3 交代代数（続き）

交代式の構想を説明するために次の定義が便利である。

<u>定義</u> **3.1.** 体 $\mathbb{R}$ 上次数つき可換代数 A^* とは、実ベクトル空間 A^p（$p \geqslant 0$）と次の性質 (i)–(iii) を満たす線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to A^0$ と双線形写像 $\mu_{p,q}\colon A^p \times A^q \to A^{p+q}$（$p, q \geqslant 0$）を合わせてのもである。

(i) 「単位」任意の $p \geqslant 0$ と $a \in A^p$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\mu_{0,p}(\eta(\lambda), a) = \lambda a = \mu_{p,0}(a, \eta(\lambda))$$

である。

(ii) 「結合律」任意の $p, q, r \geqslant 0$ と $a_1 \in A^p$、 $a_2 \in A^q$、 $a_3 \in A^r$ に対して、

$$\mu_{p,q+r}(a_1, \mu_{q,r}(a_2, a_3)) = \mu_{p+q,r}(\mu_{p,q}(a_1, a_2), a_3)$$

である。

(iii) 「反可換律」任意の $p, q \geqslant 0$ と $a_1 \in A^p$、$a_2 \in A^q$ に対して、

$$\mu_{q,p}(a_2, a_1) = (-1)^{pq}\mu_{p,q}(a_1 a_2)$$

である。

<u>定義</u> **3.2.** 実ベクトル空間 V について、ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$（$p \geqslant 0$）と次のように定義された線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Alt}^0(V)$ と双線形写像 $\mu_{p,q}\colon\ \mathrm{Alt}^p(V) \times \mathrm{Alt}^q(V) \to \mathrm{Alt}^{p+q}(V)$（$p, q \geqslant 0$）を合わせてものは、$V$ で生成された交代代数と呼ばれ、$\mathrm{Alt}^*(V)$ と書かれる。

$$\eta(\lambda_1)(\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2, \qquad \mu_{p,q}(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2$$

<u>定理</u> **3.3.** 実ベクトル空間 V に対して、交代代数 $\mathrm{Alt}^*(V)$ は $\mathbb{R}$ 上次数つき可換代数である。

<u>証明</u>. 外積は結合律を満たすことを示すために、次の性質を満たす置換 $\sigma \in S_{p,q,r}$ のなす部分集合 $S_{p,q,r} \subset S_{p+q+r}$ を考えてみる。

「$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ かつ $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$ かつ $\sigma(p+q+1) < \cdots < \sigma(p+q+r)$」

それに、次のように定義された部分集合 $S'_{p,q,r}, S''_{p,q,r} \subset S_{p,q,r}$ もおいておく。

$$
\begin{aligned}
S'_{p,q,r} &= \{\sigma \in S_{p,q,r} \mid (\forall i \leqslant p) \colon \sigma(i) = i\} \\
S''_{p,q,r} &= \{\sigma \in S_{p,q,r} \mid (\forall i \geqslant p+q+1) \colon \sigma(i) = i\}
\end{aligned}
$$

この部分集合について、次の全単射が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
S_{p,q+r} \times S'_{p,q,r} &\xrightarrow{\sim} S_{p,q,r}, &\qquad (\sigma,\tau) &\mapsto \sigma\tau \\
S_{p+q,r} \times S''_{p,q,r} &\xrightarrow{\sim} S_{p,q,r}, &\qquad (\sigma,\tau) &\mapsto \sigma\tau
\end{aligned}
$$

最初の全単射を使い、

$$
\begin{aligned}
&(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))\,(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot (\omega_2 \wedge \omega_3)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \Big(\sum_{\tau \in S'_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\tau) \\
&\qquad \omega_2(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) \cdot \omega_3(v_{\sigma\tau(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q+r)}) \Big) \\
&= \sum_{\mu \in S_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\mu)\omega_1(v_{\mu(1)}, \ldots, v_{\mu(p)})\omega_2(v_{\mu(p+1)}, \ldots, v_{\mu(p+q)})\omega_3(v_{\mu(p+q+1)}, \ldots, v_{\mu(p+q+r)})
\end{aligned}
$$

