4 微分形式

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ をおいておく。

<u>定義</u> **4.1.** 非負整数 p について、U 上 p 次微分形式というのは、滑らかな写像 $\omega\colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ のものである。U 上 p 次微分形式のなすベクトル空間は $\Omega^p(U)$ と書かれる。

すなわち、U 上 p 次微分形式のなすベクトル空間は、

$$\Omega^p(U) = C^\infty(U, \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n))$$

と定義される。

<u>注</u> 4.2. $p = 0$ のとき、「$\omega \mapsto \omega(1)$」で定義された同型 $\mathrm{Alt}^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ は、標準同型

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{\sim} C^\infty(U, \mathbb{R})$$

を誘導する。これから、$\Omega^0(U)$ と $C^\infty(U, \mathbb{R})$ を識別しない。

定理 3.3 を想起し、次の補題が成り立つ。

<u>補題</u> **4.3.** 微分形式のなすベクトル空間 $\Omega^p(U)$（$p \geqslant 0$）と次のように定義された線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to \Omega^0(U)$ と双線形写像 $\mu_{p,q}\colon \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \to \Omega^{p+q}(U)$ を合わせてものは、$\mathbb{R}$ 上次数つき可換代数である。

$$\eta(\lambda)(x)(\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2, \qquad \mu_{p,q}(\omega_1, \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

ここで、右辺の「$\wedge$」は、交代代数 $\mathrm{Alt}^*(\mathbb{R}^n)$ の外積である。 □

<u>注</u> 4.4. (1) 次数つき可換代数 $\Omega^*(U)$ の積も外積と呼ばれ、$\omega_1 \wedge \omega_2$ のように書かれる。よって、この積の定義より、

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

である。

(2) 外積 $\mu_{0,p}\colon \Omega^0(U) \times \Omega^p(U) \to \Omega^p(U)$ に対して、ベクトル空間 $\Omega^p(U)$ は、$\Omega^0(U)$-加群となることである。

(3) 任意の空集合でない開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\Omega^p(U)$（$0 \leqslant p \leqslant n$）は、無限次元ベクトル空間であり、$\Omega^p(U)$（$p > n$）は、ゼロベクトル空間である。

ベクトル空間 V, W に関して、線形写像 $f\colon V \to W$ のなす集合

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f\colon V \to W \mid f \text{ は線形写像 }\}$$

は、次のようにベクトル空間となる。

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

特に、ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ は、ベクトル空間 V の反対空間である。滑らかな写像

$$\omega\colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$$

に関して、導関数と呼ばれるのは、次のように定義された滑らかな写像

$$D\omega\colon U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n))$$

のものである。

$$D\omega(x)(v) = D_x\omega(v) = \frac{d}{dt}\omega(x+tv)|_{t=0}$$

<u>注</u> 4.5. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ の定理 3.5 より誘導された基底 $\{e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n\}$ をおいておく。この基底に対して、

$$\omega(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x) e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}$$

と表すことができる。ここで、$\omega_{i_1,\ldots,i_p}\colon U \to \mathbb{R}$ は U 上滑らかな実数値の関数である。なお、線形写像 $D_x\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ の定義より、

$$D_x\omega(e_j) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}(x) e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}$$

であることが分かる。すなわち、線形写像 $D_x\omega$ は、$\binom{n}{p} \times n$ 行列

$$\left(\frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}(x)\right)$$

と対応することとなる。

<u>定義</u> **4.6.** 次のように定義された線形写像 $d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ は、外微分とよばれる。

$$(d\omega)(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} D_x\omega(v_i)(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{p+1})$$

注 4.7. 定義 4.6 に関して、$p+1$ 重線形形式 $d\omega = d\omega(x)$ は交代式であることを証明することが必要である。なお、$v_j = v_{j+1}$ のとき、$D_x\omega(v_i)$ は交代式より、

$$\begin{aligned}(d\omega)(x)(v_1,\dots,v_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}D_x\omega(v_i)(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_{p+1}) \\ &= (-1)^{j-1}D_x\omega(v_j)(v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},v_{j+2},\dots,v_{p+1}) \\ &\quad + (-1)^{j}D_x\omega(v_{j+1})(v_1,\dots,v_{j-1},v_j,v_{j+2},\dots,v_{p+1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

であることが分かる。

射影写像 $x_i\colon U \to \mathbb{R}$（$1 \leqslant i \leqslant n$）とその外微分 $dx_i\colon U \to \mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$ をおいておく。

補題 4.8. 滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対して、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \wedge dx_n$$

である。

証明. 定義 4.6 と連鎖律の公式より、$f \in \Omega^0(U)$ と $v = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$df(x)(v) = \frac{d}{dt}f(x+tv)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n$$

