の $\omega \in \Omega^p(U_2)$ と $\tau \in \Omega^q(U_2)$ に対して、

$$\Omega^{p+q}(\phi)(\omega \wedge \tau) = \Omega^p(\phi)(\omega) \wedge \Omega^q(\phi)(\tau)$$

である。

(ii) 任意の $f \in \Omega^0(U_2)$ に対して、

$$\Omega^0(\phi)(f) = f \circ \phi$$

である。

(iii) 任意の $\omega \in \Omega^p(U_2)$ に対して、

$$d(\Omega^p(\phi)(\omega)) = \Omega^{p+1}(\phi)(d\omega)$$

である。

それで、性質 (i)–(iii) を満たす線形写像 $L\colon \Omega^*(U_2) \to \Omega^*(U_1)$ には、必ず $L = \Omega^*(\phi)$ である。

証明. まず、点 $x \in U_2$ とベクトル $v_1, \ldots, v_{p+q} \in \mathbb{R}^m$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\Omega^{p+q}(\phi)(\omega \wedge \tau)(x)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\
&= (\omega \wedge \tau)(\phi(x))((D_x\phi)(v_1), \ldots, (D_x\phi)(v_{p+q})) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\Big(\omega(\phi(x))((D_x\phi)(v_{\sigma(1)}), \ldots, (D_x\phi)(v_{\sigma(p)})) \\
&\qquad\qquad \tau(\phi(x))((D_x\phi)(v_{\sigma(p+1)}), \ldots, \tau(\phi(x))((D_x\phi)(v_{\sigma(p+q)}))\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\Omega^p(\phi)(\omega)(x)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\Omega^q(\phi)(\tau)(x)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (\Omega^p(\phi)(\omega) \wedge \Omega^q(\phi)(\tau))(x)(v_1, \ldots, v_{p+q})
\end{aligned}
$$

である。これで、性質 (i) が成り立つ。性質 (ii) は、直ちに定義 5.3 から成り立つ。最後に、性質 (iii) を示す。まず、$p = 0$ のときを考えてみる。$f \in \Omega^0(U_2)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\Omega^1(\phi)(df) &= \Omega^1(\phi)\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \wedge dx_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \Omega^0(\phi)(\frac{\partial f}{\partial x_k}) \wedge \Omega^1(\phi)(dx_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi) \wedge d\phi_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi) \wedge \big(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \wedge dx_l\big) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi) \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l}\Big) \wedge dx_l = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial x_l} \wedge dx_l \\
&= d(f \circ \phi) = d(\Omega^0(\phi)(f))
\end{aligned}
$$

となることが分かる。ここで、第 1 番と第 4 番、第 7 番方程式は補題 4.8 より成り立ち、第２番法定式は性質 (i) より成り立ち、第 3 番と第 8 番方程式は性質 (ii) と例 5.6 より成り立ち、第 6 番方程式は連鎖律の公式より成り立つ。一般的に、

$$\omega = f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

のときを考えばよい。このとき、

$$\begin{aligned}
\Omega^{p+1}(\phi)(d\omega) &= \Omega^{p+1}(\phi)(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \\
&= \Omega^1(\phi)(df) \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_p}) \\
&= d(\Omega^0(\phi)(f)) \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_1})) \wedge \cdots \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_p})) \\
&= d\big(\Omega^0(\phi)(f) \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_1})) \wedge \cdots \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_p}))\big) \\
&= d\big(\Omega^0(\phi)(f) \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_p})\big) \\
&= d\big(\Omega^p(\phi)(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\big) \\
&= d\big(\Omega^p(\phi)(\omega)\big)
\end{aligned}$$

であることが分かる。ここで、第 1 番と第 4 番方程式は定理 4.14 より成り立ち、第 2 番と第 6 番方程式は性質 (i) より成り立ち、第 3 番と第 5 番方程式は性質 (iii) の $p = 0$ のときより成り立つ。これで、性質 (iii) が成り立つ。 □

注 5.8. 定理 5.7 の性質 (i)–(iii) も次のように書かれる。

(i) 任意の $\omega \in \Omega^p(U_2)$ と $\tau \in \Omega^q(U_2)$ に対して、$\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$ である。

(ii) 任意の $f \in \Omega^0(U_2)$ に対して、$\phi^*(f) = f \circ \phi$ である。

(iii) 任意の $\omega \in \Omega^p(U_2)$ に対して、$d(\phi^*(\omega)) = \phi^*(d\omega)$ である。

定義 **5.9.** 開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ と $U_2 \in \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ に対して、線形写像

$$H^p(\phi)\colon H^p(U_2) \to H^p(U_1), \qquad H^p([\omega]) = [\Omega^p(\phi)(\omega)]$$

は、ϕ で誘導された写像と呼ばれ、$H^p(\phi)$ または ϕ^* と書かれる。

注 5.10. 任意の閉微分形式 $\omega \in \Omega^p(U_2)$ と微分形式 $\tau \in \Omega^{p-1}(U_2)$ に対して、定理 5.7 より、次の方程式が成り立つ。

$$d(\Omega^p(\phi)(\omega)) = \Omega^{p+1}(d\omega) = \Omega^{p+1}(0) = 0$$
$$\Omega^p(\phi)(\omega + d\tau) = \Omega^p(\phi)(\omega) + d(\Omega^{p+1}(\tau))$$

よって、誘導された写像 $H^p(\phi)$ は、うまく定義されたことが分かる。

補題 5.4 と定理 5.7 より、次の定理が成り立つ。

定理 5.11. (i) 任意の開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^m$、$U_3 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ と $\psi\colon U_2 \to U_3$ に対して、

$$H^p(\psi \circ \phi) = H^p(\phi) \circ H^p(\psi)$$

である。

(ii) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$H^p(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{H^p(U)}$$

である。

(iii) 任意の開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ に対して、図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & H^0(U_2) \arrow[d, "H^0(\phi)"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] & H^0(U_1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^p(U_2) \times H^q(U_2) \arrow[r, "\mu_{p,q}"] \arrow[d, "H^p(\phi)\times H^q(\phi)"] & H^{p+q}(U_2) \arrow[d, "H^{p+q}(\phi)"] \\ H^p(U_1) \times H^q(U_1) \arrow[r, "\mu_{p,q}"] & H^{p+q}(U_1) \end{tikzcd}$$

が可換になる。

注 5.12. 定理 5.11 で、性質 (i)–(ii) は、$H^p(-)$ が反変関手であることを示し、性質 (iii) は、$H^*(\phi)$ が体 $\mathbb{R}$ 上次数つき代数の準同型であることを示す。よって、性質 (i)–(iii) を合わせてことは、ド・ラームコホモロジーが、次のような反変関手であることを示す。

$$\left\{\begin{matrix} \text{ユークリッド空間の開集合} \\ \text{滑らか写像} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{H^*(-)} \left\{\begin{matrix} \text{体 } \mathbb{R} \text{ 上次数つき可換代数} \\ \text{その準同型} \end{matrix}\right\}$$