2 交代代数

<u>定義</u> **2.1.** 実ベクトル空間 V と非負の整数 k に関して、次の性質 (1)–(3) を満たす写像

$$\omega\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

は、k 重交代式と呼ばれる。

(1) 任意の $1 \leqslant i \leqslant k$ と $v_1, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_k \in V$ に対して、

$$\omega(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) = \omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \omega(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k)$$

(2) 任意の $1 \leqslant i \leqslant k$ と $v_1, \ldots, v_k \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\omega(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_k) = \lambda\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

(3) 任意の $1 \leqslant i < j \leqslant k$ と $v_1, \ldots, v_k \in V$ に対して、

$$v_i = v_j \ \Rightarrow\ \omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0$$

ベクトル空間 V 上の k 重交代式のなすベクトル空間は、$\mathrm{Alt}^k(V)$ と書かれる。そのベクトル空間のベクトル和とスカラー積は次のように定義された。

$$\begin{aligned}
(\omega + \omega')(v_1, \ldots, v_k) &= \omega(v_1, \ldots, v_k) + \omega'(v_1, \ldots, v_k) \qquad && (\omega, \omega' \in \mathrm{Alt}^k(V)) \\
(\lambda\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \lambda\omega(v_1, \ldots, v_k) && (\omega \in \mathrm{Alt}^k(V), \lambda \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

<u>注</u> 2.2. 定義 2.1 の性質 (1) と (2) を満たす写像

$$\omega\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

は、ベクトル空間 V 上の k 重線形形式と呼ばれる。

<u>例</u> 2.3. ゼロ個の直積 V^0 は、ベクトル空間 $\mathbb{R}$ と定義された。よって、

$$\mathrm{Alt}^0(V) = \{\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \omega\ \text{は線形写像である}\ \}$$

の 1 次元ベクトル空間と等しいである。

補題 **2.4.** $k > \dim(V)$ ならば $\mathrm{Alt}^k(V) = 0$。

証明. ベクトル空間 V は無限次元の場合には、補題は自明なので、V は有限次元であることを仮定し、基底 $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ と整数 $k > n$ をおいておく。選んだ基底に対して、任意のベクトル $v_1, \ldots, v_k \in V$ は、一意に次のような線形結合と書くことができる。

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{1,n}e_n \\ &\vdots \\ v_k &= a_{k,1}e_1 + \cdots + a_{k,n}e_n \end{aligned}$$

よって、k 重交代式 ω に関して、定義 2.1 の性質 (1) と (2) より、

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \ldots, v_k) &= \omega(a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{1,n}e_n, \ldots, a_{k,1}e_1 + \cdots + a_{k,n}e_n) \\ &= \sum_{1 \leqslant h_1, \ldots, h_k \leqslant n} a_{1,h_1} \ldots a_{k,h_k} \omega(e_{h_1}, \ldots, e_{h_k}) \end{aligned}$$

と分かることができる。なお、$k > n$ ならば、任意の $1 \leqslant h_1, \ldots, h_k \leqslant n$ に対して、必ず $h_i = h_j$ を満たす $1 \leqslant i < j \leqslant n$ が存在するので、$\omega(e_{h_1}, \ldots, e_{h_k}) = 0$。よって、

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$$

ことが分かることができる。 □

次に、対称群 S_k と符号と呼ばれる準同型 $\mathrm{sgn}\colon S_k \to \{\pm 1\}$ を復習する。対称群 S_k は、集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ の置換のなす群と定義される。特に、2つの元 $1 \leqslant i < j \leqslant k$ を入れ替える置換は、互換と呼ばれ、(i, j) と書かれる。任意の置換は、互換の積として表される。すなわち、対称群は互換で生成されている。符号と呼ばれる準同型は、任意の互換を -1 へ移す一意の準同型 $\mathrm{sgn}\colon S_k \to \{\pm 1\}$ と定義された。

補題 **2.5.** 交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ と置換 $\sigma \in S_k$ に対して、

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k).$$

証明. 帰納法を使い、次の命題を示す。「n 個の互換の積として表せる置換 $\sigma \in S_k$ と任意の交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$、ベクトル $v_1, \ldots, v_k \in V$ に対して、

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$$

である」

先ず、$n=0$ のとき、$\sigma=1$ なので命題は自明なので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。置換 σ を互換 (i,j) と $n-1$ の互換の積として表せる置換 τ の積

$$\sigma=(i,j)\tau$$

と表しておく。帰納法の仮定より、任意の $\omega\in \mathrm{Alt}^k(V)$ と $v_1,\ldots,v_k\in V$ に対して、

$$\omega(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(k)})=\mathrm{sgn}(\tau)\omega(v_1,\ldots,v_k)$$

である。特に、左辺で定義された多重線形形式

$$\omega^\tau(v_1,\ldots,v_k)=\omega(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(k)})$$

も交代式であることが分かる。それに、

$$\omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})=\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)$$