であることが分かる。同様に、最後の方程式を使い、

$$
\begin{aligned}
&((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3))\,(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\mu \in S_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\mu)\omega_1(v_{\mu(1)}, \ldots, v_{\mu(p)})\omega_2(v_{\mu(p+1)}, \ldots, v_{\mu(p+q)})\omega_3(v_{\mu(p+q+1)}, \ldots, v_{\mu(p+q+r)})
\end{aligned}
$$

であることも分かる。これを比べると外積は結合律を満たすことがわかる。

最後に、外積は反可換律を満たすことを示す。そのために、次のように定義された置換 $\tau \in S_{p+q}$ をおいておく。

$$
\tau(i) = \begin{cases} p+i & (1 \leqslant i \leqslant q) \\ i-q & (q+1 \leqslant i \leqslant p+q) \end{cases}
$$

置換 τ の符号は $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{pq}$ であり、写像 $\sigma \mapsto \sigma\tau$ は、$S_{p,q}$ から $S_{q,p}$ への全単射を誘導し、

$$
\begin{aligned}
\omega_2(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q)}) &= \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
\omega_1(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) &= \omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
(\omega_2 \wedge \omega_1)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{q,p}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_2(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) \cdot \omega_1(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\omega_2(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q)}) \cdot \omega_1(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) \\
&= (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (-1)^{pq}(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q})
\end{aligned}
$$

であることが分かる。すなわち、外積は反可換律を満たす。 □

交代代数 $\mathrm{Alt}^*(V)$ の構想を理解するために、次の補題を証明する。

<u>補題</u> **3.4.** 実ベクトル空間 V について、任意の非負整数 $p \geqslant 0$ と交代式 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \mathrm{Alt}^1(V)$、ベクトル $v_1, \ldots, v_p \in V$ に対して、

$$
(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \ldots & \omega_1(v_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \ldots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix}
$$

である。

<u>証明</u>. 補題を帰納法で示す。まず、$p = 1$ のとき、$\omega_1(v_1) = \det(\omega_1(v_1))$ は正しいので、$p - 1$ のときを正しいと仮定し、p のときを示せばよい。なお、

$$
\begin{aligned}
&(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p))(v_1, \ldots, v_p) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \omega_1(v_j)(\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_p) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \omega_1(v_j) \det \begin{pmatrix} \omega_2(v_1) & \ldots & \omega_2(v_{j-1}) & \omega_2(v_{j+1}) & \ldots & \omega_2(v_p) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \ldots & \omega_p(v_{j-1}) & \omega_p(v_{j+1}) & \ldots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \ldots & \omega_1(v_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \ldots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、最初の方程式は外積の定義より成り立ち、次の方程式は帰納法の仮定より成り立ち、最後の方程式は行列式の性質より成り立つ。よって、p のときも正しいであることを示した。帰納法より、補題が成り立つ。 □

有限次元実ベクトル空間 V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ について、実ベブトル空間 $\mathrm{Alt}^1(V)$ の双対基底と呼ばれるのは、次のように定義された基底 $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ である。

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

<u>定理</u> **3.5.** 有限次元の実ベクトル空間 V とその基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ について、任意の非負整数 p に対して、次の部分集合は、実ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$ の基底となることである。

$$\{e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}^* \mid \sigma \in S_{p,n-p}\}$$

特に、$\dim \mathrm{Alt}^p(V) = \binom{n}{p}$ となることである。

<u>証明</u>. まず、補題 3.4 より、次の方程式が成り立つ。

$$(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, j_p\}) \\ 0 & (\{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{j_1, \ldots, j_p\}) \end{cases}$$

ここで、$\sigma \in S_p$ は「$\sigma(i_k) = j_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$」で定義された置換である。よって、補題 2.5 より、任意の交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^p(V)$ にたいして、

$$\omega = \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)}) e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}^*$$