であることが分かる。特に、$f = x_i$ のとき、

$$dx_i(x)(v) = v_i$$

なので、任意の $x \in U$ と $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$df(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(x)(v) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(x)(v)$$

こととなるが分かる。外積の定義と比べると補題が成り立つ。 □

補題 4.9. 滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}$ と自然数 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ に関して、

$$d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

である。

<u>証明</u>. 連鎖律の公式と定義 4.6 より、任意の $x \in U$ と $v \in \mathbb{R}^n$ にたいして、

$$D_x(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(v) = df(x)(v)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)$$

であることが分かる。それを使い、定義 4.6 と定義 2.9 は

$$\begin{aligned}
&d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} df(x)(v_i)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{p+1}) \\
&= \big(df \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\big)(x)(v_1, \ldots, v_{p+1})
\end{aligned}$$

であることを示す。 □

<u>補題</u> **4.10.** 任意の $p \geqslant 0$ に対して、合成写像

$$d \circ d \colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+2}(U)$$

は、ゼロ写像と等しいである。

<u>証明</u>. 定理 3.5 より、任意の $f \in \Omega^0(U)$ と $1 \leqslant i_1 < \ldots i_p \leqslant n$ に対して、

$$d(d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})) = 0$$

であることを示せばよい。補体 4.9 と 4.8 より、

$$\begin{aligned}
d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned}$$

であることが分かる。同様に、

$$d(d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

こととなるが分かる。なお、$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ を使うと、この方程式も次のように表される。

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

よって、$d \circ d = 0$ が成り立つ。 □

補題 4.11. 任意の $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ と $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ に対して、次の方程式が成り立つ。

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

証明. まず、$p = q = 0$ のとき、$\omega_1 = f$ と $\omega_2 = g$ は滑らかな関数だり、補題 4.8 より、

$$\begin{aligned}
d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(fg) &= \frac{\partial(fg)}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial(fg)}{\partial x_n}dx_n \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x_1}g + f\frac{\partial g}{\partial x_1})dx_1 + \cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n}g + f\frac{\partial g}{\partial x_n})dx_n \\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\Big)g + f\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}dx_n\Big) \\
&= d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2
\end{aligned}$$

となることが分かる。一般的に、交代式 ω_1 と ω_2 は、それぞれの $f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ と $g \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$ とすればよい。そのとき、

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = fg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$$

なので、補題 4.9 より、

$$\begin{aligned}
d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= (df \wedge g + f \wedge dg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= df \wedge g \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&\quad + f \wedge dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge g \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&\quad + (-1)^p f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2
\end{aligned}$$

であることが分かる。 □

定義 4.12. 体 $\mathbb{R}$ 上微分次数つき可換代数 (A^*, d) とは、次数つき可換代数 A^* と次の性質 (i)–(ii) を満たす $\mathbb{R}$-線形写像 $d\colon A^p \to A^{p+1}$（$p \geqslant 0$）を合わせてものである。

(i) 「微分」任意の $p \geqslant 0$ に対して、合成写像 $d \circ d\colon A^p \to A^{p+2}$ はゼロ写像と等しいである。

(ii) 「ライブニッツの公式」任意の $p, q \geqslant 0$ と $a_1 \in A^p$、$a_2 \in A^q$ に対して、

$$d(a_1 \cdot a_2) = (da_1) \cdot a_2 + (-1)^p a_1 \cdot (da_2)$$

である。

定義 **4.13.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ について、微分形式のなす次数つき可換代数 $\Omega^*(U)$ と外微分で定義された $\mathbb{R}$-線形写像 $d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ ($p \geqslant 0$) を合わせてものは、U のド・ラーム複体と呼ばれ、$(\Omega^*(U), d)$ または $\Omega^*(U)$ と書かれる。

補題 4.10 と 4.11 より、次の定理が成り立つ。

定理 **4.14.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、ド・ラーム複体 $(\Omega^*(U), d)$ は、$\mathbb{R}$ 上微分次数つき可換代数である。 □

例 4.15. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ に関して、定理 4.14 を用い、ド・ラーム複体

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U)$$

を計算する。まず、$f \in \Omega^0(U)$ に対して、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \wedge dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \wedge dx_3$$

である。つづいて、任意の $\omega \in \Omega^1(U)$ は、次のように表すことができる。

$$\omega = f_1 \wedge dx_1 + f_2 \wedge dx_2 + f_3 \wedge dx_3$$

微分の性質を用い、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} d\omega = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

最後に、任意の $\omega \in \Omega^2(U)$ は、次のように表すことができる。

$$\omega = g_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - g_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + g_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

このとき、同様に次の式が成り立つ。

$$d\omega = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

すなわち、勾配と回転、発散の式が成り立つ。