と表せる。なお、定義 2.1 の性質 (3) より、

$$\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i+v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i+v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)=0$$

ことが分かる。それに、定義 2.1 の性質 (2) より、左辺は次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\
&+\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)\\
&+\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\
&+\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)
\end{aligned}$$

ここで、定義 2.1 の性質 (3) より、第 1 項と第 4 項はゼロなので、

$$\begin{aligned}
&\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\
&=-\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},v_k)
\end{aligned}$$

であることが分かる。よって、

$$\begin{aligned}
\omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})&=\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\
&=-\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)\\
&=-\mathrm{sgn}(\tau)\omega(v_1,\ldots,v_k)\\
&=\mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1,\ldots,v_k)
\end{aligned}$$

であることが分かる。帰納法より、任意の非負整数 n に対して、命題は正しい。 □

例 2.6. 有限次元のベクトル空間 V とその基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関して、次のように定義される n 重交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$ が成り立つ。n 個のベクトル

$$v_1 = a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{1,n}e_n$$
$$\vdots$$
$$v_n = a_{n,1}e_1 + \cdots + a_{n,n}e_n$$

に対して、

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

と定義される。行列式の性質より、このような定義された写像 ω は、定義 2.1 の性質 (1)–(3) を満たすことになる。

定義 **2.7.** 非負整数 n と方程式 $p + q = n$ を満たす非負整数 p と q に関して、次の性質を満たす置換 $\sigma \in S_n$ は、(p, q) シャッフルと呼ばれる。

$$「\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{かつ} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)」$$

(p, q) シャッフルのなす集合は $S_{p,q}$ と書かれる。

補題 **2.8.** 実ベクトル空間 V と非負整数 k に関して、次の性質を満たす k 重線形形式 ω は、交代式である。「任意の $v_1, \ldots, v_k \in V$ と $1 \leqslant i < k$ に対して、$v_i = v_{i+1}$ ならば $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$」

証明. ω は線形形式なので、方程式

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k) = 0$$

を使うと、次のほう方程式が成り立つ。

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k)$$

なお、対称群 S_k は、互換 $(i, i+1)$（$1 \leqslant i < k$）で生成されているので、任意の置換 $\sigma \in S_k$ に対して、$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(k)\omega(v_1, \ldots, v_k)$ であることが分かる。これを使い、ω は交代式であることが分かれる。 □

<u>定義</u> **2.9.** 交代式 $\omega_1 \in \mathrm{Alt}^p(V)$ と $\omega_2 \in \mathrm{Alt}^q(V)$ に対して、次のように定義された $(p+q)$ 重線形形式は、ω_1 と ω_2 の外積と呼ばれ、$\omega_1 \wedge \omega_2$ と書かれる。

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

ここで、$p=0$ または $q=0$ のとき、$\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})$ または $\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$ は、それぞれ $\omega_1(1)$ または $\omega_2(1)$ と定義される。

<u>補題</u> **2.10.** 任意の交代式 $\omega_1 \in \mathrm{Alt}^p(V)$ と $\omega_2 \in \mathrm{Alt}^q(V)$ に対して、多重線形形式 $\omega_1 \wedge \omega_2$ も交代式である。すなわち、$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathrm{Alt}^{p+q}(V)$。

<u>証明</u>. 補題 2.8 より、「$(\exists 1 \leqslant i < p+q)\colon v_i = v_{i+1}$ ならば、$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0$ である」を証明すればよい。そのために、集合 $S_{p,q}$ を次のように定義された部分集合 $S_{p,q}^{(0)}$ と $S_{p,q}^{(1)}$, $S_{p,q}^{(2)}$ に分解する。

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{(1)} &= \{\sigma \in S_{p,q} \mid \sigma^{-1}(i) \leqslant p \ \text{ かつ } \ \sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1\} \\ S_{p,q}^{(2)} &= \{\sigma \in S_{p,q} \mid \sigma^{-1}(i) \geqslant p+1 \ \text{ かつ } \ \sigma^{-1}(i+1) \leqslant p\} \\ S_{p,q}^{(0)} &= S_{p,q} \setminus (S_{p,q}^{(1)} \cup S_{p,q}^{(2)}) \end{aligned}$$

なお、$\sigma \in S_{p,q}^{(0)}$ のときには、$\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = 0$ であるか $\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(1)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(2)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

であることが分かる。それに、互換 $\tau = (i, i+1)$ において、写像 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ は、$S_{p,q}^{(1)}$ から $S_{p,q}^{(2)}$ への全単射を誘導し、$\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$ であるので、以上の方程式も次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(1)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &\quad - \sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(1)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

しかし、$v_i = v_{i+1}$ より、任意の $\sigma \in S_{p,q}^{(1)}$ に対して、

$$\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}, v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}\right) = \left(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p)}, v_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p+q)}\right)$$

なので、$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0$ であることが分かる。 $\square$