であることが分かれる。すなわち、任意の $\omega \in \mathrm{Alt}^p(V)$ が $\{e_{\sigma(1)}^*, \ldots, e_{\sigma(p)}^* \mid \sigma \in S_{p,n-p}\}$ の線形結合となることである。それで、

$$\sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}^* = 0 \qquad (\lambda_\sigma \in \mathbb{R})$$

ならば、任意の $\tau \in S_{p,n-p}$ に対して、

$$\lambda_\tau = \Big(\sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}^* \Big)(e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(p)}) = 0(e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(p)}) = 0$$

である。すなわち、$\{e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}^* \mid \sigma \in S_{p,n-p}\}$ も線形同値である。 □

線形写像 $f\colon V \to W$ に関して、線形写像

$$\mathrm{Alt}^p(f)\colon\ \mathrm{Alt}^p(W) \to \mathrm{Alt}^p(V), \qquad \mathrm{Alt}^p(f)(\omega)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(f(v_1), \ldots, f(v_p))$$

は、f で誘導された写像と呼ばれ、$\mathrm{Alt}^p(f)$ または f^* と書かれる。誘導された写像に対して、次の性質 (i)–(ii) は示しやすいである。

(i) $\mathrm{Alt}^p(g \circ f) = \mathrm{Alt}^p(f) \circ \mathrm{Alt}^p(g)$

(ii) $\mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}^p(V)}$

すなわち、$\mathrm{Alt}^p(-)$ は反変関手である。この性質を使うことがよくある。例として、次の補題を示す。

<u>補題</u> **3.6.** 任意の同型 $f\colon V \to W$ に対して、誘導写像 $f^*\colon\ \mathrm{Alt}^p(W) \to \mathrm{Alt}^p(V)$ も同型になることである。

<u>証明</u>. 線形写像 $f\colon V \to W$ は同型であるとは、次の性質を満たす線形写像 $g\colon W \to V$ が存在することである。

$$f \circ g = \mathrm{id}_V$$

$$g \circ f = \mathrm{id}_W$$

よって、誘導写像に対して、次の方程式が成り立つ。

$$\mathrm{Alt}^p(f \circ g) = \mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_V)$$

$$\mathrm{Alt}^p(g \circ f) = \mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_W)$$

なお、関手の性質 (i)–(ii) を用い、この方程式を次のように表すことができる。

$$\mathrm{Alt}^p(g) \circ \mathrm{Alt}^p(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}^p(V)}$$

$$\mathrm{Alt}^p(f) \circ \mathrm{Alt}^p(g) = \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}^p(W)}$$

よって、誘導写像 $\mathrm{Alt}^p(f)$ は同型であることが分かれる。 □

<u>命題</u> **3.7.** 有限次元 n のベクトル空間 V と線形写像 $f\colon V \to V$ に対して、

$$\mathrm{Alt}^n(f)(\omega) = \det(f)\omega$$

である。

証明. ベクトル空間 V の基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ をおいておく。定理 3.5 は、ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^n(V)$ は 1 次元で、交代式 $e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*$ は基底であることを示す。よって、

$$\mathrm{Alt}^n(f)(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(e_1,\dots,e_n)=\det(f)$$

を示せばよい。ここで、誘導写像の定義より、

$$\mathrm{Alt}^n(f)(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(e_1,\dots,e_n)=(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(f(e_1),\dots,f(e_n))$$

である。それに、補題 3.4 より、

$$(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(f(e_1),\dots,f(e_n))=\det\begin{pmatrix}e_1^*(f(e_1)) & \dots & e_1^*(f(e_n))\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_n^*(f(e_1)) & \dots & e_n^*(f(e_n))\end{pmatrix}$$

であることが分かる。最後に、次の方程式より、右辺は $\det(f)$ と等しいであることが分かる。

$$\begin{aligned}f(e_1)&=e_1^*(f(e_1))e_1+\cdots+e_n^*(f(e_n))e_n\\ &\vdots\\ f(e_n)&=e_1^*(f(e_n))e_1+\cdots+e_n^*(f(e_n))e_n\end{aligned}$$

これで、補題が成り立つ。 $\square$